Exploración del pensamiento algebraico de profesores de Matemática en formación – “La prueba EVAPAL”

Andrés González Rondell
Fredy Enrique González

RESUMEN

En este trabajo se rinde cuenta de los resultados de un estudio exploratorio del pensamiento algebraico de un grupo de profesores de matemática en formación, alumnos de una universidad pública venezolana de formación docente, el mismo forma parte de un estudio más amplio de carácter cualitativo, fenomenológico-interpretativo en el que se aspira examinar las relaciones entre los procesos del pensamiento algebraico y la mediación tecnológica. Tuvo carácter diagnóstico y confirmatorio, para lo cual se aplico un instrumento, tipo prueba, denominado Evaluación del Pensamiento Algebraico (EVAPAL), éste fue diseñado por el autor y fue validado a través del juicio de 3 expertos. En la selección de los sujetos de la investigación no intervino ningún análisis del tipo estadístico ni muestral, y en total fueron 118 estudiantes, algunos de los cuales ya habían aprobado un primer curso de álgebra. Una vez obtenidas las respuestas éstas fueron digitalizadas en formato matricial, resultando un total de 2360 respuestas. Se procedió a comparar las contestaciones de los estudiantes a la luz de algunas respuestas dadas por profesores a quienes se les solicitó que respondieran la prueba, y tomando en cuenta otras investigaciones (KIERAN; FILLOY, 1989; URSINI; ESCAREÑO; MONTES; TRIGUEROS, 2005, etc.) a fin de establecer los errores y aciertos cometidos en la resolución de problemas y/o ejercicios de cada ítem. También el análisis fue confirmatorio de las teorías y/o hallazgos precedentes. En las respuestas obtenidas se estuvo pendiente de aquellas que, en relación con la manipulación de letras, se correspondieran con la clasificación de Kuchemann (1980); sin obviar detalles que los autores considerasen significativos. Se encontró que los estudiantes usan las letras siguiendo la clasificación de Kuchemann en sus 4 primeros niveles; prevalece una visión procedimental del signo de igualdad (=) que enfatiza lo computacional sobre lo estructural (SFARD, 1991, citado por Andonegui, 2009) en el cálculo del resultado de las operaciones, existen dificultades para admitir expresiones abiertas y, en general, los estudiantes presentan debilidades en la lectura de contenidos matemáticos.

Palabras clave: Estudiantes. Contenidos matemáticos. Mediación tecnológica.

Andrés González Rondell é professor da Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay, Estado Aragua; Venezuela) Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM). Endereço para correspondência: Apartado Postal, 514 – Código Postal 2101 – Maracay, Estado Aragua, Venezuela. E-mail: agorondell@yahoo.es

Fredy Enrique González é Doutor em Educação pela Universidad de Carabobo (Valencia, Venezuela). Professor da Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Núcleo Maracay, Estado Aragua; Venezuela) Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM). Endereço para correspondência: Apartado Postal 514 – Código Postal 2101 – Maracay, Estado Aragua, Venezuela. E-mail: fredygonzalez1950@gmail.com

Exploração do pensamento algébrico de professores de Matemática em formação – “A prova EVAPAL”

RESUMO

Este trabalho é responsável pelos resultados de um estudo exploratório do pensamento algébrico de um grupo de professores de matemática em formação, estudantes de uma universidade pública de formação de professores da Venezuela, o mesmo é parte de um estudo qualitativo, interpretação fenomenológica que tem por objetivo analisar as relações entre os processos do pensamento algébrico e a mediação tecnológica. Teve caráter diagnóstico e confirmatório, no qual foi aplicado um instrumento, um teste, chamado Evolução do Pensamento Algébrico (EVAPAL), que foi projetado pelos autores, e foi validado por meio do julgamento de três peritos. A seleção dos sujeitos da pesquisa não envolveu qualquer tipo de análise estatística e de amostragem, e no total foram 118 alunos, alguns dos quais já tinham sido aprovados em um primeiro curso de álgebra. Uma vez que tínhamos as respostas dos alunos, que foram digitalizadas em formato matricial), resultando em um total de 2360 respostas, essas foram comparadas à luz de algumas respostas dadas por professores que foram convidados a responder o teste, e levando em consideração outras pesquisas (KIERAN; FILLOY, 1989; URSINI; ESCAREÑO; MONTES; TRIGUEROS, 2005, etc.) a fim de estabelecer os acertos e os erros cometidos na resolução de problemas e/ou exercícios de cada item. Também, a análise foi confirmada por teorias e/ou resultados anteriores. As respostas obtidas foram aquelas que estavam pendentes no contexto da manipulação de letras, se correspondem com a classificação de Kuchemann (1980), sem esquecer os detalhes que os autores consideram significativos. Constatou-se que os alunos usam as letras, seguindo a classificação de Küchemann em seus primeiros quatro níveis; prevalece uma visão processual do sinal de igualdade (=) que enfatiza o computacional sobre o estrutural (SFARD, 1991, apud ANDONEGUI, 2009) no cálculo de resultados das operações; há dificuldades para admitir expressões abertas; e, em geral, os alunos têm deficiências na leitura de conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Estudantes. Conteúdos matemáticos. Mediação tecnológica.

INTRODUCCIÓN

Diversos trabajos en Educación Matemática muestran el interés por la manipulación del signo en el aprendizaje de las matemáticas, de ello dan cuenta, entre otros, los realizados por Kieran (1981) que trata del significado atribuido al signo de igualdad, el de Booth (1984) y Bednarz y Janvier (1992) sobre el sentido asignado a la letra y a las convenciones de la escritura, así como la indagación de Puig (2003) en relación con los signos, textos y sistemas matemáticos de signos. Todos ellos, resultan referencias importantes cuando se consideran en el ámbito del estudio de los procesos relacionados con el pensamiento algebraico en el que estos aspectos juegan un papel de extraordinaria relevancia, por ejemplo cuando se estima la transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

En el presente trabajo, además de los elementos descritos en el párrafo anterior, también se exploran otros procesos relacionados con el pensamiento algebraico como lo son el reconocimiento de patrones, las implicaciones generales en la manipulación del simbolismo propio de los objetos algebraicos, etc. En función de los hallazgos se establecen algunas conclusiones que confirman lo encontrado por reconocidos autores, así como lo que indican algunos planteamientos teóricos relacionados.

De tal forma que con su puesta en ejecución se tiene un panorama más claro en relación con algunos elementos que caracterizan el pensamiento algebraico de los educadores matemáticos en formación inicial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, lo que a su vez coadyuvará en la concreción de una investigación de mayor envergadura que trata de precisar las posibles relaciones entre los procesos que distinguen este tipo de pensamiento y la mediación tecnológica.

PROBLEMÁTICA DEL ESTUDIO

> Muchos de los errores que se producen en álgebra ocurren
> precisamente porque ésta suele enfocarse de
> forma abstracta y manipulativa de símbolos, sin prestar atención
> a los posibles significados". (PIMM, 2002, p.47)

Este trabajo se inserta en una investigación más amplia cuyo propósito fundamental consiste en construir un sistema categórico conceptual explicativo de las relaciones entre los Procesos del Pensamiento Algebraico y la Mediación Tecnológica. Su problemática se puede resumir de la siguiente manera:

- Los estudiantes para profesor de matemática presentan enormes dificultades para avanzar en la capacidad para asumir conceptos abstractos, el referente más cercano para éstos lo constituyen únicamente los objetos aritméticos (aritmetización del Álgebra).
- Existen marcadas limitaciones para la manipulación del simbolismo, tanto en lo que respecta al aspecto sintáctico (errores de sintaxis) como para desentrañar el objeto, concepto o proceso que éste se inserta.
- Limitaciones de los educadores para asumir el Álgebra superior como apoyo para el Álgebra escolar. Es decir, no hay una transferencia conceptual que apoye a los educadores en la didáctica de los objetos algebraicos del nivel básico.
- Ausencia de este tipo de pensamiento en los primeros niveles de escolaridad venezolana. No se promueven actividades que estimulen a reconocer patrones, a descubrir lo general en lo particular e inversamente, etc.
- Elevado número de estudiantes reprobados en las asignaturas del Área de Álgebra.

Preguntas de investigación

En relación con las investigaciones precedentes y los datos teóricos conocidos:

¿Cuáles son las características del Pensamiento Algebraico de los estudiantes para profesor de matemática del Instituto Pedagógico de Maracay, IPMAR?

COORDENADAS TEÓRICAS Y CONCEPTUALES DE REFERENCIA

Pensamiento algebraico

Inicialmente, se asume el término *pensamiento matemático* de una manera bastante flexible al considerarlo como las formas en que piensan las personas cuando se enfrentan a un contenido matemático específico (CANTORAL; FARFÁN; CORDERO; ALANÍS; RODRÍGUEZ; GARZA, 2003); en concordancia con estos autores se cree que este constructo no está enraizado en los fundamentos de la Matemática ni su práctica le pertenece a los matemáticos puros, sino que trata de todas las formas posible de construir ideas matemáticas. De igual manera, el pensamiento algebraico no está asociado a algún sector o grupo élite en particular. Entre algunos procesos mentales distintivos que lo caracterizan están la capacidad de revertir operaciones, la posibilidad de deducir lo general en lo particular, el reconocimiento de patrones, la interpretación y uso del signo de igualdad, la modelización y las interpretaciones que se hacen cuando se manipulan letras, etc. Desde un ángulo más flexible podemos afirmar que este tipo de pensamiento se hace presente cuando se manipulan ideas o procesos algebraicos de cualquier índole.

Como puede advertirse, aún cuando el pensamiento algebraico está relacionado con la manipulación de símbolos, ésta no es una condición definitoria, es decir, no es exhaustiva ni concluyente. Desde el punto de vista histórico, el uso del símbolo para representar objetos matemáticos corresponde a la última etapa en el desarrollo del Álgebra, se atribuye al francés Francois Viete (1540-1603) quien expuso su nuevo modo de escribir Álgebra en un documento titulado In artem analyticam Isagoge “Introducción al arte algebraico” (WUSSING, 1998) con lo cual contribuyó notablemente a abrir el camino hacia la unificación del lenguaje matemático.

Los primeros dos períodos en esta evolución son conocidos como retórico y sincopado. El primero data de la época anterior a Diofanto de Alejandría (250 D.C.), en la que se usa exclusivamente el lenguaje natural sin recurrir a algún signo. La etapa sincopada va desde Diofanto hasta finales del siglo XVI, se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos aún se desarrollan en lenguaje natural.

Como objeto de investigación ha sido motivo de diversos estudios (KIERAN, FILLOY, KAPUT) en los niveles iniciales y medios de escolaridad en los cuales se ha estudiado la apropiación del símbolo en Matemática, en particular los usos que se le dan a las letras, (cuyo antecedente más importante es el trabajo de KÜCHEMANN, 1981) también la interpretación y uso del signo de igualdad, el reconocimiento de patrones, la modelización, etc.

Signo, símbolo y objeto significado

Se admite que desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas existe una relación paradójica entre simbolismo y objeto significado, ello obedece a que para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él, tal como nos lo señala Pimm (2002, p.222) "en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo", de manera que la práctica es la de manipular y efectuar transformaciones en el signo que representa al objeto como una manera de acercarse a él. Desde este punto de vista adquiere una importancia suprema, pareciera que lo es todo, pero la realidad es que esto no es así puesto que el símbolo jamás sustituye al objeto, el cual existe en la abstracción del pensamiento con entidad propia y con independencia de su imagen concreta representada por su significante. Como se puede colegir esta situación puede suponer un obstáculo para el estudiante si éste no logra aprehender el objeto matemático que subyace en la simbolización.

De manera pues que en esta indagación resulta importante la noción de signo, éste tiene una naturaleza compleja que abordaremos brevemente. Sin embargo en este informe emplearemos indistintamente los vocablos signos, símbolos y significante.

Los signos son considerados en la misma perspectiva de Puig (2003) que, a su vez, sigue la misma dirección de Charles Sanders Peirce (1839-1914). Desde esta óptica tres características definen el signo: es una entidad triádica (significado, significante y cognición-interpretante[1]), no es estático y no es arbitrario (la relación triádica no es arbitraria).

Además los signos pueden ser de tres tipos: íconos (del griego e*ikon)*, índices (etimológicamente, *dedo que señala*) y símbolos. "Los íconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera" (PUIG, 2003, p.177). Mientras que "los índices no se parecen a los objetos, sino que los señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen" (ob.cit). Podemos decir entonces que una diferencia entre estos dos signos estriba en las sensaciones que activan en el interpretante, por un lado el ícono induce a la reflexión y, por otra parte, el índice hacia la acción.

En el caso del símbolo éste tiene que ver con lo convencional, es decir con lo acordado del signo, el ejemplo más emblemático lo constituye la bandera de un país. Los símbolos no siempre son intuitivos o sobrentendidos para todas las personas, sino que se requiere una preparación previa para su dominio (MORA, 2006).

Es interesante analizar lo que ocurre con una expresión algebraica. En ella convergen letras (índices) y los signos +, =, etc. (símbolos), y además suscita una interpretación global con lo cual es posible catalogarlas como íconos (PUIG, 2003). Peirce explica esto de la siguiente manera:

1 Este enfoque se diferencia del que plantea F. Saussure (1857-1913), pues en este último la noción de signo es diádica, significante/significado.

> Una fórmula algebraica es un ícono, que ha sido convertido en tal mediante las reglas de conmutación, asociación y distribución de los símbolos. Puede parecer a primera vista que es una clasificación arbitraria llamar ícono a una expresión algebraica; que podría igualmente o más adecuadamente ser considerada como un signo convencional [símbolo] compuesto. Más no es así. Porque una gran propiedad distintiva de los íconos es que mediante su observación directa se pueden descubrir otras verdades concernientes a su objeto que no son las que bastan para determinar su construcción. […]. Esta capacidad de revelar una verdad inesperada es precisamente aquello en que consiste la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo cual el carácter icónico es el predominante. (PEIRCE, 1987, p.263)

Como es posible entender, estos conceptos envuelven una discusión más amplia si se consideran a la luz de la didáctica de los objetos matemáticos. La anterior afirmación de Peirce puede tener relevantes implicaciones desde el punto de vista de la manipulación de los signos en la enseñanza del álgebra, tanto la escolar como la del nivel superior.

La matemática como lenguaje o el lenguaje de la matemática

Aún cuando una discusión tan controversial sobre si la matemática constituye o no un lenguaje escapa al propósito y alcance de este estudio se cree importante establecer algunos breves comentarios que contribuyan a precisarlo en el campo de la educación matemática. En primer lugar, se asume el concepto de lenguaje dado por Beyer (2003, p.147) como un "sistema de signos sujetos a una serie de reglas sintácticas dentro de un campo significativo que permiten la comunicación entre un emisor y un receptor en el ámbito de un sistema comunicacional". Una mayor aproximación hacia esta definición nos lleva a considerar metafóricamente un lenguaje como un sistema axiomático. En efecto, los términos no definidos los constituyen estos signos, así éstos pueden interpretarse como unidades de símbolos elementales o atómicos, y constituyen el alfabeto de ese lenguaje. Mediante reglas de sintaxis preestablecidas es posible hacer combinaciones de estos signos para formar nuevos símbolos de mayor complejidad, los cuales son llamados palabras (BEYER, 2003, p.148).

Un ejemplo de natural importancia para nosotros es el lenguaje algebraico. Éste se caracteriza por tener un alfabeto complejo en el que se hace frecuente el uso de letras de los alfabetos griego y latino para denotar los objetos matemáticos, los símbolos numerales con distintos significados (exponente, subíndice, coeficientes, etc.), signos de agrupación como los paréntesis, signos de mayor y menor, signo de igualdad, etc. En este contexto es muy frecuente que se presenten los fenómenos lingüísticos conocidos como sinonimia y polisemia. El primer caso se activa cuando un mismo objeto es representado de formas diversas, esto es, distintas notaciones pueden tener el mismo significado. Es lo que ocurre, por ejemplo, en el ámbito de los números reales con los siguientes símbolos, obviamente diferentes, ya que ellos representan el mismo objeto: $\{x \in R|\ -3 < x \leq 1\}$ y $(-3,1]$.

El segundo tiene que ver con el hecho de que una notación particular tenga asociada distintos conceptos. Por ejemplo, el símbolo (a, b) puede ser entendido como el máximo común divisor entre los enteros a y b, el producto interno entre los vectores a y b, el segmento de recta (intervalo) comprendido entre los reales$a$ y b, un punto del plano cartesiano, etc.

Similarmente ocurre con el signo de igualdad, pues éste sirve para expresar una identidad ó una ecuación. Por ejemplo, las siguientes igualdades no tienen la misma naturaleza: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $2a + 1 = 0$. Esto hace ver la relevancia del aspecto contextual como guía para la diferenciación.

Lo anterior plantea un escenario en el que "la interacción entre los/las participantes del proceso de aprendizaje y enseñanza tendrá éxito, en cuanto a la comprensión conceptual, si ambos sujetos o grupos de sujetos tienen domino del significado de la simbología con la cual están trabajando" (MORA, 2006, p.241). Sin embargo, para Bazzini (2007) existen evidencias de que la introducción y la manipulación de símbolos puede ser una causa relevante de las limitaciones del discente; también se ha afirmado que "la mayoría de los estudiantes tienen serias dificultades para desarrollar una comprensión adecuada del uso de las letras en Álgebra y lograr una capacidad aceptable para trabajar con ellas" (URSINI; ESCAREÑO; MONTES; TRIGUEROS, 2005, p.11).

Esta situación es explicada por los precitados autores en los términos siguientes:

> Si bien los alumnos, desde la escuela primaria, han tenido acceso al uso de letras en Matemática cuando trabajan, por ejemplo, con las fórmulas geométricas, no suele darse a las letras una interpretación algebraica. Más bien, se acostumbra a los alumnos a que las consideren como etiquetas que se refieren a entidades específicas o a la inicial de una palabra (por ejemplo, se suele usar la *b* para referirse a la 'base'; la *A* para el 'área'; *h* para la 'altura', etc.). (URSINI; ESCAREÑO; MONTES; TRIGUEROS, 2005, p.11)

Este hecho muestra las dificultades con las que se encuentran los alumnos al manejar el lenguaje matemático y específicamente el algebraico, y también es producto de que "tradicionalmente la enseñanza de las Matemáticas ha tenido un carácter más sintáctico que semántico, más basado en la aplicación de reglas que en la comprensión del significado" (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p.206). Es por ello que Thom (1973) (citado por PIMM, 2002) ha señalado que "el problema fundamental de la enseñanza de las Matemáticas consiste en la construcción de significados más que en la cuestión del rigor" (PIMM, 2002, p.32).

Consideraciones en torno al concepto de infinito

Pese a que se debe a George Cantor (1855-1915) "la consistencia necesaria al infinito actual para que sea considerado como un ente matemático" (HITT, 2003), este concepto no es del siglo XIX. De hecho, como señala este autor, la idea de infinito potencial como la posibilidad de ir más lejos está presente en los trabajos filosóficos y matemáticos elaborados por los griegos durante el siglo VI al II A.C.

Este concepto se entiende y se asume como de naturaleza compleja pues como objeto matemático en sí mismo históricamente ha sido siempre fuente de dificultades y paradojas (SACRISTÁN, 2003; HITT, 2003). Desde el punto de vista didáctico vale la pena considerar lo que expresa Fischbein (1979) (apud HITT, 2003, p.73), cuando señala:

> El infinito se presenta a nuestra intuición como contradictorio. La explicación del hecho es que los esquemas lógicos están adaptados de manera natural a realidades finitas. Para sobrepasar esa contradicción genuina, la inteligencia ha inventado el infinito potencial, o el infinito impropio en terminología de Cantor.

Además, según afirma Sacristán (2003, p.263) "existe evidencia de que muchos de los obstáculos epistemológicos que han existido en el desarrollo del concepto de infinito se manifiestan de manera similar como obstáculos didácticos para los estudiantes de matemáticas"). Estas consideraciones hacen relevante el concepto de infinito para el desarrollo de este trabajo; pues, además este concepto lo vemos inserto en el contexto de los procesos del pensamiento algebraico.

Para mostrar la complejidad a la que se hizo alusión anteriormente a continuación se expondrán algunos aspectos conceptuales descritos por Sacristán (2003) en relación con el concepto de infinito:

(a) Existencia de diferentes tipos de infinito

- Naturaleza dual del infinito: infinito potencial e infinito actual. En el primer caso se trata del infinito como proceso, como una posibilidad de cambio en el tiempo, supone movimiento, es dinámico, es experiencial dado que es posible relacionarlo con la idea de que siempre se puede sumar algo más. Por su parte el infinito actual se puede ver como un objeto matemático en sí mismo (como en el caso de los conjuntos infinitos), se interpreta como un todo más allá del tiempo, se puede visualizar como un proceso ya concluido.

Por ejemplo, podemos pensar los números naturales 1, 2, 3, 4,…, como generados a partir de 1 y formando sucesores sumando siempre 1 con lo que asumimos la perspectiva del infinito potencial (HITT, 2003). Pero, también podemos pensar en ellos como una totalidad {1,2,3,4,...}, y así, desde este enfoque del infinito actual, por ejemplo, es posible comparar este conjunto con el conjunto de sus cuadrados {1,4,9,16,...} y verificar que tienen la misma cardinalidad. Análogamente, en el contexto del Álgebra Lineal se hace uso del infinito actual al considerar espacios vectoriales infinitos dimensionales.

- Lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño: Por eso es que didácticamente, podemos preguntarnos, ¿qué se quiere decir cuando se escribe la igualdad $\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x-2} = \infty$?

- Conjuntos infinitos de diferente potencia: Por ejemplo, los conjuntos N, Z y Q

tienen el mismo infinito como cardinal, que se denota con la letra hebrea $\aleph_0$ (aleph subcero), mientras que los números reales (*R*) y los irracionales (*I*) no siendo numerables tienen la misma cardinalidad infinita.

(b) Importancia del contexto y la situación matemática: El infinito se hace presente en diversos contextos matemáticos afectando la interpretación que se tenga de éste.

(c) Procesos iterativos y recursivos: El infinito se manifiesta como la posibilidad de repetir un algoritmo recursivo. Un ejemplo significativo lo constituyen los objetos fractales como el resultado de un proceso recursivo (potencialmente infinito).

(d) Naturaleza del objeto matemático: Aquí subyacen dos ideas matemáticas contrapuestas como es lo discreto (números naturales y cardinalidad) y lo continuo (números reales y medida).

METÓDICA

La investigación constituye un estudio exploratorio que se enmarca en el campo de la Educación Matemática, tal y como la concibe González (1999), específicamente en el área de formación inicial de educadores matemáticos.

Procedimiento

Se concibe el procedimiento como el conjunto de estrategias asumidas y seguidas por el investigador con la expresa intención de recabar los datos de interés investigativo. En este sentido un aspecto muy importante es el escenario que permite la generación de tales datos y su correspondiente acopio, estos escenarios pueden ser naturales o artificiales. En el primero es poca o nula la participación del investigador más allá de la propia acción de recaudación, mientras que en el segundo se crean las condiciones para que se active la información de interés.

De tal manera que en este apartado se recoge la estrategia puesta en práctica con el fin de obtener los insumos necesarios en relación con la aproximación al pensamiento algebraico de los estudiantes para profesor de matemática.

En primer lugar se procedió a diseñar y elaborar un Instrumento que se denominó EVAPAL (Evaluación del Pensamiento Algebraico). Éste consistió de 20 preguntas abiertas. Para la validación se elaboró otro instrumento que permitiera a los evaluadores hacer las recomendaciones u observaciones que estimaran pertinente al respecto; luego se recurrió a la entrega de los dos instrumentos por vía correo electrónico a 5 expertos del área, Dr. Julio Mosquera, Dra. Encarnación castro (España), Dra. Yolanda Serres, Dr. José Ortiz y Dr. Mario Arrieche. Se obtuvieron las respuestas de tres de ellos.

Trabajando en paralelo se procedió a conseguir un conjunto de respuestas institucionales para los planteamientos del Instrumento, esto se hizo contactando personalmente y vía correo electrónico a varios profesores de Matemática (6 en total) con el fin de que expusieran sus respuestas como expertos en el contenido dichas respuestas fueron depositadas en un cuadro tipo resumen.

Tomando en cuenta el punto de vista de los expertos en el área, reflejado en las observaciones y recomendaciones hechas al Instrumento, se procedió a su aplicación. Es importante aclarar que en la selección de los grupos de aplicación no intervino ningún análisis previo de tipo estadístico ni muestral, sólo la condición de ser estudiantes de un curso del primer semestre, y además se seleccionaron las 2 secciones cursantes de la única asignatura del área de Álgebra que ofrecía el Departamento para ese período.

De acuerdo a lo anterior fueron 117 los sujetos participantes en la investigación los cuales quedaron estructurados de la siguiente manera: dos secciones (501 y 561) del Curso Sistemas Numéricos (correspondiente al área de álgebra), 2 secciones (511 y 561) de alumnos de nuevo ingreso, así como 2 secciones de alumnos rezagados y repitientes (secciones 512 y 562).

Luego, se procedió a establecer contacto con los docentes administradores de estas secciones, y se pidió su colaboración en cuanto al tiempo oportuno y la dinámica general para la aplicación del Instrumento en los horarios respectivos.

Una vez obtenidas las respuestas se pasó a la fase de digitalización de las mismas en formato matricial. En total fueron 117x20=2340 las respuestas procesadas.

Procedimiento analítico de los resultados obtenidos con la aplicación de la EVAPAL

El análisis aplicado fue del tipo comparativo en relación con las respuestas dadas por los expertos, éstas se constituyeron en una especie de banco institucional de respuestas. Se compararon las contestaciones de los estudiantes a fin de establecer los errores y aciertos cometidos en la resolución de problemas y/o ejercicios de cada ítem. También el análisis fue confirmatorio de las teorías y/o hallazgos precedentes.En las respuestas obtenidas se estuvo pendiente de aquellas que, en relación con la manipulación de letras, estuvieran en correspondencia con la clasificación de Kuchemann (1980); además, la indagación tuvo carácter exploratorio, de acuerdo con esto se estuvo atento a todas las características, tanto de fondo como de forma, de las respuestas sin importar si eran erradas o correctas, es decir cualquier detalle significativo para el investigador fue considerado importante para el examen.

Los hallazgos se presentan a continuación:

Confusión en la construcción de un concepto

Resulta significativo que ante el ítem que pedía “definir ecuación”, de 117 estudiantes sólo 68 lo respondieron, lo que equivale al 58,12 % de los participantes. De este porcentaje, únicamente 17 alumnos (25%) utilizaron el término igualdad en la definición. Por ejemplo, las siguientes son algunas de las respuestas obtenidas: "*es una igualdad donde vamos a buscar el valor de una variable. x+2=3*", *es una igualdad en la cual se debe hallar una o mas incógnitas 2X+4=0*", "*es buscar el valor de la variable o incógnita que satisfaga la igualdad 3x=9"*.

Además, estos ejemplos no puede pasar desapercibidos, pues en ellos se materializa una confusión reiterada muchas veces entre el concepto y el proceso, o mejor dicho entre concepto y algoritmo. Una muestra de esto sucede cuando se interroga a los estudiantes acerca del concepto de mínimo común múltiplo, y la respuesta conseguida es que consiste en seleccionar, de los factores primos de una descomposición de enteros, los factores comunes y no comunes con su mayor exponente y multiplicarlos. También ocurre en el álgebra superior en torno al concepto de independencia lineal, en la mayoría de los casos se recurre a escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores que se dan y la meta trazada es conseguir que los escalares usados sean todos ceros.

En ambos casos, el concepto es difuminado en un algoritmo el cual lo envuelve. Lo dicho se ve más claramente en la última respuesta a través de la expresión *"es buscar…"*.

Otras definiciones que despertaron curiosidad es la de matriz como: "*conjunto de números representados en filas y columnas"*, "*conjunto de operaciones agrupadas en formas de columnas o filas encerradas entre (ó]", "Matriz= Conjunto de ecuaciones entre filas y columnas"*. El estudiante, de forma errónea, introduce el sustantivo conjunto y define matriz únicamente por su apariencia visual.

Lo anterior muestra que en algunos casos existe evidencia de un descuido que obvia lo fundamental en la elaboración de los conceptos de los objetos algebraicos igualdad y matriz.

En cuanto a la definición de vector, ninguna respuesta incluyó este objeto como un elemento de un espacio vectorial. Resultó interesante la reiteración de la interpretación del vector como "*segmento de recta que posee módulo, dirección y sentido*", que, sin ser un planteamiento equivocado enfatiza únicamente su condición física. Consideramos importante estudiar hasta qué punto esta concepción del objeto vector puede constituirse en un obstáculo epistemológico (BACHELARD, 2007, p.15) para su compresión desde el punto de vista del álgebra superior.

Interpretaciones del signo de igualdad (=)

Interpretación aritmética

En lo que respecta a la interpretación del signo de igualdad (=) se puede afirmar, en términos generales, que su carácter polisémico es fuente de múltiples confusiones en los estudiantes. Se confirma el planteamiento de Vergnaud y otros (1987) en cuanto a la preeminencia de un empleo de tipo aritmético[2], esto se desprende del análisis a las

2 Se refiere a la interpretación del signo igual como sinónimo de efectuar, resolver, operar, etc.

respuestas al ítem que pedía corregir la igualdad "7+4=9"[3], éste fue respondido por 77 estudiantes, y de esta cantidad, 56 personas (casi el 65 %) lo hicieron con el argumento de que 7+4=11. Esto confirma el trabajo Kieran y Filloy (1989) en cuanto a que los estudiantes asumen el signo de igualdad como sinónimo de hacer algo predominando la tendencia a mantener interpretaciones aritméticas. Igualmente corrobora que en los objetos aritméticos habitualmente predomina la concepción procedimental[4] (ANDONEGUI, 2009), tal como señala este autor, aquí el énfasis es puesto en lo computacional, en el cálculo del resultado de las operaciones.

Esta interpretación aritmética del signo de igualdad se contrapone al uso algebraico de éste como símbolo de relación de equivalencia entre los dos objetos colocados en los lados izquierdo y derecho de él (VERGNAUD, 1987) descuidando así su faceta algebraica como es su aspecto relacional, por ejemplo 7+4=(7+2)+2. En ésta última, la igualdad funciona como un espejo para los objetos, éstos, pese a su diferencia sintáctica, son los mismos en ambos lados, en este caso a la derecha se interpreta 9 como 7+2, mientras que a la izquierda 4 es visto como 2+2, por supuesto existen otras potenciales maneras de entender la corrección como las que se describen en el punto 2 al pie de la página.

Lo anterior supone percibir lo estructural del signo de igualdad en el que lo fundamental es la perspectiva de totalidad. En ésta la igualdad 7+4=9 es vista no como un proceso que invita a operar, sino como un objeto en el cual es posible conseguir relaciones entre los números 7, 4 y 9, y entre éstos y la operación de adición, de tal manera que se puedan captar "las posibles transformaciones que permitan pasar a expresiones aritméticas equivalentes" (ANDONEGUI, 2009).

Interpretación procedimental

En la misma dirección de lo anteriormente planteado se encuentra la pregunta: ¿Cuál es el valor de x?, si 7.7.7.7.8 = 7.7.x.7. La respuesta correcta a esta pregunta se puede obtener de varias maneras, sin embargo, a través de la visión de totalidad, consiguiendo relaciones entre los números involucrados y la operación multiplicativa se optimiza la respuesta y se minimiza la posibilidad del error. Una visión procedimental del signo de igualdad se consigue en las siguientes respuestas, obsérvese la ausencia total del planteamiento de relaciones con lo cual se incrementa las posibilidades de equivocación:

3 Obsérvese que haciendo una interpretación relacional (ANDONEGUI, 2009) del signo de igualdad se pueden conseguir diversas correcciones tales como (7+4)-2=9 ó 7+4=2+9, 7+4=9-2+4, etc.

4 Sfard (1991), citado por Andonegui (2009), afirma que muchos conceptos matemáticos pueden ser vistos como objetos y como procesos. El primer caso, se corresponde con una visión de totalidad (concepción estructural) y tiene las características de actual, estática, instantánea e integrada; mientras que en el segundo (concepción procedimental) es potencial, dinámico, secuencial y desglosado en detalles.

7.7.7.7.8= 19.208 *7.7.7= 343* *7.7.7.56= 19.208 $\rightarrow$ o lo que es igual 7.7.7 (7.8)= 19.208*	*Sabemos que 7.7.7.7.8=19.208 para hallar el valor de la "X" en el otro miembro solo multiplique los factores faltantes que son 7y8, asi el valor de X=56*	$7^4.8 = 343.56$ 19208 = 19208 *x=56*	*224=343.x* $\frac{224}{343} = x$ $x = \frac{224}{343}$

Mientras que en el siguiente cuadro se recogen algunas respuestas que pueden ser vistas como obtenidas a partir del establecimiento de relaciones:

7.7.7.7.8=7.7x.7=n7.8=x =n56=x	*7.7.7.7.8=7.7.x.7* 56=x *X=56*	*X=7.8=56*	*7.8=56*

Confusión con el signo de implicación lógica

Otra evidencia hallada y considerada importante se refiere a la confusión que mostraron algunos estudiantes con el significado, y por ende con el correspondiente uso, de los signos de igualdad (=) y el de implicación lógica (= >). En el siguiente cuadro se exponen los 3 ejemplos específicos que se consiguieron:

$8 + (8.2) \rightarrow 8 + 16 = 24$	$= 8 + (2.8) \Rightarrow 8 + 16 \Rightarrow 24$	$a^2 + b^2 \Rightarrow (a+b)^2$

Con este manejo irregular de ambos símbolos se expone una notable limitación relacionada con el lenguaje algebraico. En efecto, el signo de implicación lógica (= >) permite enlazar enunciados del tipo proposicional colocados a ambos lados de él, y en sí mismo tiene el valor de una proposición; mientras que el signo de igualdad también tiene un valor proposicional, pero los planteamientos colocados a su derecha e izquierda no tienen sentido para proposiciones.

Reconocimiento de patrones

El ítem número 2.5 planteaba: ¿Cuál es el valor de $Z + X$?, sabiendo que los números 61, 59, 56, 52, z, y, x, se generaron siguiendo un cierto patrón de regularidad. Como se puede ver éste exigía, en primer lugar, reconocer el patrón que seguían los números en la sucesión, y para responder satisfactoriamente la pregunta se debía efectuar la suma. Se observa que los números en esta serie se obtienen restando consecutivamente 2, 3, 4, 5, 6 y 7, de tal manera que la sucesión viene dada por 61, 59, 56, 52, 47(z), 41, 34(x). En consecuencia z+x=47+34=81.

De 117 estudiantes, solamente 54 emitieron respuesta, esto es el 46,15% de los participantes, mientras que los 63 que no respondieron esta pregunta corresponden al 53,85%. Para el análisis se tomó en cuenta el efectivo reconocimiento del patrón para cada caso, es decir, la respuesta se consideró correcta si se consiguió z=47 y x=34, obviando cualquier detalle relacionado con el paso dedicado a la operación de adición. En el siguiente cuadro se recogen los resultados discriminados por grupo.

	Reconoce	No reconoce
A	11	4
B	5	7
C	0	2
D	2	2
E	1	6
F	7	7
Total	26	28

Como se puede observar, de los 54 alumnos que respondieron esta pregunta sólo 26 lo hicieron acertadamente. Esto indica, según criterio de los autores, un bajo nivel en el proceso del pensamiento algebraico relacionado con el reconocimiento de patrones.

Uso e interpretación de las letras

Las categorías de Küchemann

La investigación de Küchemann (1980), realizada en los inicios del PME, (*Psicology of Mathematics Education*) y luego del tercer Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 3), constituye una referencia obligatoria para cualquier experiencia de indagación relacionada con la manipulación de las letras en didáctica de las matemáticas. Esto es así por varios aspectos, entre los cuales está el rigor con el que se llevó a cabo, la magnitud de los sujetos que involucró tal estudio así como la profundidad de sus conclusiones. Este autor estableció seis categorías en el uso de las letras, las primeras tres pueden considerarse indeseadas, mientras que las restantes debieran ser un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas. Las categorías son: letra evaluada, letra no considerada, letra considerada como objeto concreto, letra considerada como incógnita específica y letra como variable. En el presente estudio se confirmó la clasificación de este autor en relación con el uso e interpretación que se le dan a las letras.

Letra evaluada

Ante el ítem ¿Qué significa la expresión *1500L + 2000S* ?, sabiendo que se compraron *L* lápices a Bs. *1500* cada uno y *S* sacapuntas a Bs. *2000* cada uno, las siguientes son algunas de las respuestas conseguidas: *"L=1500, S=2000 y 1500L+2000S significa la suma de ambos productos", "2.750.000+4.000.000=6.750.000 Bs."*[5], *"Que se invirtieron 2.250.000bs en lápices y 4.000.000bs", 1500(1500)+2000= (2000)=(1500)^2 + (2000)^2*

5 En el registro aparece expresamente la multiplicación de 1500 por 1500, aquí se escribe tal como se escribió el resultado.

”, etc. En la clasificación, de Küchemann (1980), señala Palarea (1998), lo anterior se corresponde con la categoría número uno (1) de letra evaluada. Aquí el estudiante, para eliminar la incertidumbre que le ocasionan las letras, le asigna un valor numérico desde el principio, evitando de esta manera trabajar con algo que él desconoce.

En los siguientes planteamientos se recogen otros ejemplos de la misma categoría, en este caso la pregunta del ítem es, ¿A qué es igual *a*+*b*+*c* ?, si se sabe que *a*+*b*=9. Algunas de las respuestas que demuestran la asignación de valores particulares fueron: *“a y b pueden ser números enteros que cumplan con la condición a+b=9. Ejemplo4+5=9”, “a=4, b= 5, c=0*”, “*5+4=9+2=11 es decir las letras son números enteros que están sumando*”, *“a y b son números reales los cuales su suma da igual al entero 9. Ejm: 6+3=9 o 4,5+4,5=9”, “9+3= el valor de 3 sería 3 ya que la suma de a+b es (5+4)”*,

Letra no considerada

En la categoría número dos de Küchemann (1980), letra no considerada, se insertan las siguientes respuestas: *“Que se suma el valor de los lápices y sacapuntas, 1500+2000=3500 Bs”, “3500L”, “3500 un lápiz y un sacapunta”, “1500+2000=3500”, “1500 +2000= 3500 una inversión negociable”, “1500 es el costo de los lápices, 2000 es el costo de los sacapuntas, adición*”. Estas respuestas indican que no se tomaron en cuenta las letras, esto es la letra es ignorada o, en el mejor de los casos, se reconoce su existencia sin darle significado, con lo cual se asume que la letra está ahí pero es posible prescindir de ella.

Al igual que en el caso anterior, también se consiguieron las siguientes respuestas en las cuales se muestra el desconocimiento de la presencia de la letra: “*Depende de el valor de c porque si a+b=9 entonces será 9+c= 9c*” , *“a+b+c= si a+b es = 9 entonces quedaría 9.c* $\in \Re$”.

Letra considerada como objeto concreto

Es una práctica común en matemática establecer un vínculo entre el objeto y el símbolo empleado para su representación, de tal forma que ésta última resulte lo menos arbitraria posible, un ejemplo de esto es la costumbre de utilizar la letra *l* para la longitud, pues “proporciona un tipo de representación algebraica con un componente mnemotécnico para la interpretación de la variable. Proyecta la notación matemática en el idioma del lector y da pie a la pretensión de que las matemáticas están escritas en ese idioma” (PIMM, 2002, p.185). Sin embargo, como nos señala este mismo autor “no hay por qué adherirse sin más de manera rígida a este sistema mnemotécnico de denominación. Al contario, la asignación de x e y a muchas variables es convencional, con independencia de los referentes” (PIMM, 2002, p.189).

Precisamente en la exploración efectuada se hallaron evidencias de que las letras son tomadas en cuenta por lo que sugiere su expresión literal y no por su significado contextual lo que, según Palarea (1998), se inserta en la categoría número tres de letra entendida como objeto concreto, en la clasificación de Küchemann (1980). A continuación se muestran algunos ejemplos de respuestas: "*L= lápices, S= sacapuntas. Cada lápiz vale 1500 y cada sacapunta vale 2000", "1500 lápices+2000 sacapuntas", "Un lápiz+ un sacapunta", "1500 por cada lápiz y 2000 por cada sacapuntas", "Que se tiene 1500 lápices y 2000 sacapuntas", "Que gastaron 1500 bs en lápices y 2000 bs en sacapuntas", "Que se compraron 150 lápices y 2000 sacapuntas", "Que se tiene 1500 lápices y 2000 sacapuntas.* Esto es indicativo de que la letra se contempla como un signo taquigráfico que denota el objeto en sí mismo (lápiz y sacapuntas), esta manera de reducir el significado abstracto de las letras a objetos particulares imposibilita al estudiante distinguir entre los objetos concretos y las cantidades específicas de esos objetos, en este caso las letras L y S indicaban, respectivamente, la cantidad de lápices y sacapuntas y no los lápices y sacapuntas como objetos específicos.

Letra considerada como incógnita específica

Con respecto a la categoría número cuatro de Küchemann (1980), correspondiente a la letra considerada como incógnita específica, se debe señalar que ésta representa un estado satisfactorio de su uso. Lo que caracteriza este nivel es que se opera con la letra directamente, aun cuando se está conciente de que la misma es un número desconocido, pero con atributos específicos En este sentido algunos participantes dieron demostración de estar ubicados en esta categoría. Se insertan aquí algunas de las respuestas que justifican este señalamiento: *"Significa el costo total de la compra ya que se tiene el costo de cada lápiz y de cada sacapuntas", "La suma de la cantidad en Bs. de los productos comprados", "Significa la suma total de gastos en la compra de los artículos según S y L", "Significa el total gastado en la compra", "Que al multiplicar la cantidad de lápices (L) con 1500 y la cantidad de sacapuntas (S) por 2000 se obtendrán dos valores. Sumándolos da el precio total gastado.", "Representa la cantidad en Bs que habría que pagar para comprar 1500 lápices y 2000 sacapuntas", "La adición de L lápices a Bs. 1500 y S sacapuntas a Bs. 2000 c/u", "El costo total a pagar según sea el numero de lápices y sacapunta a comprar*", etc. Por supuesto, todas éstas son respuestas correctas, esto indica que este nivel es el deseable para estos estudiantes.

Otras dificultades con las expresiones algebraicas

Reconocimiento y aceptación

Además, se encontraron dificultades para reconocer y aceptar expresiones abiertas tales como 3+a+a+a+10, lo cual coincide con lo expuesto en el trabajo de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005). En este sentido, la expresión es vista como incompleta por algunos estudiantes quienes no aceptan la falta de clausura de ésta (SOCAS; CAMACHO; HERNÁNDEZ, 1998), el conocimiento expuesto aquí, el cual es cierto en contextos numéricos (aritméticos), es que el signo + (más) uniendo dos "cosas" genera una tercera "cosa". Otro ejemplo que permite apuntalar tal aseveración se encuentra en el ítem que pedía escribir "un trinomio cuadrado no perfecto", ante el cual algunos procedieron a escribir una ecuación cuadrática, por ejemplo: $x^2 + 2x + 1 = 0$.

También se puede observar en la respuesta a la pregunta ¿A qué es igual $a + b + c$?, si se sabe que $a + b = 9$. Algunos de los hallazgos son los siguientes: "*(a+b)+c=o, 9+c=0, C=-9. Por lo tanto a+b+c es igual a cero*", "$a + b + c = x$, $9 + c = x$, $9 + x = c$ ". Esto muestra la casi necesidad que tiene el estudiante de igualar la expresión algebraica, o bien a cero ó a la letra x, con lo que obtiene una igualdad que le es familiar, esto evidencia que no asume como válidas las expresiones "abiertas" $x^2 + 2x + 1$ y a+b+c. En el caso de esta última hay una doble complejidad pues la respuesta esperada es otra expresión abierta tal como 9+c.

Similarmente ocurre con el ítem que pedía escribir los primeros tres términos de la sucesión definida por $4n - 3$, el cual fue respondido por 35 de los 117 estudiantes. Las siguientes son dos respuestas halladas:

4n-3=0 4n=3 N=3/4	4.1-3=0 4.2-3=0 4.3-3=0

En el primer caso, la persona no sólo no percibe que está en presencia de una sucesión, sino que toma la expresión dada sin contexto alguno, la cierra igualándola a cero y resuelve la ecuación. El segundo alumno se diferencia, pues sí toma en cuenta que debe asignar los valores 1,2 y 3 a la variable, pero análogamente cierra la expresión igualándola a cero. Este análisis confirma lo que establece Filloy (1999) en cuanto a que "el sujeto completa la expresión, a fin de poder leerla en contextos que le son familiares" (p.34)

Lectura y comprensión

Por otra parte, se detectaron debilidades en la lectura de contenidos matemáticos y por ende en la comprensión de los mismos, esto se manifestó muy concretamente en el ítem que pedía traducir al lenguaje natural la proposición $|-x| = |x|$ lo que algunos participantes hicieron como, *"valor absoluto de menos equis es igual al valor absoluto de equis"*, o *"el valor absoluto de* -x *es igual al valor absoluto de x",* lo cual es una muestra de una lectura literal que le impide al estudiante comprender lo sustantivo de la propiedad ya que esta forma de enunciar la proposición no permite la aprehensión de su contenido fundamental[6]. Con esta misma proposición se consiguió: "*Tal que –x es igual x*, "*Tal que –X es igual a X positiva*", "*Menos x es igual a x*" los cuales reflejan un deficiente manejo del simbolismo matemático. Obsérvese que en los dos primeros casos la expresión *tal que* es colocada de manera aislada, desarticulada, sin una comprensión de que la misma significa una condición que debe cumplir un objeto matemático particular del que ya se ha hecho mención anteriormente.

6 Un tipo de lectura eficiente sería, por ejemplo, son iguales los valores absolutos de cualquier número y su opuesto.

Los dos siguientes se caracterizan por obviar el símbolo del valor absoluto con lo que se invisibiliza su concepto como función real de variable real con interesantes propiedades, obviamente esta lectura es poco comprensiva pues vacía la carga semántica del signo como medio para la transmisión de ideas matemáticas.

En la misma dirección se encuentran los siguientes ejemplos en relación con el ítem de lápices y sacapuntas: *"1500 multiplicado por L mas 2000 multiplicado por S", "Un factor más otro factor o el producto de dos números más el producto de otros dos números", "Una suma", "Que la suma de los valores da como resultado un valor directo", "Una suma de operación", "Que es una suma de números reales por ejemplo a+b", "La suma algebraica: donde L=nº de lápices y Donde S=nº de sacapuntas", "No puede ser una adición porque tiene distintos elementos",* "*Una operación matemática*", etc.

Se destacan estos enunciados no porque denoten algún estado de confusión o de error por parte del estudiantado, sino por la simplificación que en ellos se hace de la expresión algebraica 1500L+2000S; es decir, estos planteamientos son demostraciones de que la anterior expresión se ha leído literalmente, se manipula un signo "vacío de contenido, prestándole escasa o nula atención a los significados de los mismos" (BEYER, 2006, p.145) perdiéndose así el contenido fundamental que en ella subyace, que en este caso, significa el costo total de lo invertido en comprar L cantidad de lápices y S cantidad de sacapuntas a Bs. 1500 y 2000 cada uno respectivamente.

Esta insuficiencia lectora probablemente está relacionada con la competencia escritural, en este sentido resulta emblemático la siguiente redacción *"es una cantidad de elementos sin números"* el cual aparece en el ítem que pedía escribir los conjuntos vacío y con infinitos elementos.

Lenguaje natural y simbolismo matemático

Signo de elemento opuesto "-"(menos)

En algunos casos el signo "-" (menos) fue tomado como indicador del carácter negativo de un número. Un ejemplo lo tenemos al intentar escribir en lenguaje natural la proposición $|-x| = |x|$, en la que se encontró el siguiente enunciado: "*Falso el valor absoluto de un número no puede ser negativo*", lo que demuestra que, efectivamente, se está interpretando $-x$ como un número negativo. En este caso, el estudiante no es capaz de entrar en conciencia de que si, por ejemplo, $-x = 4$, entonces $x = -4$, y la relación que él tiene en mente es totalmente contraria a lo que sucede realmente.

Aún más, esta última interpretación puede pasar inadvertida en la siguiente respuesta: "*el valor absoluto de un número negativo es igual al valor absoluto del número positivo*", que es cierta si se pasa por alto que excluye al número real cero. Pero lo más significativo, y que puede resultar muy engañoso aquí, es el riesgo de que tal traducción se haya realizado tomando a $-x$ como indicador de un número negativo y a x como un número positivo.

El ítem 4 tenía como propósito indagar en torno a las habilidades para traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico, concretamente se pidió simbolizar el siguiente planteamiento: *El cuadrado de un número, aumentado en uno, no supera el doble del mismo número, disminuido en tres*. Ante éste hay que señalar que para evitar confusión en la interpretación se colocó intencionalmente la expresión *"aumentado en uno"* como una oración intercalada, e igualmente se colocó la última coma para separar la expresión "*disminuido en tres*" de tal manera que no resultara ambivalente su escritura correcta como $x^2 + 1 \leq 2x - 3$. Se señala que sólo 3 estudiantes escribieron la respuesta correcta. Otros se aproximaron al escribir $x^2 + 1 < 2x - 3$ lo que se explica pues no consideran la alternativa igual como una opción para la negación de la propiedad de superar o estar por encima de.

Sin embargo, otra aproximación interesante es $x^2 + 1 = 2x - 3$, pues es todo lo contrario del último caso, en ésta es tomada la igualdad como única alternativa para negar ser mayor que, obviando la posibilidad de ser menor. Estos hallazgos evidencian un empirismo en la manipulación del concepto *ser mayor que*, dado que éste no se contextualiza ni es visto a la luz de la propiedad de tricotomía válida para los números reales.

En otros casos se consiguen: $(n + 1)^2 < 2n - 3$, $x^2 + 1 \leq 2(x^2) - 3$, $x^2 + 1 = 2(x^2 + 1) \neq 3$, $x^2 + 1 \neq 2x^2 -3$ las cuales destacamos porque, pese a estar mal escritas pues no se corresponden con la expresión dada, creemos que son fácilmente corregibles. Afirmamos esto dado que también existen evidencias de una palpable carencia en la habilidad para pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico. En algunos casos se hace un ensayo con expresiones concretas tales como: $2^2 + 3$, $2^2 + 1 = 3$, $a^{2+1} = \frac{a}{3}$, 3^{2+1} -6 -3, además hubo quien escribió *si lo supera*, lo que demuestra una ausencia de comprensión no sólo del enunciado, sino de la instrucción dada.

Interpretación del infinito

La pregunta 9 pedía escribir los primeros tres términos de la sucesión $4n$-3. Afirmamos que en ésta se pone en juego la habilidad para manejar el infinito potencial en su forma discreta. En efecto, se debe reconocer el carácter dinámico de tal expresión, supone la posibilidad de ir más allá, de dar un paso más. Lo contrario es verla como una expresión estática, esto es, con un sentido acabado que no incita al movimiento. Es lo que ocurre cuando se hace $4n$-3=0, se interpreta la sucesión como una ecuación, perdiéndose así su principal característica distintiva.

De los 35 estudiantes que la respondieron sólo 22 consiguieron acertar. Aún cuando esta cuantificación nos revela una dificultad para el manejo de expresiones que involucren el concepto de infinito, no es suficiente para especular en relación con la concepción que tienen los estudiantes del infinito potencial y el infinito actual, creemos que los hallazgos no son concluyentes, por lo que ameritan una mayor profundización.

Interpretación de la fracción

Para resolver el problema *¿En cuánto tiempo se llenará el resto de una botella?, sabiendo que 3/4 de ella se ha llenado en 2 minutos*, se requiere interpretar la fracción como parte de un todo. En este caso el todo viene dado por la botella que ha sido dividida en cuatro partes imaginarias, cada parte representa $\frac{1}{4}$ de la botella, y de acuerdo a los datos las primeras 3 de las cuatro partes se llenan en 2 minutos. Aquí conviene destacar que lo que se pide es el tiempo en que se llenará la última parte.

En primer lugar, llamó la atención la ausencia de algún dibujo que sirviera de referente, es decir los intentos por resolver el problema no contemplaron la elaboración de un modelo de referencia conceptual como lo es el dibujo, por ejemplo de un listón, perdiendo así la posibilidad de un modelo concreto en el cual abstraer los datos del problema.

Otro detalle es el relacionado con la interpretación de la expresión *el resto de la botella*, el cual en algunos casos no se tomó en cuenta, al no contemplarla lo que se hace es considerar el tiempo total de llenado. Otras respuestas tales como *10 minutos*, *5 minutos*, son dadas de forma aislada, lo que impide un mayor análisis, sin embargo llama la atención que se descuida un aspecto importante en la resolución de un problema como lo es la evaluación de la respuesta, en este caso una reflexión tal permitiría visualizar la equivocación pues el tiempo de llenado de ese cuarto debe ser menor que el que se empleó para llenar la primera parte.

Otras respuestas que llamaron la atención son las siguientes: *No se porque de cuanto litros es la botella, Depende del tamaño de la botella (litros), Depende de cuantos litros tenga la botella*, éstas constituyen una muestra de una marcada debilidad para la compresión del enunciado del problema y por ende de su resolución.

Notación referida a la teoría de conjuntos

La pregunta 10 del instrumento EVAPAL pedía definir a través de una propiedad, y con la notación de llaves, el conjunto vacío y un conjunto con infinitos elementos. Cabe destacar el carácter específico de la pregunta, se redactó de tal manera que no permitiera definiciones generales, ni a través de relaciones conjuntistas. Por ejemplo, se trató de evitar definiciones del conjunto vacío tales como, el conjunto que carece de elementos, o conjunto de cardinal cero, o como la intersección de un conjunto con su complemento, etc.; en el caso de un conjunto con infinitos elementos se descartaba la alternativa de definirlo como aquel conjunto que se puede poner en correspondencia biunívoca con cualquiera de sus subconjuntos, etc.

Se trató de indagar en relación con el manejo del simbolismo propio de la teoría de conjuntos, lográndose establecer las siguientes categorías:

(a) Define correctamente el conjunto vacío a través de una propiedad: Se consiguieron las cuatro únicas siguientes respuestas correctas: $A = \{x \in \Re\ x^2 + 1 = 0\}$ y $A = \{x \in N \mid x = -x\}$, $A = \{x \in z \mid x^2 = -3\}$, a = {*x/x* es real y x2 < 0}

(b) Define correctamente un conjunto infinito a través de una propiedad: Dos respuestas correctas $S = \{x \in R \mid x \geq 1\}$ y $\{x \in \Re \mid x \geq 5\}$.

(c) Señala el conjunto vacío sin dar alguna propiedad que lo defina: Este tipo de respuesta fue notable por su elevado número: $A = \{\ \ \}$

(d) Señala un conjunto de cardinal infinito sin dar alguna propiedad que lo defina: $A = \{0,1,2,3,4,....., +0\}$, $N = \{0,1,2,3,....\}$, R

(e) Intenta definir un conjunto infinito, pero señala uno de cardinal finito: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $A = \left\{x \in \Re \,/\, \frac{x}{3} = 1\right\}$, $A = \{0,1,2,3,....,n\}$.

(f) Otros: Confusión en el manejo del simbolismo para operar con conjuntos, se señala una propiedad conjuntista de manera aislada, se recurre al símbolo de conjuntos conocidos, se cometen errores en el uso del lenguaje algebraico (errores en la sintaxis): Aquí se ubican los siguientes ejemplos:

$A = \{x/X \in N^*\}$, $A = (R)$, $B = x+1, x+2, x+3, ...x+z...\}$, $\{R\}$. $A+B=\{A \in B = \phi\}$.

También se confunden los conjuntos vacío y el conjunto cuyo elemento es el conjunto vacío al escribir, $\phi = \{\phi\}$.

Llamó la atención que así como el conjunto vacío es tomado literalmente como $\{\ \ \}$, igualmente se trató de extrapolar este hecho con el símbolo ∞ y un conjunto con infinitos elementos, esto se desprende de las respuestas siguientes: $[-\infty, \infty^+]$, $A=\{x|-\infty< x<\infty\}$, $\{-\infty ,....,+\infty\}$, $a=\{\infty\}$, $\{-\infty , \infty\}$

Como se puede ver la anterior categoría señala una clara limitación para operar con la simbología relacionada con la teoría de conjuntos.

A MANERA DE CONCLUSIÓN Y/O REFLEXIÓN

En lo concerniente a la aprehensión y comprensión de objetos, procesos y conceptos propios de la matemática se cree que existe una vinculación entre el desarrollo del lenguaje natural y el lenguaje matemático que tiene incidencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y que lamentablemente pocas veces es tomado en cuenta, sino que, por el contrario, tiende a pasar desapercibido.

Igualmente se estima que este aspecto no se puede descuidar, pues tiene que ver precisamente con ese “lenguaje artificial escrito” (que denominamos translenguaje) empleado constantemente para manipular y enseñar los objetos matemáticos, en particular los algebraicos, y con el uso de símbolos con los que se suele transmitir dichos objetos. Con esta denominación hacemos referencia a ese lenguaje escrito híbrido que resulta de la mezcla entre el lenguaje natural para comunicarnos y el lenguaje artificial matemático caracterizado por el simbolismo. A nuestro modo de ver este translenguaje se genera pues, sin ser propiamente puro, toma lo más expresivo de cada cual, respetando sus reglas de sintaxis, y crea uno particular que los trasciende y que permite la comunicación de ideas matemáticas. Un ejemplo de translenguaje lo tenemos en la expresión: “Sea $x \in R$…”, aquí el verbo ser aparece escrito en lenguaje natural, mientras que el simbolismo $x \in R$ quiere decir que se está en la presencia de un número real y que lo identificamos con la letra equis.

Desde nuestro punto de vista la relación entre objeto y símbolo es paradójica ya que este último sin tener una relación natural con el objeto lo hace "visible", lo que al fin de cuentas permite su manipulación, y esto puede ser la causa de muchas limitaciones cuando lo requerido sea alguna interpretación concreta. En el caso específico de la igualdad $|x|=|-x|$ el estudiante puede manipular el símbolo $|-x|$ (y de hecho lo hace) creyendo que opera sobre el objeto. Éste último es más complejo de lo que él piensa pues con el símbolo $-x$ se representa un objeto que, en este caso, puede ser un número real cualquiera, incluso un real positivo.

Para precisar lo anterior se subscribe el comentario de Pimm (2002) al afirmar que "el peligro real y con frecuencia convertido en error efectivo, consiste en se tomen como objeto de las matemáticas los símbolos mismos, en vez de las ideas y procesos que representan, realidades que indican y a las que se refieren el lenguaje y la notación" (PIMM, 2002, p.224).

Finalmente, al igual que Hitt (2003) se cree que "es importante iniciar una discusión sobre el infinito potencial y el infinito actual entre los profesores de matemáticas del nivel de educación media, y diseñar nuevas actividades que promuevan una mejor enseñanza de este tema de matemáticas" (p.110).

REFERENCIAS

ANDONEGUI, M. *La Matemática de primer año de bachillerato*. XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, 2009.

BACHELARD, G. *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo veintiuno editores, 2007.

BAZZINI, L. *On The Construction And Interpretation Of Symbolic Expressions*. [Documento en línea]. Disponivel em: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers_vol2/g6_bazzini.pdf . Acesso em: 10 jul. 2007.

BEDNARZ, N.; JANVIER, B. The emergente and development of algebra in a problem solving context: A problem Analysis. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psicology of Mathematics Educaction*, v.2, pp.64-71, 1992.

BEYER, W. El laberinto del significado: La comunicación en el aula de Matemáticas. En MORA, D. Y SERRANO, W. (Ed.). *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre Matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica.* Bolivia: Campo Iris, s.r l, 2006.

BEYER, W. Elementos de Didáctica de las matemáticas. Mérida: VI Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, 2003.

BOERO, P. (Ed.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. N Y: Sense Publishers.

BOOTH, L. *Algebra:* Children´s strategies and error. Windsor. UK: NFer-Nelson, 1984.

CAMPOS LINS, R. *The production of meaning for algebra:* a perspective based on a theoretical Model of Semantic Fields. In SUTHERLAND, R.; ROJANO, T.; BELL, A.; LINS, R. (Ed.). *Perspectives on School Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2001.

CANTORAL, R. et al. *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas, 2003.

FILLOY, Y. *Aspectos teóricos del Álgebra Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, S.A, 1999.

GÓMEZ-GRANELL, C. *Hacia una epistemología del conocimiento escolar:* El caso de la Educación Matemática. En RODRIGO, M. J.; ARNAY, J. (Compiladores). *La construcción del conocimiento escolar.* España: Paidos, 1997.

GONZÁLEZ, F. Los Nuevos Roles del Profesor de Matemática. Retos de la Formación de Docentes para el Siglo XXI. *Conferencia presentada en la Décima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 13). Santo Domingo, República Dominicana* (del 12 al 16 Julio de 1999), 1999.

HITT, F. El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y la continuidad de funciones. En FILLOY, E. (Coordinador) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica, 2003.

KAPUT, J. ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, n.9, v.III, julio 1996, p.85-97.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. *Educacional Studies in Mathematics*, v.12, p.317-326, 1981.

KIERAN, C. Research on the learning and teaching of algebra. In: GUTIÉRREZ, A. et al. *Perspectives on School Algebra*. USA: Kluwer Academy Publisher, 2006.

KIERAN, C.; FILLOY, Y. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, v.7 n.3, p.229-240, 1989.

KUCHEMANN, D. *The understanding of generalizad arithmetic (algebra) by secondary school children, tesis de doctorado*. University of London, Institute of Education, 1980.

MORA, D. Relación entre lenguaje, pensamiento, matemáticas y realidad. In: MORA, D.; SERRANO, W. (Ed.). *Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. Algunos aspectos sobre la relación entre Matemática, lenguaje, pensamiento y realidad desde una perspectiva crítica.* Bolivia: Campo Iris, s.r l, 2006.

PIAGET, J.; GARCÍA, R. *Psicogénesis e historia de las ciencias*. Madrid y México: Siglo XXI, 1983.

PIMM, D. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata, 2002.

PUIG, L. Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. In: FILLOY, E. (Coord.). *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica, 2003.

SACRISTAN, A. Dificultades y paradojas del infinito: Experiencias en un ambiente de exploración computacional. In: FILLOY, E. (Coord.). *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica, 2003.

SOCAS, M.; CAMACHO, M.; HERNÁNDEZ, J. Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Universitaria de Formación del Profesorado*, n.32, mayo/agosto 1998, pp.73-86. Disponível em <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117980>. Acesso em: 23 jan. 2008.

THOM, R. “Modern mathematics: Does it exist?” En A. G. HOWSON (Ed.). Developments in Mathematics Education, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
URSINI, S. et al. Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa. México: Trillas, S.A., 2005.
VERGNAUD, G.; CORTES, A.; ARTIGUE, F. Introduction l’algebre aupres de debutants faibles. Problemes epistemologiques et didactiques. Actes du colloque de Sevres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, 1987.
WUSSING, H. *Lecciones de historia de las Matemáticas*. España: Siglo Veintiuno Editores, S.A, 1998.

Recebido em: maio 2011 **Aceito em:** jun. 2011