Solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo em uma placa plana pelos métodos Espectral e LTS_N

A solution of the time dependent radiative transfer problem in a slab using spectral and LTS_N methods

Sandra P. Renz

Resumo

Neste trabalho, resolve-se um problema de transferência radiativa dependente do tempo combinando os métodos espectral e LTS_N *em uma placa plana. Para tal, expande-se a intensidade angular de radiação dependente do tempo em uma série truncada de polinômios de Laguerre na variável temporal, substitui-se esta expansão no problema de transferência radiativa, toma-se momentos e obtém-se problemas estacionários, que são resolvidos pelo método* LTS_N.

Palavras Chaves: Método LTS_N *, Método Espectral, Transferência Radiativa.*

Abstract

In this work, the time dependent radiative transfer problem in a slab is solved combining the spectral and LTS_N *methods. To this end, the angular radiation intensity is expanded, in the time variable, in a truncated Laguerre polynomial series. Replacing this ansatz in the radiative transfer problem and taking moments, a set of steady-state problems are obtained and these are solved by the* LTS_N *method.*

Key Words: LTS_N *method, spectral method, radiative transfer*

Sandra P. Renz *é* Professora no Centro de Ciências Naturais e Exatas Ulbra-Canoas-RS. *srenz@bol.com.br*

1. Introdução

A equação de transferência radiativa é uma equação integro-diferencial e sua complexidade decorre do fato da mesma ser descrita num espaço de fase constituído de sete variáveis independentes (três de posição, duas de direção, uma de freqüência e uma de tempo). Diversos métodos de solução tem sido propostos para a solução desta equação dependente do tempo em uma placa plana, dentre os quais, cita-se: em 1981, Levermore e Pomraning [1] deduziram a teoria da difusão partindo da equação de transferencia radiativa; em 1987, Pomraning [2] derivou a condição inicial e de contorno para esta aproximação; Ganapol [3], em 1986, obteve uma solução numérica para a equação de transporte dependente do tempo usando a técnica de expansão em polinômios de Legendre; Larsen e Pomraning [4], em 1991, mostraram que as equações P_N são um limite assintótico da equação de transporte dependente do tempo; em 1992, Szilard e Pomraning [5] resolveram numericamente a equação de transferencia radiativa acoplada com a equação de balanço de energia, o termo correspondente à derivada temporal é aproximado pelo método das diferenças finitas em esquema *backward*, o termo da derivada espacial foi aproximado por elementos finitos lineares e o termo integral pelas equações S_N.

Neste trabalho, seguindo a idéia de Oliveira [6], resolve-se a equação de transferencia radiativa linear dependente do tempo em uma placa plana, considerando-se espalhamento isotrópico, pelos métodos espectral e LTS_N. O método espectral consiste na expansão da intensidade de radiação angular em uma série truncada de polinômios ortogonais de Laguerre na variável temporal. Substitui-se esta expansão na equação de transferência radiativa tomando-se momentos, isto resulta num conjunto de problemas estacionários unidimensionais com fonte a serem resolvidos recursivamente pelo método LTS_N. O método LTS_N [7], consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável espacial no sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem decorrentes da aproximação de ordenadas discretas da equação de transferência radiativa estacionária, resolução do sistema linear algébrico resultante e reconstrução analítica do fluxo angular nas direções discretas pela técnica de expansão de Heaviside.

2. Solução da equação de transferência radiativa pelo Método Espectral

Considera-se a equação de transferência radiativa dependente do tempo:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I(x,\mu,t)+\mu\frac{\partial}{\partial x}I(x,\mu,t)+\sigma I(x,\mu,t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_s(\mu'\to\mu)I(x,\mu',t)d\mu', \tag{1}$$

sujeita às condições de contorno:

$$I(0,\mu,t)=A(\mu,t),\ \text{para}\ \mu>0 \qquad \text{(1– A)}$$

$$I(L,\mu,t)=B(\mu,t),\ \text{para}\ \mu<0 \qquad \text{(1– B)}$$

e a condição inicial:

$$I(x,\mu,0)=I_0(x,\mu) \qquad \text{(1– C)}$$

onde $I(x,\mu,t)$ denota a intensidade específica de radiação, $X \in [0, L]$ é a variável espacial, $\mu \in [-1,1]$ é o coseno do ângulo polar entre a direção do fóton e o eixo x,t > 0 é a variável temporal, c é a velocidade da luz, σ é a seção de choque total, σ_s é a seção de choque de espalhamento diferencial.

Para eliminar a dependência no tempo da intensidade angular de radiação expande-se a intensidade angular em uma série truncada de polinômios de Laguerre na variável t, ou seja:

$$I(x,\mu,t)=\sum_{k=0}^{M}L_k(t)\ I^k(x,\mu) \tag{2}$$

onde M é a ordem de truncamento da aproximação em polinômios de Laguerre. Substitui-se a equação (2) na equação (1), toma-se momentos, levando-se em conta as relações de ortogonalidade e expandindo–se ainda as condições de contorno e a condição inicial então resulta o seguinte problema estacionário de transferência radiativa. Detalhes sobre esta dedução pode ser encontrada em [6],

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}I^n(x,\mu)+\sigma^* I^n(x,\mu)=\frac{\sigma_s}{2}\int_{-1}^{1}I^n(x,\mu')d\mu'+Q^n(x,\mu) \tag{3}$$

com as condições de contorno:

$$I^n(0,\mu)=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty e^{-t}L_n(t)A(\mu,t)dt,\ \text{para } \mu>0 \tag{3–A}$$

$$I^n(L,\mu)=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty e^{-t}L_n(t)B(\mu,t)dt,\ \text{para } \mu<0 \tag{3–B}$$

onde: $$\sigma^*=\sigma+\frac{1}{c}, \tag{4}$$

$$Q^n(x,\mu)=Q^n(x,\mu)-Q^{n-1}(x,\mu) \tag{5}$$

O termo de fonte é resolvido de forma recursiva pela equação Q^n, este processo de recursividade pode ser encontrado detalhadamente em [8]. Agora, o problema estacionário resultante é resolvido pelo método LTS_N conforme [7].

3. Solução LTS_N

Considera-se a equação de transferência radiativa (3), em uma placa plana com espalhamento isotrópico. Discretiza-se a variável angular μ por ordenadas discretas. O termo integral da equação de transferência radiativa é aproximado por quadratura de Gauss-Legendre de ordem N, resultando no seguinte conjunto de equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{d}{dx}I_m^n(x)+\frac{\sigma^*}{\mu_m}I_m^n(x)=\frac{\sigma_s}{2\mu_m}\sum_{K=1}^{N}I_k^n(x)w_k+\frac{Q_m^n(x)}{\mu_m}, \tag{6}$$

sujeita as condições de contorno

$$I_m^n(0,\mu)=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty e^{-t}L_n(t)\Gamma_1(\mu_m,t)dt,\qquad \mu_m>0 \tag{6- A}$$

$$I_m^n(0,\mu)=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty e^{-t}L_n(t)\Gamma_1(\mu_m,t)dt,\qquad \mu_m>0 \tag{6-B}$$

Aplica-se a transformada de Laplace na variável espacial e obtém-se um sistema algébrico de N equações e N incógnitas:

$$\mathbf{M}_N(s)\bar{\mathbf{I}}(s)=\mathbf{I}(0)+\bar{\mathbf{S}}(s) \tag{7}$$

sendo que a matriz $\mathbf{M}_N(s)$ é uma matriz quadrada de ordem N, dada por:

$$\mathbf{M}(s)=s\mathbf{I}+\mathbf{A} \tag{8}$$

onde **I** é a matriz identidade de ordem N e os elementos da matriz **A** tem a forma,

$$a(i,j)=\begin{cases}\dfrac{\sigma^*}{\mu_i}-\dfrac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} & \text{se } i=j,\\[2ex] -\dfrac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} & \text{se } i\neq j.\end{cases} \tag{9}$$

os vetores $\bar{\mathbf{I}}(s)$, $\mathbf{I}(0)$ e $\bar{\mathbf{S}}(s)$ são expressos como:

$$\bar{\mathbf{I}}(s)=\left[\bar{I}_1(s)\ \ \bar{I}_2(s),\ \ldots,\bar{I}_N(s)\right]^T, \tag{10}$$

que representa o vetor intensidade de radiação transformado;

$$\mathbf{I}(0)=\left[\mathrm{I}_1(0)\ \ \mathrm{I}_2(0),\ldots,\mathrm{I}_N(0)\right]^T, \tag{11}$$

que representa o vetor intensidade de radiação incidente na fronteira em x = 0 em todas as direções e o vetor fonte transformado expresso por:

$$\bar{\mathbf{S}}(s)=\left[\frac{\bar{Q}_1(s)}{\mu_1},\frac{\bar{Q}_2(s)}{\mu_2},\ldots,\frac{\bar{Q}_N(s)}{\mu_N}\right]^T, \tag{12}$$

Para a resolução da equação (7) é necessário que se determine a inversa da matriz $\mathbf{M}_N(s)$. Conhecida a matriz inversa, obtém-se a intensidade angular de radiação transformada e aplicada a transformada inversa de Laplace, resulta que a intensidade angular de radiação pode ser determinada como:

$$\mathbf{I}(x)=\mathbf{B}(x)\,\mathbf{I}(0)+\mathbf{H}(x) \tag{13}$$

sendo:

$$\mathbf{B}(x)=L^{-1}\{\mathrm{M}_N^{-1}(s)\} \tag{14}$$

e

$$\mathrm{H}(x)=\mathrm{B}(x)*\mathrm{S}(x)=\int_0^x \mathrm{B}(x-\tau)\mathrm{S}(\tau)d\tau \tag{15}$$

onde

$$\mathbf{S}(x)=L^{-1}\{\bar{\mathbf{S}}(s)\} \tag{16}$$

e o asterisco denota convolução. Cada elemento da matriz $\mathbf{M}_N^{-1}(s)$ é uma função racional e portanto a transformada inversa de Laplace pode ser calculada analiticamente pela técnica de expansão de Heaviside, resultando que,

$$\mathbf{B}(x)=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}^{\mathbf{k}}e^{s_k x},$$

sendo s_k as N raízes do determinante da matriz $\mathbf{M}_N(s)$ e $\mathbf{P}^K$ são as N matrizes de coeficientes, provenientes da transformada de Laplace. As componentes desconhecidas do vetor **I**(0), dado pela equação (13) são determinadas escrevendo-se a equação na forma de matrizes bloco conforme [9].

4 . Resultados Numéricos

Para validar o método utilizado para o problema de transferência radiativa implementou-se um programa em linguagem Fortran 90. Para inverter a matiz $\mathbf{M}_N(s)$ utilizou-se o método recursivo de inversão que combina o método de Schur com o método do particionamento e ainda o pacote matemático LAPACK. A convolução que aparece em (15) foi resolvida numericamente utilizando a regra de integração por Trapézios.

Para implementar o problema de transferência radiativa dependente do tempo, em uma placa plana utilizou-se os seguinte dados: a espessura da placa é L = 0.1, velocidade da luz c = 1, seção de choque total total $\sigma = 1$, seção de choque de espalhamento diferencial $\sigma_s = 1$ Ainda são dados para o problema as condições de contorno que são a intensidade específica de radiação para x = 0 que é constante *I(0, m, t) = 2* para m > 0 e a intensidade de radiação para x = L dada por *I(L, m, t) = 0* para m < 0, a condição inicial do problema é *I(x,m, 0) =* $10^{-10}/2$.

Os resultados encontrados pelo método proposto para a temperatura são dados em termo da temperatura de rediação definida por:

$$T_r^4(x,t) = \int_{-1}^{1} I(x,\mu,t)\,d\mu, \tag{18}$$

e são apresentados nas figuras 1 e 2 para M variando de 20 até 100 nos instantes de tempo t = 0.1 e t=1.

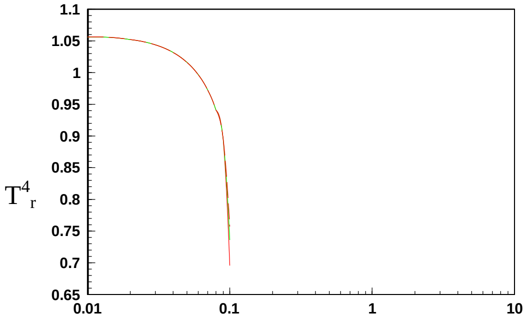

Figura 1: Temperatura de radiação para o t =0,1 (Vermelho M=98, Verde M=99, Azul M=100).

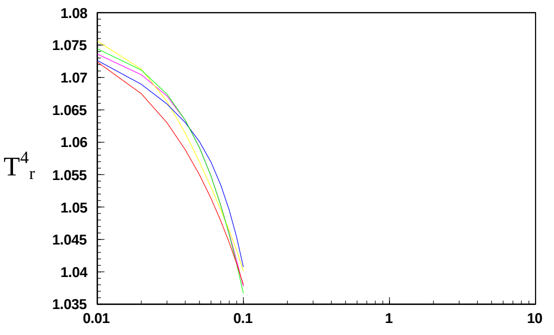

Figura 2: Temperatura de radiação para o t =1 (Vermelho M=20, Azul M=40, Rosa M=60, Verde M=80, Amarela M=100).

5. Conclusões

Tendo em vista que a meta desse trabalho constitui-se no estudo da viabilidade da aplicação combinada dos métodos espectral e LTS_N na solução da equação de transferência radiativa, considerando-se espalhamento isotrópico, observamos que o objetivo foi alcançado, pois os resultados numéricos para N=2 apresentam a mesma forma de Szilard e Pomraning para N=16 [6]. Cabe ressaltar que a convergência do método espectral e do método LTS_N aplicado ao problema de transferência radiativa foi provada por Pazos e Vilhena [10, 11].

Agradecimentos

Agradeço ao professor Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena pela colaboração neste trabalho.

6. Referências Bibliograficas

[1] LEVERMORE, C. D. ; POMRANING, G. C., A Flux-Limited Diffusion Theory **The Astrophysical Journal**: 248, p. 321:334, 1981.

[2] POMRANING, G. C., Initial and Boundary Conditions for Flux-Limited Diffusion

Theory. **Journal of Computational Physics**, 75, p. 73:85, 1988.

[3] GANAPOL, B. D., Solution of the One-Group Time-Dependent Neutron Tranport Equation in a Infinite Medium by Polynomial reconstruction. **Nuclear Science and Engineering**: 92, p. 272:279, 1986.

[4] LARSEN, E. W., POMRANING,G.C., The P_N Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry. **Nuclear Science and Engineering**: 109, p. 49:75, 1991.

[5] SZILARD, R. H.; POMRANING, G. C. Numerical Transport and Diffusion Methods and Radiative Transfer. **Nuclear Science and Engineering**: 112, p. 256:269, 1992.

[6] OLIVEIRA, J. V. P.; CARDONA, A. V. Solução Semi-analitica da equação de transporte dependente do tempo. **In**: XXII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMATICA APLICADA – XXII CNMAC, (2000: Santos – SP). **Anais.**

[7] VILHENA, M.T.; BARICHELLO, L.B.; ZABADAL, G. R.; SEGATTO, C. F.; CARDONA, A. V. General Solution of One-Dimensional Approximations to the Transport Equation. **Progress in Nuclear Energy**, v. 33, n. 1/2, p. 99:115, 1998.

[8] RENZ, S. P. **Solução da Equação de Tranferência Radiativa Dependente do Tempo pelos métodos Espectral e LTS_N.** Porto Alegre, 1999. Dissertação de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada ($CPGMA_p$), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[9]SEGATTO, C. F.; VILHENA, M. T. Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem without Azimutal Symmetry. In: **Annals of Nuclear Energy,** Great Britain, n. 11, v. 21, p. 701:710, 1994.

[10] PAZOS, R. P.; VILHENA, M. T. Spectral Solutions for time-dependent one-dimensional transport in a slab. **PHYSOR** - 2000-08-31.

[11] PAZOS, R. P.; VILHENA, M. T. Spectral Approximations for some Linear Tranport Problems. **Proceedings of ICONE 8, 8th**. International Conference on Nuclear Engineering, April 2-6, 2000, Baltimore, MD. USA.