Concepções e ideias sobre diferentes sistemas vetoriais e o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Brasil

Marlene Alves Dias
Valdir Bezerra dos Santos Júnior
Sirlene Neves de Andrade

RESUMO

Apresentamos alguns resultados da pesquisa sobre as concepções e ideias que possibilitaram o desenvolvimento dos diferentes sistemas vetoriais e a relação com possíveis organizações praxeológicas encontradas nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Brasil. A metodologia empregada é a da pesquisa bibliográfica. Esse estudo proporcionou identificar as dificuldades na introdução desses sistemas, em particular a de torná-los ferramentas eficazes para a resolução de problemas de Física e das outras ciências, bem como mostrar a falta de articulação entre a abordagem desenvolvida no Ensino Médio e os conhecimentos retrospectivos esperados dos estudantes do Ensino Superior.

Palavras-chave: Sistemas vetoriais. Didática da Matemática. História da Matemática.

Conceptions and ideas on different vector systems and the teaching and learning of Analytical Geometry and Linear Algebra in Brazil

ABSTRACT

We present some results of a research on the ideas and concepts that have enabled the development of the different vector systems and the relationship with possible praxeological organizations found in the processes of teaching and learning Analytical Geometry and Linear Algebra in Brazil. The methodology used is that of bibliographical research. This study enabled the identification of the difficulties in the introduction of such systems, especially in making them effective tools for solving problems in Physics and other sciences, as well as to show the lack of articulation between the approach followed in High School and the knowledge expected of students in Higher Education.

Keywords: Vector systems. Didactics of Mathematics. History of Mathematics.

Marlene Alves Dias é Doutora em Matemática – Didática da Matemática. Atualmente, é docente da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. Endereço: Rua Sobrália, 407, Vila Gea, São Paulo, São Paulo – Brasil. CEP: 04691-020. E-mail: maralvesdias@gmail.com
Valdir Bezerra dos Santos Júnior é doutorando em Educação Matemática e Mestre em Ensino das Ciências. Atualmente, é docente da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. Endereço: Rua Rodrigues Ferreira, 45, Bloco C, Apto. 804, Várzea, Recife, Pernambuco – Brasil. CEP: 50810-020. E-mail: valdir.bezerra@gmail.com
Sirlene Neves de Andrade é Doutora em Educação Matemática. Atualmente, é coordenadora de Matemática na DER – Diretoria Regional Sul 3 do Estado de São Paulo. Endereço: Rua Sobrália, 407, Vila Gea, São Paulo, São Paulo – Brasil. CEP: 04691-020. E-mail: sirlene-neves@hotmail.com.
Recebido para publicação em 13/04/2016. Aceito, após revisão, em 18/11/2016.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados da pesquisa sobre as concepções e ideias que possibilitaram o desenvolvimento dos diferentes sistemas vetoriais e a relação com possíveis organizações praxeológicas encontrada nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear nos Ensinos Médio e Superior brasileiros.

O estudo do desenvolvimento dos sistemas vetoriais é centrado no trabalho de Crowe (1967) e as organizações praxeológicas consideradas são resultados das pesquisas sobre a transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior desenvolvidas por: Faro (2010), que analisa as dificuldades apresentadas pelos estudantes nessa transição e propõe uma reflexão sobre quais conhecimentos são a base para o desenvolvimento dos conceitos e noções de Geometria Analítica e Álgebra Linear no Ensino Superior; Simião (2010), que investiga os conhecimentos sobre matrizes desenvolvidos no Ensino Médio; e Jammal (2011), que analisa como as noções de ponto e reta no plano desenvolvidas no Ensino Médio são articuladas com essas mesmas noções no Ensino Superior.

Os referenciais teóricos da pesquisa são a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1994, 1998, 2007, 2002) e Bosch e Chevallard (1999), a noção de quadro e mudança de quadros de Douady (1984; 1992), as noções de pontos de vista cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear definidas em Dias (1998), a noção de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, conforme definição de Robert (1998), isto é, seguem os referenciais utilizados nas pesquisas didáticas de Faro (2010), Simião (2010) e Jammal (2011).

Dessa forma, o objetivo desta pesquisa é identificar elementos para a construção de novas propostas de ação didática para as disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear nos Ensinos Médio e Superior no Brasil. Para tanto, cruzamos os resultados da análise histórica, que foi realizada por meio do trabalho de Crowe (1967), e da análise didática, efetuada por meio dos resultados das pesquisas de Faro (2010), Simião (2010) e Jammal (2011). Esses estudos buscam encontrar as possíveis articulações entre os conhecimentos desenvolvidos nas etapas escolares que antecedem o Ensino Superior e mostrar que as dificuldades dos estudantes nem sempre correspondem à falta de conhecimentos prévios, mas que eles possuem conhecimentos que não correspondem às expectativas institucionais e dos professores, necessitando uma revisitação que caracterize seu papel de ferramenta para a introdução de novos conhecimentos.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os referenciais teóricos da pesquisa são a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1994, 1998, 2007, 2002) e Bosch e Chevallard (1999), a noção de quadro e mudança de quadros de Douady (1984, 1992), a noção de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes de Robert (1998) e as noções de pontos de vista cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear definidas em Dias (1998). A opção por esse referencial está associada à possibilidade de construção de uma grade de análise que segue o modelo de Dias (1998) e que permite identificar tanto as expectativas institucionais para o desenvolvimento de um determinado conceito, como as relações pessoais esperadas e reais dos estudantes que se submetem a essas relações institucionais.

Assim, em relação à Teoria Antropológica do Didático (TAD), utilizamos, mais particularmente, as noções de relações institucionais e pessoais, praxeologia, ostensivos e não ostensivos, para as quais apresentamos brevemente a definição.

A partir das noções fundamentais objeto (o), pessoa (x) e instituição (I), Chevallard (1992) define relação pessoal e relação institucional ao objeto o, ou seja, a relação pessoal a um objeto o é reconhecida quando um objeto o existe para uma pessoa x, diremos assim que x conhece o, a relação $R(x, o)$ especificando a maneira que x conhece o. Da mesma forma, a relação institucional a um objeto o é adotada quando um objeto o existe para uma instituição I, a relação R(I, o) especificando a maneira que o objeto o existe para I.

Chevallard (1998, 2002) introduz a noção de praxeologia, partindo da premissa básica da TAD, a qual aceita que toda atividade regular humana pode ser entendida por meio de um modelo único denominado *praxeologia*.

Uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa é constituída de um bloco prático técnico [*tipo de tarefa, técnica*] e de um bloco tecnológico-teórico [tecnologia, teoria]. O bloco tecnológico-teórico é, normalmente, identificado com um *saber* e o bloco técnico com um *saber fazer*. Uma das funções da tecnologia é de explicar, esclarecer a técnica, e a teoria é a tecnologia da tecnologia, isto é, ela deve explicar, esclarecer a tecnologia.

O autor ressalta ainda que existem objetos que possibilitam a execução das técnicas; esses objetos são denominados por Chevallard (1994) de ostensivos e não ostensivos.

Os ostensivos são os objetos que têm para nós uma forma material, sensível. Exemplos: um objeto material (uma caneta, um compasso etc.); os gestos ou *ostensivos gestuais*, as palavras, e, mais genericamente, o discurso ou *ostensivos discursivos*, os esquemas, desenhos, grafismos ou *ostensivos gráficos* e as escritas e formalismos ou *ostensivos escriturais*.

Ao contrário dos objetos ostensivos, os objetos não ostensivos, que denominamos usualmente de noções, conceitos, ideias etc., não podem ser manipulados, eles só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados. Chevallard (1994) observa ainda que existe uma *dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos*, pois os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Além da TAD, consideramos as noções de quadro e mudança de quadro introduzidas por Douady (1984,1992). Segundo a autora, um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Na nossa pesquisa, identificamos os quadros: da geometria afim euclidiana, dos sistemas de equações lineares, das matrizes e da Álgebra Linear.

Assim, nos parece importante entender o que é cada um desses quadros, o que está relacionado com seu funcionamento a partir de sua introdução. Isso nos conduz a observar que o quadro da geometria afim euclidiana não é tratado como uma teoria axiomática dos espaços afins euclidianos, mas sim da geometria das retas e dos planos que são trabalhados desde o Ensino Médio e que possibilitam, por exemplo, ilustrar graficamente propriedades quando do estudo da Álgebra Linear, em particular, no estudo dos espaços vetoriais de dimensão finita superior a três.

O quadro dos sistemas de equações lineares servirá como ferramenta para outras disciplinas do Ensino Superior, em particular, para o estudo da Geometria Analítica e da Álgebra Linear.

O quadro das matrizes também serve de ferramenta para o desenvolvimento da Geometria Analítica e da Álgebra Linear. Mesmo tendo uma existência autônoma, pois cada conjunto $M_{mxn}(K)$ tem estrutura de espaço vetorial, e se m igual a n, $M_n(K)$ tem estrutura de Álgebra.

O quadro da Álgebra Linear torna possível interpretar, formalizar, unificar e generalizar propriedades associadas aos estudos já desenvolvidos nos quadros definidos acima.

Isso conduz a considerar as mudanças de quadro que, segundo Douady (1984; 1992) são atividades constantes no trabalho dos matemáticos e correspondem a meios de obter formulações diferentes de um problema as quais, sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação.

Como exemplo, podemos considerar a discussão do sistema a partir do tipo de configuração encontrada após a aplicação do método de Gauss, o que favorece relacionar o posto do sistema, o número de equações e o número de incógnitas para determinar o tipo de sistema, controlar o número de parâmetros necessários para descrever o conjunto de soluções e determinar as equações que representam as condições para que o sistema tenha solução.

Esse estudo no quadro dos sistemas lineares pode ser articulado com o quadro da Álgebra Linear, pois, de um lado, os sistemas lineares podem funcionar somente como ferramenta em relação ao quadro da Álgebra Linear, contudo, por outro lado, o quadro dos sistemas lineares pode servir de instrumento de prova, uma vez que as diferentes formas encontradas após a aplicação do método de Gauss podem ser vistas como um meio para demonstrar resultados gerais de Álgebra Linear.

Em função das possibilidades de trabalho com os sistemas lineares para auxiliar na interpretação de propriedades, quando do estudo dos espaços vetoriais de dimensão finita em Álgebra Linear, consideramos ainda as noções de pontos de vista cartesiano e paramétrico, conforme definição de Dias (1998), ou seja, para um subespaço dado, diremos que adotamos um *ponto de vista paramétrico*, quando concebemos este subespaço como subespaço gerado por um conjunto de vetores e um ponto de vista cartesiano, quando concebemos este subespaço como o conjunto de vetores soluções de uma equação ou de um sistema de equações lineares.

Finalmente, ainda como ferramenta de análise didática, consideramos a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes, segundo definição de Robert (1998), que corresponde à identificação das possibilidades de desenvolvimento de uma determinada tarefa pelos estudantes em função do nível de conceitualização que os conceitos e noções matemáticos foram desenvolvidos.

Robert (1997) define nível de conceitualização como uma prateleira em um campo conceitual de conhecimentos matemáticos, correspondendo a uma organização coerente de uma parte do campo, caracterizada pelos objetos matemáticos apresentados de uma determinada maneira, dos teoremas sobre esses objetos, dos métodos associados a esses teoremas e dos problemas que os estudantes podem resolver com os teoremas do nível considerado e utilizando esses métodos. Assim, muitas noções matemáticas podem ser abordadas em vários níveis de conceituação, sempre parcialmente encaixados.

Dessa forma, para as diferentes etapas escolares, sabemos que um mesmo conceito ou noção matemática é desenvolvido em diferentes níveis, dependendo dos conhecimentos retrospectivos dos estudantes.

Ao considerar um determinado nível de conceitualização para identificar e trabalhar sobre o conhecimento esperado dos estudantes, podemos utilizar as categorias propostas por Robert (1998), que apresentamos na sequência.

O *nível técnico* corresponde a um trabalho isolado, local e concreto, satisfazendo preferencialmente a utilização das ferramentas e definições na resolução de uma determinada tarefa. O exemplo da figura 1 representa uma tarefa na qual o nível esperado é o técnico.

FIGURA 1 – Exemplo de nível de conhecimento técnico.

8. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordam.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Fonte: Anton e Rorres (2001, p.38).

O *nível mobilizável* corresponde a um início de justaposição de saberes de certo domínio, podendo até corresponder a uma organização. O que se questiona é *explicitamente* *pedido*. No exemplo da figura 2, é pedido explicitamente que se resolva o sistema dado e que se estudem as possibilidades de solução em função do parâmetro.

FIGURA 2 – Exemplo de nível de conhecimento mobilizável.

22. Para que valor(es) de λ o sistema de equações

$(\lambda - 3)\,x + y = 0$

$x + (\lambda - 3)\,y = 0$

tem soluções não triviais?

Fonte: Anton e Rorres (2001, p.39).

O *nível disponível* equivale a responder corretamente o que é proposto sem indicações. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas. No exemplo da figura 3, para julgar se a afirmação dada é sempre verdadeira, ou às vezes falsa, é necessário conhecer em que circunstâncias o sistema possui pelo menos uma solução ou não possui solução, conhecimento que permite justificar a resposta com argumento lógico.

FIGURA 3 – Exemplo de nível de conhecimento disponível.

32. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta, dando um argumento lógico ou um contraexemplo.
(a) Um sistema linear de três equações em cinco incógnitas é consistente.
(b) Um sistema linear de cinco equações em três incógnitas não pode ser consistente.
(c) Se um sistema linear de n equações em n incógnitas tiver n entradas líder na forma escalonada reduzida por linhas de sua matriz aumentada, então o sistema terá exatamente uma solução.
(d) Se um sistema linear de n equações em n incógnitas tiver duas equações que são múltiplos uma da outra, então o sistema será inconsistente.

Fonte: Anton e Rorres (2001, p.41).

É importante observar que não existe uma hierarquia entre esses níveis e que os três níveis podem funcionar ao mesmo tempo em uma tarefa.

Após a apresentação do referencial teórico da didática da Matemática, passamos à exposição do trabalho de Crowe (1967).

Segundo Crowe (1967), a evolução dos sistemas vetoriais se organiza a partir do conceito de paralelogramo de forças e velocidade, da descrição e análise da geometria de posição de Leibniz, do conceito de representação geométrica de um número complexo por meio da descrição e estudos de matemáticos como Wessel, Gauss, Argand, Buée, Mourey, Warren com destaque para o trabalho de Argand, da apresentação da descoberta dos quaternions por Hamilton, para finalmente mostrar a existência de outros sistemas vetoriais, como o cálculo do baricentro de Möbius, o cálculo das equipolências de Bellavitis e o cálculo das extensões de Grassman.

Assim, a descrição e discussão da evolução dos sistemas vetoriais por meio desses trabalhos possibilita a Crowe mostrar as condições e restrições sofridas para o desenvolvimento desses sistemas no decorrer do tempo.

A seguir apresentamos a metodologia utilizada no desenvolvimento dessa parte da pesquisa.

METODOLOGIA

Articulando referencial teórico e objetivos, a metodologia utilizada é a da pesquisa bibliográfica, com posterior cruzamento dos resultados do estudo histórico efetuado por meio do trabalho de Crowe (1967) e das análises didáticas feitas por meio dos trabalhos de Faro (2010), Simião (2010) e Jammal (2011).

Após a escolha do material acima, efetuamos a leitura, análise, interpretação e comparação das pesquisas acima para a identificação de novas propostas didáticas para o desenvolvimento das disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear nos Ensinos Médio e Superior no Brasil.

RESULTADOS

O estudo bibliográfico possibilitou identificar, nas duas concepções consideradas por Crowe (1967), as possibilidades de mudanças para o funcionamento dos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear nos Ensinos Médio e Superior brasileiro.

Observamos que a primeira concepção de Crowe (1967), que trata da história da análise vetorial como o estudo de um sistema de abreviações criado para identificar os problemas que já podiam ser resolvidos pelo método cartesiano e para os quais é possível aplicar o método vetorial, pode ser vista como a passagem do ponto de vista cartesiano para o ponto de vista paramétrico, conforme definição de Dias (1998) e nos conduz a questionar sobre o trabalho desenvolvido nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Analítica no Brasil, que propõe o estudo dessa disciplina utilizando as equações e os vetores já no Ensino Médio, mas que na realidade só trabalha com as equações no plano, deixando a articulação equação/vetor para o Ensino Superior, como aponta o trabalho de Jammal (2011).

A segunda concepção corresponde a considerar a história da análise vetorial como a possibilidade de conceber os objetos como pertencentes à Física ou à Geometria. No caso brasileiro, notamos que o objeto vetor é introduzido pea primeira vez como ferramenta para resolver problemas de Física, no Ensino Médio.

Ressaltamos aqui que a noção de vetor, enquanto objeto matemático para auxiliar na resolução de problemas de Física e Geometria, só será introduzida no Ensino Superior brasileiro para os cursos de Ciências exatas.

Observamos um ponto importante de ação em relação ao Ensino Médio, no qual o estudo de vetores é desenvolvido apenas na disciplina de Física, quando do estudo dos movimentos, em geral no primeiro ano. Nossa proposta é de se desenvolver um trabalho articulado de forma que, ao se introduzir a Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio, se resgatem os conhecimentos retrospectivos dos estudantes desenvolvidos em Física, de modo a articulá-los com os novos conhecimentos matemáticos sobre a noção de vetores e que este trabalho matemático seja desenvolvido para o plano e para o espaço.

Voltando ao desenvolvimento histórico, segundo a evolução proposta por Crowe (1967), já no século XVII, os gregos utilizavam a abordagem geométrica para resolver os problemas de Física e as entidades físicas passavam por uma transformação, que consistia na mudança de configuração, mas é somente no século XIX que a abordagem geométrica e as novas representações das entidades físicas convergem para a criação e desenvolvimento de métodos vetoriais com a criação do primeiro sistema vetorial de dimensão superior a três em 1840.

Ainda conforme Crowe (1967), o paralelogramo de forças e velocidades, o conceito de geometria de posição de Leibniz e o conceito de representação geométrica de números imaginários são as três ideias que possibilitaram a construção do sistema vetorial de dimensão superior a três.

Crowe (1967) esclarece que o efeito da ideia de paralelogramo é indireto, o que o torna o principal e primeiro caso evidente de um método vetorial que traz uma ajuda à Física.

A Geometria de posição de Leibiniz do século XVII (1679), publicada apenas no século XIX (1833), propõe uma nova álgebra, em que as entidades geométricas são representadas simbolicamente e esses símbolos podem ser submetidos a uma operação direta, congruência de conjunto de pontos, podendo ser considerada como o primeiro sistema a admitir a utilização das coordenadas.

O conceito de representação geométrica de números imaginários, além de ser um sistema vetorial, conduz Hamilton a descobrir os Quaternions.

De acordo com Crowe (1967), podemos associar Hamilton ao desenvolvimento da Física Moderna. Crowe acrescenta ainda que podemos atribuir a Hamilton a definição dos pares ordenados e as possíveis operações entre eles. Além disso, segundo Crowe, Hamilton compreendeu a natureza e a importância das leis associativa, comutativa e distributiva, e verificou também quais as propriedades que se preservam para o produto escalar e vetorial. Ainda conforme Crowe (1967), o estudo dos Quaternions e sua comparação com os vetores (produto escalar e vetorial) auxiliaram na simplificação dos vetores modernos. Assim, infere-se que foi Hamilton quem introduziu os termos escalar e vetor.

Da análise didática, observamos que, consoante o estudo de Faro (2010), a noção de sistemas de equações lineares é articulada com conhecimentos de Geometria Analítica apenas para os sistemas 2x2; os sistemas 3x3 são deixados para serem trabalhados no Ensino Superior. No Ensino Superior, as representações paramétricas e cartesianas de retas no plano e retas e planos no espaço são introduzidas, mas em termos de articulação só se considera a passagem da representação cartesiana para a representação paramétrica; o caso de passagem da representação paramétrica para a representação cartesiana é deixado a cargo dos estudantes, o que consideramos uma questão importante de ser trabalhada nas novas propostas de ação didática.

Nestas novas propostas de ação didática, estamos considerando que é preciso reestruturar os cursos de Geometria Analítica nos Ensinos Médio e Superior e Geometria Analítica no Ensino Médio, pois seria interessante considerar o estudo dos sistemas de equações lineares 2x2 e 3x3 já no Ensino Médio, utilizando o método do escalonamento para sua solução e discutindo as possibilidades de solução com ênfase no estudo dos sistemas com infinitas soluções, o que corresponde à passagem da representação cartesiana para a representação paramétrica, que seria revisitada no Ensino Superior, em particular, quando da introdução dos espaços vetoriais de dimensão finita.

Desse modo, deixaríamos para o Ensino Superior a passagem da representação paramétrica para a representação cartesiana, que seria desenvolvida tanto em Geometria Analítica quanto em Álgebra Linear, iniciando o estudo com IR^2 e IR^3 e formalizando e generalizando para IR^n, o que permitiria mostrar que para essas passagens existem técnicas algorítmicas que não são simétricas, pois a passagem da representação cartesiana para a representação paramétrica se situa na resolução de sistemas lineares, enquanto a passagem da representação paramétrica para a representação cartesiana necessita que se considere as condições para que o sistema tenha solução.

Ressaltamos assim que a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico e vice-versa pode ser trabalhada em diferentes quadros, a saber: quadro dos sistemas lineares, quadro da geometria, quadro da álgebra linear, quadro das matrizes e quadro dos determinantes. Em função desses quadros, essa articulação se exprime e é trabalhada de forma específica, o que em razão do quadro considerado pode auxiliar os estudantes a compreenderem melhor os conceitos e noções de Geometria Analítica e Álgebra Linear e as semelhanças e diferenças entre essas duas disciplinas.

Observamos aqui que Dias (1998), ao estudar os problemas de articulação entre pontos de vista cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear, já havia mostrado que o recurso à Geometria em Álgebra Linear é pouco presente e pouco operatório e que os estudantes, quando querem utilizá-lo, são quase sempre induzidos a erros e têm dificuldades em distinguir claramente afim de vetorial, uma vez que eles tentam generalizar os invariantes para dimensões superiores a três sem saber como fazê-lo.

No exemplo do quadro 1, destacamos um tipo de tarefa encontrada por Faro (2010) e analisada por meio de uma grade de análise.

QUADRO 1 – Tipo de tarefa sobre sistemas lineares.

Tarefa: ***Resolver um sistema de equações lineares e discutir as possibilidades de solução.***

Exercício proposto

8. Resolva cada sistema linear 2x2 usando o método da adição; classifique-o quanto ao número de soluções e faça sua representação gráfica.

a) $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-2y=-12 \\ 5x+6y=8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x-10y=15 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$

FONTE: Dante (2008, p.254)

***Quadro em que a tarefa é enunciada*: numérico;**
***Nível de conhecimento exigido na solução tarefa*: mobilizável, quando explicita o método a ser utilizado para a solução do sistema linear e disponível quando não explicita;**
***Ostensivos utilizados no enunciado*: representação explícita de sistemas de equações lineares;**
***Pontos de vista*: cartesiano e paramétrico;**
***Ostensivos e não ostensivos utilizados na solução da tarefa:* método da adição, método geométrico, pares ordenados e discussão das possibilidades de solução, representação paramétrica do conjunto solução, representação cartesiana do conjunto solução;**
Níveis de conhecimento necessários para a execução da tarefa em relação às noções que serão utilizadas:
- Métodos algébricos e geométricos para resolução dos sistemas lineares dados pedidos explicitamente, logo se trata do nível mobilizável.
- Discussão e classificação dos sistemas, o que se refere aos níveis mobilizável e disponível, respectivamente.
- Representação cartesiana e paramétrica do conjunto solução de sistemas de equações lineares, que exige um pedido explícito e, quando esse não é feito, supõe-se que os estudantes disponham de conhecimentos sobre essas representações.

Fonte: Faro (2010, p.105).

A tarefa acima apresentada, que é proposta para ser trabalhada já no Ensino Médio, apesar de simples pode ser considerada como um dos instrumentos a ser revisitado no Ensino Médio, quando da introdução e desenvolvimento de Geometria Analítica e de Álgebra Linear. O que consideramos importante é explicitar a passagem de uma representação à outra e indicar meios de antecipação e controle para os estudantes, ou seja, para os sistemas lineares 2x2, as condições de antecipação e controle podem ser visualizadas geometricamente por meio do gráfico de suas equações no sistema cartesiano ortogonal, no qual podemos verificar se o sistema tem uma única solução, infinitas soluções ou não tem solução. Esses meios de antecipação e controle nos parecem importante de serem desenvolvidos já no Ensino Médio para que os estudantes adquiram estes hábitos, não somente para o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear, mas para todos os outros domínios da Matemática e das Ciências em geral.

Consideramos ainda o estudo de Simião (2010) sobre a proposta de ensino da noção de matrizes, suas operações e propriedades para o Ensino Médio para compreendermos quais as articulações possíveis entre o trabalho proposto para ser desenvolvido nesta etapa escolar e o que se espera enquanto conhecimentos retrospectivos dos estudantes quando iniciam o Ensino Superior.

O trabalho de Simião (2010) mostra que o estudo das matrizes é centrado nas definições e técnicas para a aplicação na solução de sistemas de equações lineares, em particular, para o estudo dos sistemas de Cramer, e para utilização enquanto ostensivo de execução de técnicas no estudo das retas no plano em Geometria Analítica. Todo o trabalho de articulação entre matrizes e as noções de Geometria Analítica e Álgebra Linear para espaços de dimensão superior a três é deixado para o Ensino Superior.

No exemplo do quadro 2, destacamos um tipo de tarefa encontrada por Simião (2010) e analisada por meio de uma grade de análise.

QUADRO 2 – Tipo de tarefa sobre matrizes.

Tarefa: ***Representação algébrica de uma matriz.***

Exercício proposto

Escreva as matrizes:

a) $A=(a_{ij})_{2X3}$ **tal que** $a_{ij} = i^2+j^2$

b) $M=(a_{ij})$, **com** $1 \leq i \leq 3$ **e** $1 \leq j \leq 3$, **tal que** $a_{ij} = 3i+2j-5$

FONTE: Dante (2005, p. 242)

Quadro em que a tarefa é enunciada: **quadro algébrico funcional, pois a tarefa é enunciada utilizando uma relação funcional em termos de i (linha) e j (coluna) e o tipo de matriz que deve ser construída.**
Quadro de solução da tarefa: **quadro matricial algébrico, pois é escrita uma matriz algébrica em termos de linha e coluna, usam-se os índices de cada termo para substituição na relação funcional fornecida e, após calcular o valor numérico desses termos, escreve-se a matriz solicitada, ou seja, a solução é descrita, utilizando o quadro matricial numérico.**
Não ostensivos utilizados na tarefa: **noção de posição de cada termo na matriz, noção de tipo de matriz, noção de cálculo do valor numérico segundo a relação fornecida, noção de igualdade, noção de intervalo e número índice.**
Ostensivos utilizados na tarefa: **ostensivo da manipulação matricial; ostensivo da representação funcional, algébrica e numérica; ostensivo gestual, oral e visual, quando do discurso de passagem de um ostensivo para o outro.**
Níveis de conhecimento esperados para solução da tarefa: **nível mobilizável, pois o estudante deverá ter conhecimentos relacionados à notação que representa uma matriz algébrica e utilizar os termos algébricos na escrita matricial; também deverá ter noções sobre o cálculo do valor numérico, utilizando a relação funcional fornecida, que, depois de calculada em termos numéricos, deverá ser escrita no quadro matricial numérico.**

Fonte: Simião (2010, p.161).

Convém ressaltar que o estudo de Simião indica que as matrizes são introduzidas no Ensino Médio enquanto ferramentas de cálculo para tarefas de Geometria Analítica. Assim, as possibilidades de ação sobre a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico são deixadas para o Ensino Superior. Aqui nos parece importante pontuar que, mesmo que a utilização do método de escalonamento para o estudo dos sistemas lineares venha indicada nas propostas institucionais, como por exemplo nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), ainda existem autores de livros didáticos que se valem do método dos determinantes para a resolução desses sistemas, o que pode causar dificuldades de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, como demonstra Dorier (1993).

Consideramos também o estudo de Jammal (2011), que trata mais especificamente da pouca atenção dada ao estudo da Geometria Analítica desenvolvida no Ensino Médio, pois, em geral, no Ensino Superior, inicia-se a Geometria Analítica no espaço sem associar ao que já foi desenvolvido para o plano. Afigura-nos importante que os conhecimentos retrospectivos dos estudantes em relação ao que foi desenvolvido para o plano sejam utilizados na introdução dos novos conhecimentos, o que pode auxiliá-los a compreender as semelhanças e diferenças existentes entre estes dois espaços e, posteriormente, entre os espaços de dimensão maior que 3. Certamente essas ações ficam a cargo dos professores e estes precisam identificar os conhecimentos retrospectivos de seus estudantes de forma a introduzir as noções de Geometria Analítica e Álgebra Linear no plano e no espaço ou desenvolvê-las apenas no espaço, se os estudantes já disponham de conhecimentos de Geometria Analítica no plano.

Certamente, para a disciplina de Álgebra Linear, o estudo em IR^n teria caráter introdutório, sendo útil para criar as imagens mentais necessárias para o desenvolvimento dos conceitos e noções dessa disciplina para outros espaços.

O estudo de Jammal (2011) coloca em evidência a falta de articulação entre a proposta do Ensino Médio, no qual são introduzidos pontos e retas no plano, utilizando apenas o ponto de vista cartesiano, e a do Ensino Superior, em que se introduzem pontos, retas e planos no espaço e os pontos de vista cartesiano e paramétrico, mas ainda não é considerada a articulação entre esses dois pontos de vista, como aponta o trabalho de Dias (1998).

No exemplo do quadro 3, destacamos um tipo de tarefa encontrada por Jammal (2011) e analisada por meio de uma grade de análise.

QUADRO 3 – Tipo de tarefa sobre retas no plano.

Tarefa: ***Escrever a equação de uma reta em variadas representações.***

Exercício proposto

Passe a equação da reta de uma das formas conhecidas para outra:

a) $\frac{x}{3}+\frac{4}{2}=1$**, para a forma reduzida;**

b) $y-6=\frac{1}{2}(x+4)$**, para a forma geral;**

c) $3x+9y-36=0$**, para a forma segmentária;**

d) $\begin{cases} x=3-t \\ y=t+2 \end{cases}$**, para a forma geral.**

FONTE: Dante (2006, p. 28)

Quadro em que a tarefa é enunciada**: quadro algébrico;**
Ostensivos utilizados nos enunciados: **representação segmentária de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo a); representação funcional de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo b); representação cartesiana de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo c): representação paramétrica de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo d);**
Não ostensivos utilizados nos enunciados: **noção de equação segmentária de reta em $\mathbb{R}^2$; noção de equação funcional de reta em $\mathbb{R}^2$; noção de equação cartesiana de reta em $\mathbb{R}^2$; noção de equação paramétrica de reta em $\mathbb{R}^2$;**
Quadro para solução da tarefa: **quadro algébrico;**
Ostensivos utilizados na solução da tarefa**: representação segmentária de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo a); representação funcional de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo b); representação cartesiana de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo c): representação paramétrica de reta em $\mathbb{R}^2$ (exemplo d);**
Pontos de vista em relação à noção de ponto: **geométrico e coordenadas;**
Níveis de conhecimento necessários para a solução da tarefa**: nível mobilizável em relação às várias formas de representação de uma equação de uma reta em $\mathbb{R}^2$ e disponível em relação às operações algébricas.**
Observação: O ***ponto de vista geométrico*** **está associado à representação de um ponto por meio de uma letra maiúscula que aqui denominamos ostensivos de representação intrínseca de ponto. O** ***ponto de vista em coordenadas*** **está associado à representação de ponto no plano por meio de um par ordenado determinado através de um sistema cartesiano ortogonal.**

Fonte: Jammal (2011, p.121).

Observamos que tanto para o estudo dos sistemas lineares, como para as matrizes e pontos e retas no plano, o trabalho desenvolvido no Ensino Médio não é revisitado no Ensino Superior e nem mesmo utilizado como conhecimento retrospectivo para criar as imagens mentais para a introdução de novos conceitos e noções, como, por exemplo, em Geometria Analítica, não se empregam os conceitos de pontos e retas desenvolvidos no Ensino Médio para demonstrar, por exemplo, que, se para definir reta no plano, necessitamos apenas de uma equação, para definir uma reta no espaço são necessárias duas equações, o que poderia ser revisitado quando se introduz Álgebra Linear.

Considerando os estudos de Faro (2010), Simião (2010) e Jammal (2011), que utilizaram os referenciais teóricos didáticos apresentados acima para a análise das expectativas institucionais sobre a noção de sistemas lineares quando da transição entre o Ensino Médio e superior, a noção de matriz, suas operações e propriedades em relação a essa mesma transição e as representações interna e externa das noções de ponto e reta no plano no Ensino Médio, respectivamente, observamos que os resultados apontam para uma proposta de trabalho com os estudantes, que segue o desenvolvimento histórico dos sistemas vetoriais, uma vez que, segundo Crowe (1967), estes são considerados como sistemas de abreviações que foram aplicados em problemas que já tinham uma solução pelo método cartesiano.

Ressaltamos aqui a importância dos sistemas vetoriais como uma nova forma de resolver problemas que já apresentam uma solução, mas que tanto do ponto de vista histórico como do ponto de vista didático são importantes, pois auxiliaram os matemáticos no planejamento, execução e controle de seus problemas de pesquisa e podem auxiliar os estudantes a compreenderem melhor a razão de se introduzirem diferentes quadros, pontos de vista e representações para um mesmo objeto matemático.

Além disso, se optamos por uma escola em que se articulam conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, não podemos deixar que as articulações possíveis fiquem a cargo de professores e estudantes, mas é necessário que as mesmas sejam consideradas nos documentos oficiais e desenvolvidas nos materiais de apoio, em particular, nos livros didáticos que são avaliados e distribuídos pelo Ministério da Educação no Brasil.

Assim, a articulação entre os pontos de vista paramétrico e cartesiano estaria respondendo à segunda concepção de Crowe (1967), que mostra a importância da mesma para o estudo da Física e da Geometria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa breve descrição da evolução dos sistemas vetoriais por Crowe (1967), quando utilizada como referência para compreender o desenvolvimento da noção de vetor no ensino de Geometria Analítica e Álgebra Linear nos Ensinos Médio e Superior no Brasil, coloca em evidência as dificuldades na introdução desses sistemas, em particular, a de torná-los ferramentas eficazes para o trabalho intramatemático e extramatemático, em particular, para a resolução de problemas de Física e das outras ciências.

Além disso, o estudo histórico põe em destaque as dificuldades em relação às diferentes representações dos objetos matemáticos associados à noção de vetor que foram desenvolvidas de diferentes formas e que algumas vezes dificultaram a compreensão do trabalho desenvolvido, como é o caso dos quaternions de Hamilton.

O estudo da história da evolução das ideias e concepções de diferentes sistemas vetoriais permite identificar a dificuldade de introduzi-los já no Ensino Médio de modo que possam servir de ferramentas explícitas para a solução de tarefas de outras disciplinas, mas dá indícios da importância de se trabalhar em diferentes quadros e de forma articulada em IR^2 e IR^3, quando da introdução das noções de Física e Geometria Analítica.

O estudo didático por meio da identificação das praxeologias existentes mostra a falta de articulação entre a abordagem desenvolvida no Ensino Médio e os conhecimentos retrospectivos esperados como disponíveis para os estudantes que iniciam o Ensino Superior, em particular quando se considera o estudo de pontos e retas em Geometria Analítica e das matrizes que, em geral, são introduzidas no Ensino Médio apenas como ferramentas para auxiliar na definição do cálculo de determinantes de uma matriz que será utilizado, por exemplo, como uma forma prática para determinar a representação cartesiana de uma reta determinada por dois pontos em Geometria Analítica.

As propostas didáticas dos trabalhos analisados convergem para a necessidade de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico já no Ensino Médio, considerando pontos e retas no plano e pontos, retas e planos no espaço com suas respectivas representações. Isso pode auxiliar a criar as imagens mentais necessárias para se trabalhar com espaços vetoriais de dimensão finita maior que três, mas para desenvolver esse trabalho é preciso que na proposta curricular de Matemática para o Ensino Médio se reforce a importância de trabalhar também a noção de vetor e articulá-la com a noção de equação.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des Mathématiques,* Grenoble, v.19, n.1, p.77-123, 1999.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, v.12, n.1, p.73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. 1994. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125>. Acesso em: 22 mar. 2015.

CHEVALLARD, Y. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques*: l'approche enthropologique. 1998. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf >. Acesso em: 20 fev. 2015.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude.1. Structures & Fonctions. In: *Actes de la XI école d'été de Didactique des Mathématiques*, 2002. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2015.

CHEVALLARD, Y. *Le développement actuel de la TAD*. Pistes et jalons, 2007. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/>. Acesso em: 19 fev. 2015.

CROWE, M. J. *A history of vector analysis*: the evolution of the idea of a vectorial system. New-York: Dover, 1967.
DIAS, M. A. *Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. 500f. Tese (Doutorado em Matemática) – Departamento de Matemática, Université Paris VII, Paris, França, 1998.
DORIER, J. L. L'émergence du concept du rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. *Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques,* Paris, v.3, p.159-190, 1993.
DOUADY, R. *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.* Tese (Doutorado em Matemática) – Departamento de Matemática, Université Paris VII, Paris, França, 1984.
DOUADY, 1992. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, Paris, v.6, p.132-158, 1992.
FARO, S. *Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior:* O caso da noção de sistemas de equações lineares. 226f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Setor de Educação, Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2010.
JAMMAL, E. F. *Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no Ensino Médio*. 222f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Setor de Educação, Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2011.
ROBERT, A. Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. In: DORIER, J. L. et al. *L'enseignement de l'algèbre lineaire en question*. 1er. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1997. p.149-157.
ROBERT, A. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, v.18, n.2, p.139-190, 1998.
SIMIÃO, F. *A noção de matriz na transição entre o Ensino Médio e Superior*. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Setor de Educação, Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2010.