Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes?

Lourdes Maria Werle de Almeida
Emerson Tortola
Renato Francisco Merli

RESUMO

Neste artigo apresentamos algumas discussões sobre o papel da linguagem e das representações em atividades de Modelagem Matemática. À luz de considerações sobre linguagem, fundamentadas na perspectiva filosófica wittgensteiniana bem como na semiótica, tratada neste texto sob o enfoque de Charles Sanders Peirce e, no contexto da Educação Matemática mais especificamente, por Raymond Duval, apresentamos reflexões sobre a questão: "Seriam diferentes modelos associados à resolução de um mesmo problema, na verdade, diferentes linguagens, mas que guardam entre si uma certa semelhança, uma 'semelhança de família', como caracteriza Ludwig Wittgenstein?". A partir da análise de algumas atividades, podemos perceber que diferentes modelos matemáticos parecem ser diferentes linguagens, utilizadas para representar um mesmo 'sistema'. O uso de diferentes linguagens pode ocorrer em qualquer nível de escolaridade, desde as Séries Iniciais da Educação Básica até os anos finais do Ensino Superior. Não é a sofisticação da matemática que irá trazer à tona uma nova linguagem, mas sim, as formas de vida e o contexto em que as atividades de Modelagem Matemática são desenvolvidas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Linguagem. Representações Semióticas.

Mathematical Modeling – What We're Dealing with: Different Models or Different Languages?

ABSTRACT

In this article we present some discussions about the language and representation in mathematical modeling activities. From considerations based on language in Wittgenstein's

---

Lourdes Maria Werle de Almeida é Professora Doutora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Endereço para correspondência: Rodovia Celso Garcia Cid – Pr 445 Km 380 – Campus Universitário – Cx. Postal 6001 – CEP 8601-980 – Londrina – PR. E-mail: lourdes.maria@sercomtel.com.br

Emerson Tortola é Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Endereço para correspondência: Rodovia Celso Garcia Cid – Pr 445 Km 380 – Campus Universitário – Cx. Postal 6001 – CEP 8601-980 – Londrina – PR. E-mail: emersontortola@hotmail.com

Renato Francisco Merli é Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Endereço para correspondência: Rodovia Celso Garcia Cid – Pr 445 Km 380 – Campus Universitário – Cx. Postal 6001 – CEP 8601-980 – Londrina – PR. E-mail: renato.francisco@fap.com.br

philosophical perspective and the semiotic, treated in this text under the approach of Charles Sanders Peirce, and in the context of mathematics education more specifically, by Raymond Duval, present reflections on the question: would be different models associated with the solution of the same problem, in fact, different languages, but that they have among themselves a certain similarity, a 'family resemblance', as characterized by Ludwig Wittgenstein? From the analysis of some activities we can see that different mathematical models seem to be different languages, used to represent the same 'system'. The use of different languages can occur at any level of schooling since the early grades of basic education until the final years of Higher Education. It is not the sophistication of the mathematics that will bring out a new language, but the life forms and the context in which mathematical modeling activities are developed.
Keywords: Mathematical Modeling. Language. Semiotic Representations.

INTRODUÇÃO

O professor Rodney Bassanezi, ao escrever o prefácio do livro Modelagem Matemática na Educação Básica, inicia suas considerações dizendo:

> A Modelagem Matemática, como processo de ensino-aprendizagem, surgiu entre nós mais por necessidade do que por acaso. ... A criação de problemas novos era muitas vezes, mais interessante e atraente que sua própria resolução. Este procedimento de criação/resolução de problemas, enfocando o ensino e a aprendizagem da Matemática ganhou força e tomou rumos distintos entre os pesquisadores da área de Educação Matemática. (ALMEIDA, SILVA; VERTUAN, 2012, p.7)

Essa afirmação de Bassanezi sinaliza que a configuração do uso de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula foi ganhando espaço, tanto no âmbito da determinação de uma prática para a sala de aula quanto entre os pesquisadores/educadores interessados em investigar possíveis delineamentos e/ou encaminhamentos desta configuração.

Entre esses 'rumos' a que se refere Bassanezi insere-se a argumentação que apresentamos neste texto em relação à questão: "Seriam diferentes modelos associados à resolução de um mesmo problema, na verdade, diferentes linguagens, mas que guardam entre si certa semelhança, uma 'semelhança de família', como caracteriza Ludwig Wittgenstein?".

Com a finalidade de apresentar algumas reflexões sobre essa questão e seus desdobramentos para a área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, inicialmente apresentamos nosso entendimento sobre Modelagem Matemática.

Mas discutir o papel do que poderiam ser 'diferentes linguagens' no âmbito de uma atividade de Modelagem Matemática requer um olhar que, ao mesmo tempo em que se volta para a natureza filosófica, não pode se distanciar demasiadamente do que, em Matemática, é uma linguagem indispensável: os registros ou as representações escritas. É esse o motivo pelo qual incluímos no texto considerações sobre linguagem, fundamentadas na perspectiva filosófica wittgensteiniana, bem como na teoria sígnico-semiótica, tratada neste texto sob o enfoque de Charles Sanders Peirce e, no contexto da Educação Matemática mais especificamente, por Raymond Duval.

Nossas discussões são orientadas pela análise de atividades de Modelagem Matemática em que diferentes modelos são construídos e analisados pelos estudantes de diferentes níveis de escolaridade. No entanto, estes modelos guardam entre si certas semelhanças. O que os faz 'diferentes', podem ser diferentes linguagens. O que esses alunos fazem ou usam para a construção de modelos matemáticos são, também, 'jogos de linguagem'. Trata-se, portanto, de um ensaio com vistas ao desenvolvimento de reflexões sobre o papel da linguagem em atividades de modelagem.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Uma reflexão sobre o que vem a ser, ou como pode ser caracterizada a Modelagem Matemática poderia ser pautada em diferentes pressupostos teóricos ou em diferentes concepções sobre o significado de alguns termos como 'modelagem', 'matemática', 'problema', 'realidade' entre outros.

Embora sem adentrar em divagações filosóficas usuais quando estes termos entram em cena, apresentamos o significado de alguns deles no contexto deste trabalho.

Segundo o dicionário Houaiss (2009), o termo 'modelagem' significa dar forma a algo por meio de um modelo. Modelo, por sua vez, segundo o dicionário etimológico de Cunha (1989), diz respeito à 'representação de alguma coisa'. Neste sentido, o modelo tem a função de explicar e/ou expor características de algo que não está presente, mas se torna presente por meio do modelo.

Em matemática usamos e construímos modelos – modelos matemáticos – para explicar, representar e fazer previsões para situações e 'torná-las presentes' usando matemática. O modelo matemático é então "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13).

Neste contexto, a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, neste caso, é o que 'dá forma' à solução do problema e a Modelagem Matemática é a 'atividade' de busca por esta solução.

A atividade diz respeito ao conjunto de ações em que se envolvem os modeladores (aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem) e não se refere apenas a ações físicas desenvolvidas por um indivíduo, mas também a ações psíquicas conscientemente controladas como a memorização ativa, o pensamento, o comportamento intencional. Deste modo, a atividade humana envolve ações externas e internas. As externas, manifestadas por movimentos do corpo, são mediadas, em geral, por instrumentos e ferramentas. Nas ações internas, por sua vez, o homem opera com imagens mentais ou instrumentos simbólicos como os códigos, a matemática, etc. (OLIVEIRA, 2001). É da investigação dessas 'ações' que emerge a importância do papel da linguagem no âmbito de uma atividade de Modelagem Matemática.

A noção de problema é também amplamente discutida na literatura. Já há vários séculos se buscava um entendimento do que viria a ser um problema e, neste contexto, Euclides (matemático grego, que viveu entre os séculos III e IV a.C.) referia-se a ele como algo que parte de uma observação imbuída de algum conhecimento e busca conhecer algo ainda desconhecido, tratando de problema como uma construção axiomática (BARON, 1985). Já o filósofo-lógico-matemático Charles Sanders Peirce (1839-1914) considerava que situação-problema constitui o ponto de partida de uma indagação – é uma situação indeterminada. Ela se tornaria problemática no próprio processo de sujeição à indagação. O dicionário Aurélio (FERREIRA, 1986, p.1394), por sua vez, refere-se ao termo como "problema é uma questão não solvida e que é objeto de discussão". Considerando estas interpretações, o termo 'problema' é entendido aqui como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas a *priori* para sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções já indicadas.

Assim, podemos considerar a caracterização de Modelagem Matemática apresentada em Bassanezi (2002, p.16): "Modelagem Matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do seu contexto de origem".

Com este olhar para a Modelagem Matemática, outro termo que parece lhe ser diretamente associado é 'realidade'. Caracterizar o que é realidade, científica ou filosoficamente, não é empreitada fácil e não é objetivo deste texto fazê-lo. Para expressar o entendimento que temos em mente quando nos referimos à realidade em atividades de Modelagem Matemática, nos apoiamos em Berger e Luckmann (2008, p.11) que a tratam como "uma qualidade pertencente a fenômenos que reconhecemos terem um ser independente de nossa própria volição (não podemos desejar que não existam)". Os autores propõem a existência de diferentes esferas da realidade carregadas de signos[1] e símbolos que serão compreendidos e acionados pelas pessoas na medida em que elas têm acesso a essas esferas.

> Os objetos diferentes apresentam-se à consciência como constituintes de diferentes esferas da realidade. Reconheço meus semelhantes com os quais tenho de tratar no curso da vida diária como pertencendo a uma realidade inteiramente diferente da que têm as figuras desencarnadas que aparecem em meus sonhos. Os dois conjuntos de objetos introduzem tensões inteiramente diferentes em minha consciência e minha atenção com referência a eles é de natureza completamente diversa. (BERGER; LUCKMANN, 2008, p.37-38)

Neste contexto, em se tratando de atividades de Modelagem Matemática, é muito provável que os modeladores se refiram a esferas da realidade que, em alguma medida, lhe são acessíveis, ou lhe são atingíveis por meio de algum tipo de signo. Neste sentido, para um sujeito que tem acesso à internet e encontra aí informações sobre o desmatamento

[1] Peirce definiu o signo como algo que, para uma pessoa, toma lugar de outra coisa (objeto), não em todos os aspectos desta coisa, mas de acordo com certa forma ou capacidade. No entanto, a noção de signo para Peirce (2005) foi considerada tão ampla, que o signo não precisa ter uma natureza plena de linguagem, podendo ser uma mera ação ou reação, que verbaliza uma emoção ou sentimento.

na floresta amazônica, por exemplo, ainda que ele nunca tenha ido à Amazônia, o desmatamento na Amazônia será uma esfera de sua realidade.

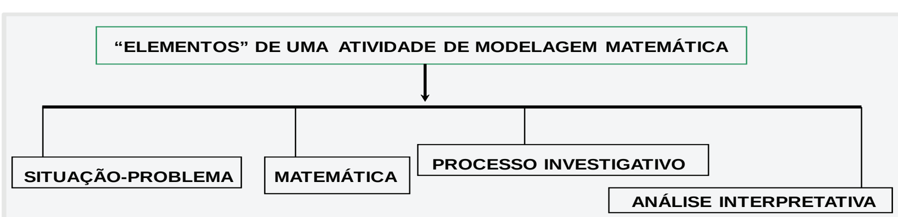
Na atividade de modelagem, as ações do modelador se voltariam então, a partir de características dessa realidade, a criar um problema matemático, resolvê-lo e interpretar as soluções em relação a essa realidade.

Este conjunto de ações é tratado por Bassanezi em sua caracterização como a 'arte'. Mas o que seria a 'arte'? Pablo Picasso (1881-1973) dizia: "a arte é uma mentira que nos ajuda a ver uma verdade". Mas estariam Picasso e Bassanezi falando da mesma 'arte'? Não sabemos! Entretanto ambos falam de representação! Picasso em outra ocasião teria dito: "Há pessoas que transformam o sol numa simples mancha amarela, mas há também aquelas que fazem de uma simples mancha amarela o próprio sol". Bassanezi, por sua vez, afirma que "nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado e, agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos" (BASSANEZI, 2002, p.31).

É neste sentido que o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, a produção de representações para situações e problemas não essencialmente matemáticos, pode seguir caminhos diferentes e conduzir a resultados nem sempre iguais e, parafraseando Meyer, Caldeira e Malheiros (2012, p.33), "a verdades momentâneas".

Todavia, o ato de desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrito em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. E, ainda que não se possa falar em etapas bem definidas, é possível identificar elementos que caracterizam a Modelagem Matemática: o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são pré-definidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução. Assim, estes constituem elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática (Figura 1).

FIGURA 1 – Elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática.



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.17).

Ainda que se possam identificar elementos que caracterizam uma atividade de modelagem, há que se reiterar que a investigação de uma situação da realidade por meio da matemática requer o uso de uma linguagem que facilite e racionalize o pensamento. A linguagem, nesse sentido, refere-se a um sistema organizado de geração, organização, interpretação e comunicação da informação por meio de signos.

Neste sentido, não se pode ignorar que a linguagem matemática, preponderantemente escrita, e que embora se pretendendo formal, necessita da linguagem natural, de figuras, para a comunicação das ideias. Assim, buscar articulações, aproximações entre diferentes linguagens que se fazem presentes em atividades de Modelagem Matemática é a questão que está em relevo neste trabalho.

LINGUAGEM, MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Já há algum tempo a linguagem tem despertado interesse de muitos filósofos e pensadores, que dedicaram grande parte de suas vidas a estudos que contemplavam a relação entre as palavras e os objetos que as significavam. Inicialmente, buscou-se descrever a linguagem por meio de construções lógicas, na tentativa de compreender sua origem. O papel da linguagem consistia exclusivamente em nomear e designar, caracterizando uma relação unívoca entre símbolo e objeto.

Com a virada linguística, ocorrida no início do século XX,

> [...] a linguagem não é mais considerada como simples instrumento para o pensamento representar as coisas, e sim como estrutura articulada, independente de um sujeito ou de uma vontade individual e subjetiva, não mais submetida à função exclusiva da nomeação ou designação, quer dizer o signo não se limita a estabelecer uma relação direta com a coisa nomeada. (ARAÚJO, 2004, p.11-12)

Nessa perspectiva de Araújo (2004), ao invés de se buscar uma estrutura lógica, por meio de uma filosofia analítica, busca-se compreender a linguagem a partir de seu funcionamento. Assim, é deixada de lado a concepção essencialista, defendida pela filosofia analítica, e entra em cena uma filosofia mais pragmática. A questão norteadora da filosofia da linguagem deixa de buscar 'o que é linguagem' e passa a se preocupar em 'como ela funciona', funcionamento este que, neste trabalho, é visto sob os princípios do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein cujos significados das palavras estão nos seus diferentes usos na linguagem.

Wittgenstein, em seu livro Investigações Filosóficas, argumenta que a atribuição de significado às palavras se dá pelo uso que fazemos delas nos diferentes contextos sociais – os 'jogos de linguagem', que para ele são os processos de denominação e de repetição da palavra pronunciada e também "a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (WITTGENSTEIN, 2009, p.19).

Essas atividades diferem em seus usos, são práticas com regras específicas, convencionadas por uma 'gramática'.

> A gramática não diz como a linguagem tem que ser construída para cumprir com sua finalidade, para agir, desta ou daquela maneira sobre as pessoas. Ela apenas descreve o emprego dos signos, mas de maneira alguma os elucida. (WITTGENSTEIN, 2009, p.186)

A gramática, conforme Vilela (2007), refere-se ao complexo conjunto de regras da linguagem ou o que comportaria a estrutura da linguagem, indica como podem ser usadas as expressões nos diferentes contextos em que aparecem e quais são as regras de uso das palavras. O que faz sentido, o que é certo ou errado, é que é determinado por essas regras, criadas pelas 'formas de vida' de quem as pratica.

O termo 'formas de vida' é utilizado por Wittgenstein para designar hábitos, costumes e crenças de um determinado grupo imerso num contexto cultural que fundamenta suas práticas e ações, envolvidas com a linguagem (GOTTSCHALK, 2008, p.80).

Apesar de apresentarem regras específicas, os jogos de linguagem possuem regras em comum, isto é, "não há um núcleo comum, um fio único a amarrar os jogos ou os usos linguísticos todos. Tal como uma corda, a trama é tecida por vários fios que garantem sua resistência" (ARAÚJO, 2004 p.106-107), formando assim, uma complexa rede de semelhanças, a qual Wittgenstein convencionou chamar de 'semelhanças de família'.

> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras "semelhanças familiares"; pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento, etc., etc. – E eu direi: os 'jogos' formam uma família. (WITTGENSTEIN, 2009, p.52)

Essas semelhanças emergem a partir do convívio que temos com diferentes contextos, e é nesse sentido que os signos mediam a relação das pessoas com o mundo e com elas mesmas, suscitando a constituição de diferentes jogos de linguagem e possibilitando a mudança de uma representação semiótica para outra, necessidade assinalada por Duval (2011). Wittgenstein, neste sentido, coloca: "Cada vez que em vez de tal e tal representação também seria possível usar alguma outra, damos mais um passo rumo ao objetivo, que é entender a natureza do que é representado" (WITTGENSTEIN, 2009, p.37).

Baseados em Duval admitimos a 'representação semiótica' como sendo elemento de um sistema semiótico, sistema este composto de signos. Assim, sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e a própria língua natural, são exemplos de representações semióticas (DUVAL, 2011, p.14).

E quando nos referimos à linguagem, não estamos fazendo referência apenas ao uso das palavras, mas reconhecemos que ações, gestos, registros, etc., também são linguagens que expressam, por meio de signos, o nosso pensamento. Neste sentido, os diferentes registros de representação semiótica, segundo Duval (2011, p.13), formam "condição essencial para a evolução do pensamento matemático".

No que tange à Matemática ela pode ser entendida como "um sistema simbólico de caráter formal, cuja elaboração é indissociável do processo de construção do conhecimento matemático" (SANTOS, 2009, p.117). Ou seja, a construção de conhecimento, em certa medida, depende de um sistema simbólico.

Nessa perspectiva, o objeto matemático não é acessível diretamente. Entramos em contato com ele apenas por meio de suas representações e é na linguagem que essas representações são constituídas, por meio de signos que ganham significado conforme seus usos. Nesse contexto, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.34) afirmam que:

> [...] falar de representação equivale a falar de conhecimento, significado, compreensão uma vez que se pode considerar que a compreensão de um objeto matemático está diretamente relacionada com a identificação das diferentes representações que lhe são associadas.

Assim, Raymond Duval com sua teoria de 'representação semiótica' e Ludwig Wittgenstein com os 'jogos de linguagem' sinalizam a importância da pluralidade de representações em Matemática. O primeiro defende uma diversificação de representações de um mesmo objeto, pois dessa forma é possível a compreensão dos conceitos, por meio dos signos. Enquanto o segundo, por sua vez, admite que representar um objeto é descrevê-lo em palavras e os significados destas palavras são produzidos pelo sujeito imerso em jogos de linguagem. Portanto, os significados estão atrelados ao modo que as palavras são usadas e ao contexto em que elas estão inseridas. É nesse sentido que podemos perceber aproximações entre as teorias de Wittgenstein e de Duval, considerando que os usos dos signos são articulados pelos jogos de linguagem.

Na teoria de representação semiótica, "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas" (DUVAL, 2011, p.21), sendo fundamental não confundir um objeto e sua representação. Para Duval (2009), as representações semióticas possuem dois tipos diferentes de transformações: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações que ocorrem internamente num mesmo sistema de representação semiótica, tem-se como partida e chegada o mesmo sistema. Já, as conversões são transformações que implicam em mudar de um sistema de representação para outro.

Entendemos que essas diferentes representações semióticas constituem-se a partir do uso de diferentes linguagens, e desta forma, estão associadas a diferentes jogos de linguagem, cujos significados são mediados pelos signos ou instrumentos que os representam.

Neste trabalho, olhamos para a linguagem no âmbito da Educação Matemática, analisando suas implicações em ambientes constituídos por meio da Modelagem Matemática, analisando as diferentes linguagens que podem emergir a partir da construção de diferentes modelos matemáticos.

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: OS MODELOS, AS LINGUAGENS

Levando em consideração as ideias de Wittgenstein, a respeito dos jogos de linguagem, e de Duval, a respeito de representações semióticas, discutimos, nesta seção, algumas atividades de Modelagem Matemática e as linguagens e os diferentes modelos matemáticos que emergiram do seu desenvolvimento em dois contextos diferentes.

Contexto 1 – A Modelagem no Ensino Fundamental

Com base na concepção de modelo matemático, apresentada por Almeida, Silva e Vertuan (2012), podemos interpretá-lo como uma estrutura matemática que utiliza uma linguagem específica, capaz de expressar, por meio de signos, uma situação resultante das relações e conexões entre matemática e um problema não matemático.

Desta forma, um aspecto importante a ser considerado em atividades de Modelagem Matemática é o contexto em que se realizam, pois ele é determinante no momento em que ocorre a transição das linguagens, que estão intrinsecamente ligadas à situação em estudo e à matemática. Essas linguagens se fundamentam nos usos que fazemos das palavras – nos remetendo à filosofia da linguagem de Wittgenstein; ou ainda, em consonância com as ideias de Duval, nos signos que utilizamos para expressá-las.

Esses usos determinam o que Wittgenstein chama de 'jogos de linguagem', e, de acordo com o cenário apresentado, subsidiam a obtenção dos modelos matemáticos, permitindo que os signos utilizados nestas representações adquiram significado, conforme a situação envolvida.

Assim, dependendo do contexto, diferentes representações podem ser evocadas e diferentes jogos de linguagem podem emergir, resultando em diferentes modelos matemáticos. Apresentamos nesta seção alguns modelos que foram construídos por estudantes das Séries Iniciais, ao desenvolverem uma série de atividades[2] de modelagem.

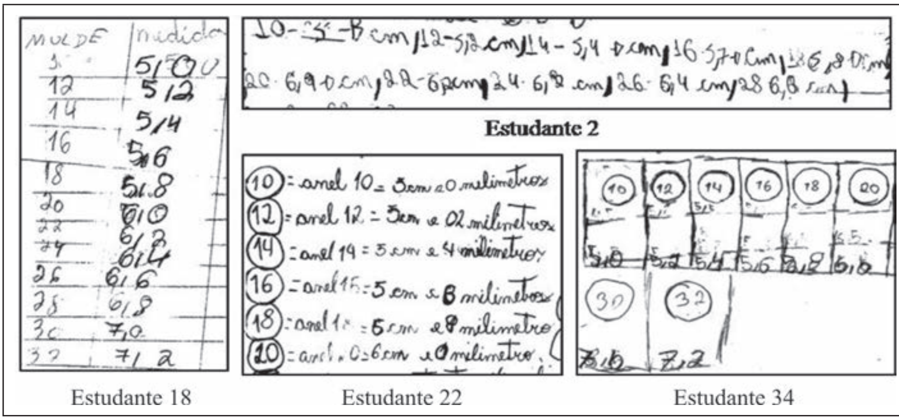
Os temas das atividades, determinantes do contexto, foram escolhidos pelo professor ou pelos estudantes e envolvem problemáticas diversas, podendo se referir a situações não essencialmente matemáticas. Neste artigo, nos referimos às atividades: 'Tamanho dos anéis'; 'Área dos estudantes na sala de aula'; e 'Valor do dólar'.

A atividade 'Tamanho dos anéis', provocou nos estudantes a necessidade de estabelecerem uma relação entre numeração dos moldes de anéis e comprimento da 'circunferência' do dedo. A questão que orientou o desenvolvimento dessa atividade foi: 'Como se determina o tamanho de um anel?'. Na busca por respostas para essa questão, os estudantes utilizaram representações conforme o jogo de linguagem em que

[2] Essas atividades foram desenvolvidas por estudantes de um 4º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 8 e 9 anos, organizados em grupos, no âmbito de um projeto vinculado ao Programa Observatório da Educação, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sendo financiado por esse órgão.

estavam imersos, cujas características e regras de uso podem ser observadas nos modelos apresentados na Figura 2.

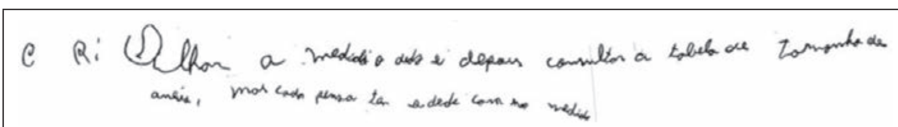
FIGURA 2 – Representações de estudantes[3] para os modelos matemáticos da atividade 'Tamanho dos anéis'.



Fonte: autor.

Nesta situação, vários estudantes associaram ao modelo uma explicação, uma forma de interpretá-lo, como mostra a Figura 3.

FIGURA 3 – Explicação do Estudante 16 para o modelo matemático de seu grupo.



Olhar a medida do dedo e depois a tabela de tamanho de anéis, mas cada pessoa tem o dedo com uma medida (estudante 16)

Fonte: autor.

Existem normas que regulamentam a elaboração de quadros e tabelas, sendo um exemplo as normas NBR 6029 e NBR 6822, da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Com base nessas normas, a tabela com os dados organizados pelos estudantes (Figura 2) poderia ser apresentada de acordo com a Tabela 1, obedecendo a essa estrutura.

[3] Para nos referirmos aos estudantes utilizamos uma codificação, os enumeramos de 1 a 36, com o intuito de preservar suas identidades.

TABELA 1 – Relação número do molde e medida da circunferência do dedo.

Número do molde	Medida do dedo (cm)
10	5,0
12	5,2
14	5,4
16	5,6
18	5,8
20	6,0

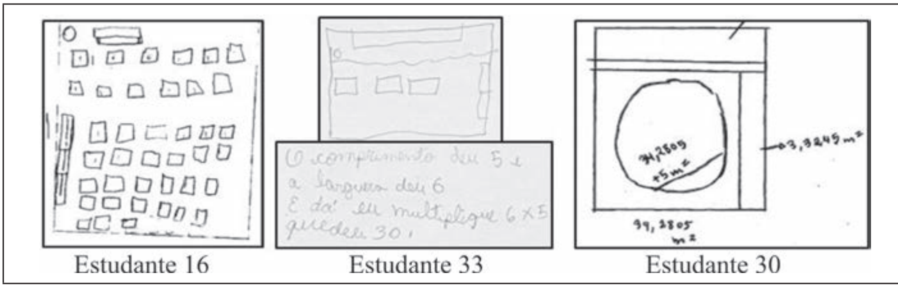
Fonte: autor.

Essa representação difere daquelas encontradas nos registros dos estudantes, naquele jogo de linguagem, pois naquele momento, devido à necessidade de apresentarem uma solução para o problema, os estudantes buscaram outras representações que dessem conta de expressar essa situação, cujas regras pudessem ser adequadas aos jogos de linguagem em que estavam inseridos.

Nestas representações para os modelos matemáticos (Figura 2), notamos a ocorrência do que Duval chama de conversão. Há inicialmente a conversão da linguagem natural, em que se encontra o problema, para a linguagem matemática, expressa nas diferentes representações dos estudantes para o modelo matemático. E depois, há novamente uma conversão, quando os estudantes buscam explicar o funcionamento dos signos utilizados em suas representações (Figura 3). Nessas conversões, o que muda não são apenas os signos, mas também os jogos de linguagem, dos quais emergem as regras para o uso desses signos, de acordo com o contexto.

Já na atividade 'Área dos estudantes na sala de aula', foram apresentadas informações a respeito da área, que segundo a legislação brasileira, deve ser assegurada a cada um no espaço da sala de aula. Neste caso, o problema investigado foi: 'Quantos alunos cabem na sua sala de aula? .' Para resolvê-lo foi necessário descobrir as dimensões da sala de aula e calcular sua área, para assim, responder ao questionamento inicial. A Figura 4 traz alguns registros, cujas representações podem ser interpretadas como modelos matemáticos para essa situação.

FIGURA 4 – Representações de alunos para os modelos matemáticos da 'Área dos estudantes na sala de aula'.



Fonte: autor.

Na Figura 5, apresentamos um exemplo de resposta, dada pelo Estudante 30, a partir de uma análise da situação, com base no modelo construído pelo seu grupo.

FIGURA 5 – Análise da situação com base no modelo matemático.

R: Cabem 39 alunos

R: Sim. Porque a lei dis (sic) que cabem 39 alunos na sala de aula e cada um com um metro quadrado (estudante 30)

Fonte: autor.

Ele conclui que na sala de aula cabem 39 estudantes Mas, conforme observamos na Figura 5, ele 'tropeça' nas palavras, pois não é a lei que diz 'que cabem 39 alunos'. Esta foi uma inferência feita pelo grupo a partir do modelo obtido (terceira representação da Figura 4). A lei apenas resguarda o direito, de cada estudante, a 1 m² de área no ambiente da sala de aula.

Mas, o que permite ao professor compreender a resposta do estudante apresentada no registro? O fato de o professor também fazer parte da forma de vida envolvida nas atividades de Modelagem Matemática faz com que ele, imerso nos jogos de linguagem desses alunos, assuma um papel associado à fiscalização das regras utilizadas por eles na constituição dos jogos. Esse papel é atribuído ao professor, pois ele traz consigo influências de outro jogo de linguagem, que subentende ser o jogo de linguagem desejado para os estudantes durante as aulas, o jogo de linguagem da matemática, cujos signos e representações são diferentes daqueles utilizados pelos estudantes, mas mantêm semelhanças, 'semelhanças de família' – como sugere Wittgenstein; e são essas que permitem que ocorra a compreensão dos diferentes jogos de linguagem por aqueles que os jogam.

E por fim, na atividade 'Valor do dólar', cujo tema foi escolhido pelos estudantes, eles buscaram compreender como funciona o câmbio dólar-real, curiosidade despertada nos estudantes ao ouvirem sobre o assunto em um programa de televisão. Os estudantes, com o intuito de desvendar a relação entre as moedas dólar e real, iniciaram sua investigação com base na seguinte questão (Figura 6) formulada por eles mesmos:

FIGURA 6 – Questão que representa o problema.

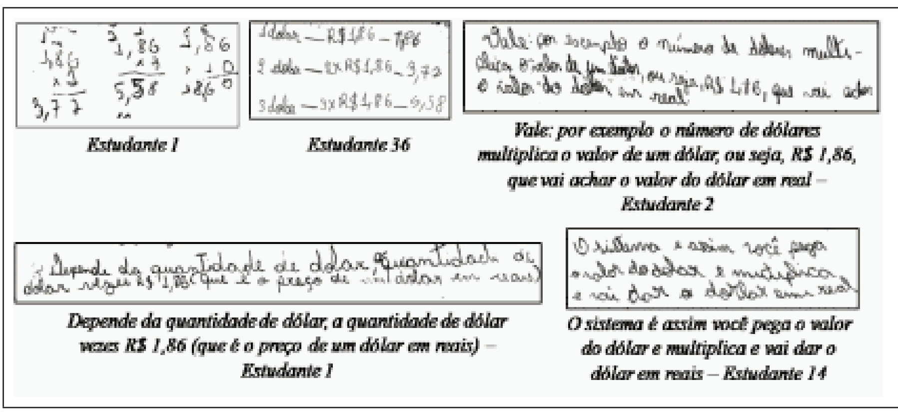
Quanto vale o dólar em reais? Estudante (2)

Fonte: autor.

Mas será que o dólar é um tema da realidade dos estudantes? Em consonância com as ideias que apresentamos em seção anterior, construídas a partir da argumentação de Berger e Luckmann (2008) sobre a existência de ‘esferas’ da realidade, a partir do momento que os estudantes entram em contato com informações acerca de um tema, este passa a integrar uma esfera da sua realidade. Assim, esta aproximação pode provocar interesse e instigar sua investigação. Nesta atividade, parece ter sido este o ‘caminho’ que os estudantes percorreram para trazer para si a esfera da realidade que envolve uma moeda estrangeira, o dólar, e interessar-se por, em uma atividade de Modelagem Matemática, buscar relações com a moeda que lhes é conhecida, o real.

Para solucionar o problema (Figura 6) buscaram informações na internet. Parte dos procedimentos utilizados para obtenção do modelo matemático é apresentada na Figura **7**, acompanhada das representações utilizadas pelos estudantes.

FIGURA 7 – Representações de estudantes para os modelos matemáticos da atividade “Valor do dólar”.



Fonte: autor.

Com o problema definido (Figura 6), os estudantes realizaram uma busca por informações, selecionando aquelas que seriam úteis na solução; fizeram conjecturas e as verificaram – Se 1 dólar naquele dia valia R$1,86, para achar o valor de 2 dólares era preciso multiplicar R$1,86 por 2, para encontrar o valor de 3 dólares, multiplicar R$1,86 por 3 (como mostram os dois primeiros quadros da Figura 7); levantaram hipóteses, como a de que esse raciocínio utilizado para encontrar o valor de 2 e 3 dólares, pode também ser utilizado para encontrar o valor de 10 dólares, 13 dólares, ou qualquer outra quantia e formularam explicações de como se dá esse processo de relação dólar-real para diferentes valores.

Esses procedimentos adotados pelos estudantes contemplaram os elementos de uma atividade de Modelagem Matemática, apontados por Almeida, Silva e Vertuan (2012): situação-problema, matemática, processo investigativo e análise interpretativa, que culminaram com a obtenção de representações – modelos matemáticos.

Como podemos observar na Figura 7 os estudantes construíram uma função a partir da ideia de proporção (segundo quadro da Figura 7). Em consonância com o que temos apresentado, eles não utilizam signos como x, y, ou, $f(x)$, mas imersos no jogo de linguagem em que se encontram aqueles que 'estão jogando', encontraram uma linguagem que permitiu resolver o problema (os três últimos quadros da Figura 7), na qual ficam evidências da compreensão dos estudantes em relação à noção de dependência entre as grandezas, ou variáveis, como costumamos mencionar, em um jogo de linguagem que envolve a matemática de uma maneira mais formal.

Neste sentido, observamos que essencialmente, o conceito de função esteve envolvido nas representações dos estudantes, mas devido ao jogo de linguagem, à forma de vida envolvida, eles não utilizaram a notação $f(x) = ax$, para representar a função linear envolvida na situação. O foco foi outro: a proporção, a ideia de dependência, a representação para valores específicos.

Ao analisar as representações dos estudantes, observamos que a linguagem utilizada por eles está imbricada de características provenientes do seu cotidiano. Eles utilizaram artifícios condizentes com sua idade e nível de escolaridade e buscaram em seus conhecimentos, escolares ou extraescolares, ferramentas que lhes possibilitassem soluções, apresentadas por meio de representações matemáticas. Desta forma, os estudantes transitaram entre os jogos de linguagem da matemática e aquele desenvolvido em sala de aula, de acordo com o tema, por meio das conversões realizadas entre as representações semióticas. A partir destas representações, constatamos que os estudantes são constantemente colocados em contato com diferentes jogos de linguagem, os quais exercem influências sobre essas representações.

Dentre os modelos obtidos pelos estudantes das Séries Iniciais, diferentes representações podem ser destacadas: quadros, tabelas, listas, esquemas, descrições, explicações, comandos, desenhos, algoritmos, entre outros.

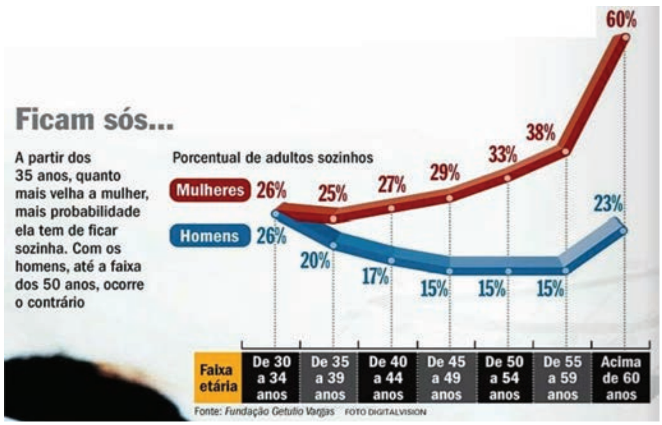
Mas no que diferem esses modelos matemáticos? No conjunto de signos utilizados para representar a situação, uma simbologia peculiar a este nível de escolaridade que ainda não estudou fórmulas ou equações algébricas, funções ou representações mais refinadas no jogo de linguagem da matemática – e são frequentemente encontradas na literatura a respeito de Modelagem Matemática. Utilizaram signos provenientes dos jogos de linguagem que emergiram a partir do desenvolvimento de cada atividade de modelagem e culminaram com a obtenção dos modelos matemáticos, que carregam consigo uma linguagem própria, fundada na 'forma de vida' envolvida.

Contexto 2 – Uma atividade para o Ensino Superior

A partir de uma atividade de Modelagem Matemática, elaborada em um outro contexto – de estudantes do Ensino Superior – buscamos interpretar diferentes modelos matemáticos ou diferentes linguagens, à luz do que enunciamos sobre diferentes linguagens.

Essa atividade, já discutida em Almeida, Silva e Vertuan (2011, p.13), diz respeito à 'dinâmica da nupcialidade', cujos dados foram obtidos da Revista Veja de 27 de abril de 2005 e que tinha como discussão o tema solidão, fazendo um estudo sobre o número de pessoas que vivem sozinhas no Brasil e no mundo, conforme podemos ver na Figura 8. Embora a figura mostre dados relativos à solidão sob o ponto de vista masculino e feminino, a matéria tratou da solidão com ênfase na solidão feminina, pois, segundo a própria reportagem, o número de mulheres solteiras, separadas ou viúvas supera o de homens nas mesmas condições há quatro décadas.

FIGURA 8 – Percentual de adultos sozinhos.



Fonte: Revista Veja de 27 de abril de 2005.

TABELA 2 – Probabilidade de a mulher ficar sozinha.

i (em anos)	S (em %)
30	26
35	25
40	27
45	29
50	33
55	38
60	60

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2011, p.13)

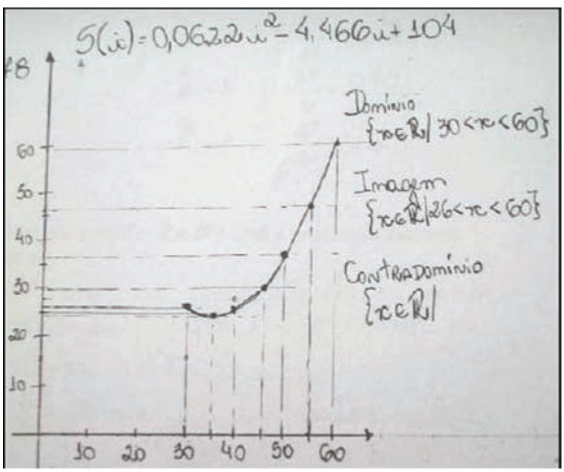
Com a situação-problema posta, os alunos identificaram o problema que iriam investigar – 'Probabilidade[4] da mulher ficar sozinha dada a sua idade' – e construíram a Tabela 2, considerando o primeiro valor de cada intervalo das faixas etárias a que se refere o gráfico da Figura 8.

[4] A probabilidade foi entendida pelos alunos como porcentagem.

Sob o olhar das representações semióticas de Duval, podemos verificar que os alunos passaram de um sistema semiótico (da linguagem natural) para outro (linguagem matemática), ocorrendo o que ele chama de conversão. Do ponto de vista wittgensteiniano, mudar de uma representação semiótica para outra significa mudar o jogo de linguagem jogado. As regras são outras. O que permanece são as semelhanças de família presentes entre o tema e os números.

Para responder ao problema proposto, os alunos determinaram uma função quadrática para representar os dados, em que *i* representa a idade e *S(i)* a probabilidade. Graficamente, essa função está representa na Figura 9. Com base nesse ajuste, os alunos determinaram o mínimo da função, encontrando a idade de 36 anos como aquela em que a probabilidade de uma mulher ficar sozinha é menor.

FIGURA 9 – Representação do ajuste quadrático.



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2011, p.13).

Mas será que a resposta encontrada – 36 anos – responde com exatidão ao problema? Se a resposta for sim, está indicado que se assume que há apenas dois graus de certeza: certo/verdadeiro ou errado/falso. Esse mundo binário em que vivemos está enraizado em nossas mentes. Basta olhar um pouco para o ambiente que nos rodeia. Somos levados a responder sim ou não, certo ou errado, ou a nos deparamos com situações dessa natureza em diferentes circunstâncias de modo que nos adaptamos a essa lógica dualista.

Contudo, será que a melhor resposta na atividade de Modelagem Matemática que estamos analisando seria encontrar uma idade mínima, precisamente? Não seria melhor encontrar uma resposta para o problema matemático de determinar a idade em que a probabilidade de uma mulher ficar sozinha já indicasse que esta idade seria ‘por volta’ de 36 anos? Mas o que seria esse ‘por volta’? Há como modelar matematicamente esse termo linguístico? Certamente percebemos que a representação dos signos mudou. Há uma mudança na linguagem empregada, ou seja, mudou-se o jogo de linguagem.

De fato, essa mudança nos remete a um 'novo' tipo matemática que se utiliza signos diferentes daqueles conhecidos até então, a chamada matemática fuzzy. Segundo Kosko (1993, p.19), este tipo de matemática se tornou público em 1965, por Lotfi Askar Zadeh com a publicação do seu famoso artigo *Fuzzy Sets*[5] no *Journal Information and Control* sobre a teoria dos conjuntos fuzzy.

A matemática fuzzy nos dá suporte para representar e analisar muitas experiências humanas que não podem ser classificadas simplesmente em função de sistemas com verdadeiro ou falso, sim ou não, certo ou errado. No meio da completa certeza e completa incerteza do pensamento humano existem graus de certeza e de incerteza inerentes ao próprio pensamento. A situação da probabilidade de uma mulher estar sozinha de acordo com sua idade é um exemplo disso.

Para Cox (1994, p.12)', a lógica fuzzy, com base na teoria dos conjuntos fuzzy, permite não só um terceiro estado, mas outros estados dependendo do grau de certeza que se quer ter. O autor ainda afirma que ela se parece adequada para o tratamento de informações imprecisas, algo característico do pensamento humano, podendo ser entendida como uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, descritas de uma forma natural, e convertê-las em números, para uma fácil manipulação, inclusive com o uso de computadores.

Levando em consideração que há uma outra (ou outras) possibilidade para representar matematicamente situações da realidade, podemos analisar as atividades de Modelagem Matemática sob o ponto de vista fuzzy. Para tanto, é importante que alguns conceitos como 'conjunto fuzzy', 'números Fuzzy', 'variáveis linguísticas' e 'sistema fuzzy' entrem na análise.

O conceito de 'conjunto fuzzy' está associado à ideia de que todo conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função, chamada função característica. Essa função, de acordo com Barros e Bassanezi (2006), é definida como:

> Seja *U* um conjunto e *A* um subconjunto de *U*. A função característica de *A* é dada por $\chi_A \ (x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in A \\ 0, \text{ se } x \notin A \end{cases}$. Esta função está definida para todos os elementos do universo *U*. Assim, ela mapeia *U* aos seus dois únicos elementos {0,1}, ou seja, $X_A : U \rightarrow \{0,1\}$ (p.13)

Dito de outra forma, essa função poderia muito bem representar o pensamento aristotélico, ou seja, dizer se uma coisa é ou não é. Exemplos típicos são aqueles conjuntos que são bem definidos, como é o caso dos conjuntos dos números Naturais, Inteiros, Racionais, Reais e Complexos. Sabemos, por exemplo, que $2 \in N$ e que $0{,}5 \notin N$.

[5] Veja artigo completo em ZADEH, L. A; Fuzzy Sets; Information and Control, v.8, n.1, p.338-353, 1965.

Entretanto, na atividade de modelagem em que queremos determinar a idade em que é menor a probabilidade de uma mulher ficar sozinha, o conjunto não é bem definido, pois neste caso, a idade pode ser percebida como algo aproximado, vago, nebuloso. Daí a necessidade de se estruturar o conceito de função de pertinência, definido por Barros e Bassanezi (2006, p.13) como:

> Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função $\varphi_F: U \rightarrow [0,1]$, pré-fixada, chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F. E por comodidade, o subconjunto fuzzy será tratado como conjunto fuzzy.

Essas funções de pertinência utilizam números Fuzzy, que são uma extensão dos números crisp[6], e são eles que valoram as chamadas variáveis linguísticas (KOSKO, 1993; REZNIK, 1997), definidas para Cox (1994) como "a representação de um espaço fuzzy" (p.213), ou ainda, como "elementos simbólicos utilizados para descrever o conhecimento" (WEBER; KLEIN, 2003, p.33). Essas variáveis podem ser representadas por diversos tipos de funções de pertinência, as mais usadas são: triangulares, trapezoidais, em forma de sino, tipo Z, tipo π (Pi), tipo λ (Lambda) e tipo S.

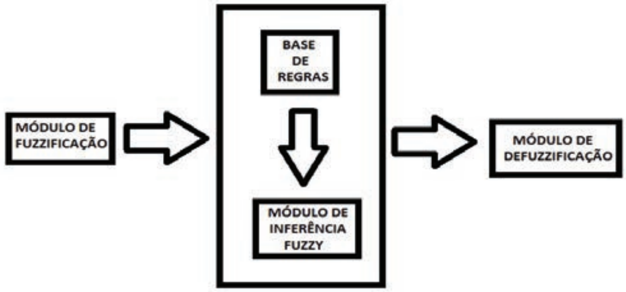
A teoria de sistemas fuzzy, aliada às funções de pertinência, cria uma ferramenta muito robusta para resolver problemas, mesmo simples, e com ampla aplicabilidade. Sistemas fuzzy, para Weber e Klein (2003), são "um conjunto de variáveis de entrada (sendo cada uma, uma coleção de conjuntos), uma coleção de conjuntos para a variável de saída e uma coleção de regras que associam as entradas para resultar em conjuntos para a saída" (p.34). Considerando essa estruturação de entrada, um conjunto de regras e a saída, podemos inferir uma aproximação entre a definição proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2012) que uma atividade de Modelagem Matemática:

> [...] pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.12)

E esses procedimentos, outrora divididos por Bassanezi (2002) em abstração, resolução, validação, modificação e aplicação, na teoria fuzzy, compõem o sistema fuzzy, composto basicamente de 4 componentes: módulo de fuzzificação, base de regras, módulo de inferência e módulo de defuzzificação, conforme podemos verificar na Figura 10. O módulo de fuzzificação "é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios" (BARROS; BASSANEZI, 2006, p.105).

[6] Na literatura fuzzy os autores costumam chamar os conjuntos/números clássicos (não fuzzy) de conjuntos/números crisp.

FIGURA 10 – Esquema de um Controlador Fuzzy.



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p.107).

Utilizando a atividade de modelagem anteriormente descrita, para exemplificar a fuzzificação, podemos verificar que, para a variável linguística 'idade' podem ser determinadas algumas funções de pertinência, aceitas pela sociedade, referentes à idade da mulher, a saber, 'adulta', de 'meia-idade' e de 'terceira idade'. De posse desses termos, foi adotado como domínio da idade das mulheres, conforme Figura 8, o intervalo [30,60]. No mesmo processo, foram definidas as funções que 'melhor' se adequam a esses termos linguísticos: uma função em forma de sino para as variáveis 'adulta' e de 'meia-idade' e a função S para a variável de 'terceira idade', como pode ser visto na Figura 11, obtida a partir do software MATLAB[7].

FIGURA 11 – Funções de pertinência – Entrada.

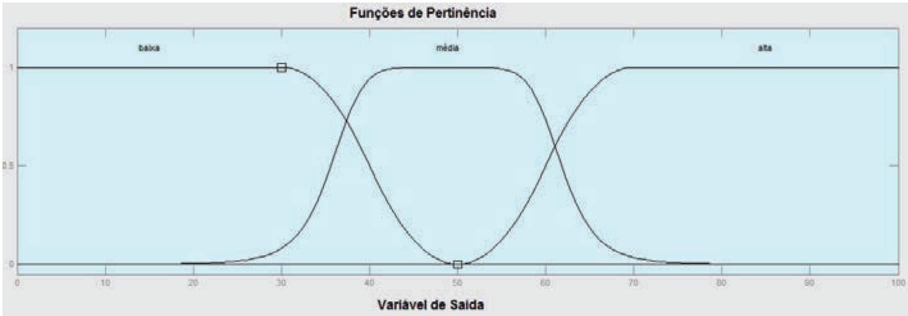
Fonte: http://www.mathworks.com/index.html

Para a variável de saída 'Probabilidade de Estar Sozinha' definimos três funções de pertinência: baixa, média e alta, cada uma representada pelas funções Z, em forma de sino e S, respectivamente, com domínio no intervalo [0,100]. Na Figura 12 apresentamos essas informações.

---

[7] Para maiores informações acesse a página do fabricante http://www.mathworks.com/index.html

FIGURA 12 – Funções de pertinência – Saída.



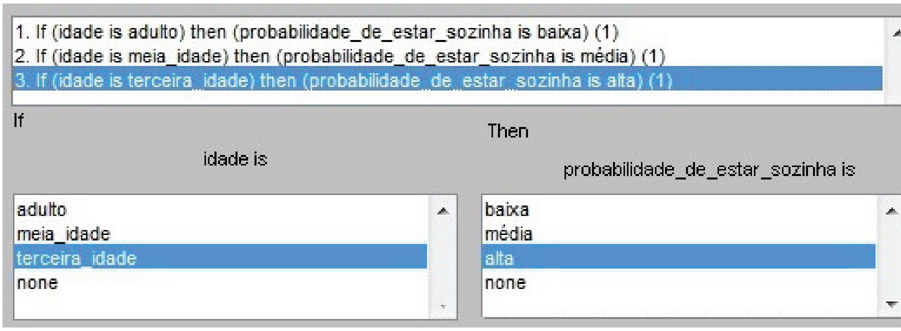
Fonte: http://www.mathworks.com/index.html

Nesse processo de fuzzificação podemos inferir que ocorre uma transformação de um sistema semiótico para outro, de acordo com a teoria de Duval, pois acontece o processo de conversão. Parte-se do sistema semiótico que contém os ‘termos linguísticos’ para o sistema semiótico que contém as funções de pertinência. Na teoria de Wittgenstein, temos a mudança de um jogo de linguagem para outro, pois nas palavras do autor, mudam-se as regras, mudam-se os jogos.

No que diz respeito à Base de Regras, os autores Barros e Bassanezi (2006), Reznik (1997), Cox (1994), Weber e Klein (2003) e Shaw e Simões (2007) convergem em relação à ideia de que esse módulo é o núcleo do sistema fuzzy, ou seja, é nesse momento que se desenvolve um conjunto de regras que têm a forma de declarações linguísticas do tipo ‘se-então’ que fornecem todo o controle do sistema. A Figura 13 mostra a Base de Regras usada para a atividade de Modelagem Matemática em foco. Podemos observar que, se ela é adulta, então a probabilidade de estar sozinha é baixa; se ela é de ‘meia-idade’, então a probabilidade de estar sozinha é média; e se ela é de ‘terceira idade’, então a probabilidade de estar sozinha é alta.

Pela figura 13 é possível verificar que a linguagem utilizada é muito próxima da linguagem natural, aparecendo apenas alguns termos cunhados da lógica, como o ‘se’ (*if*) e o ‘então’ (*then*), que servem para articular a variável de entrada com a variável de saída e suas funções de pertinência.

FIGURA 13 – Base de regras.



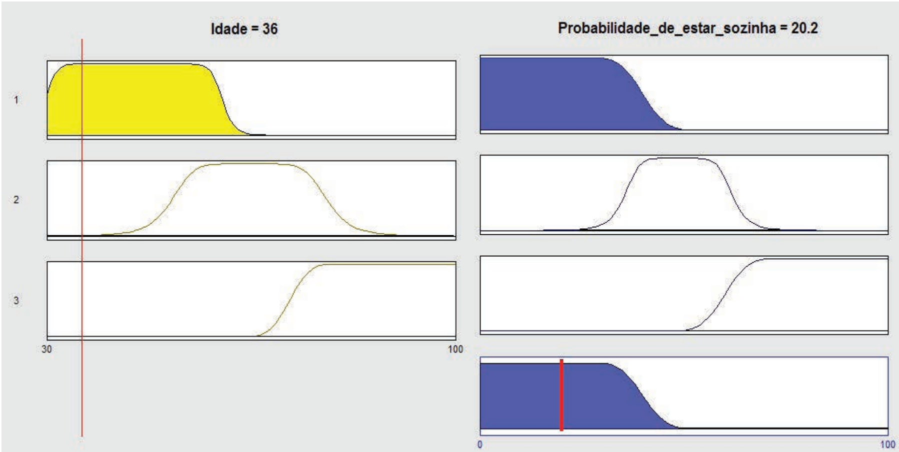
Fonte: autor.

Barros e Bassanezi (2006) afirmam que é no módulo de inferência que ocorre a ‘tradução’ das proposições fuzzy em modelos matemáticos. Nele se definem quais t-normas, t-conormas[8] e regras de inferência serão utilizadas para modelar o sistema. Dois métodos têm sido muito utilizados por modeladores fuzzy: o de Mamdani e o de Sugeno.

Na atividade de modelagem, o método de inferência utilizado foi o de Mamdani[9], cuja ideia é baseada numa relação fuzzy binária, chamada de M, entre x e u, utilizando a composição de inferência max-min, ou seja, em cada regra da Figura 13, a condicional “se x é A_j então u é B_j” é modelada pela aplicação $\wedge$ (mínimo), adotando-se a t-norma $\wedge$ (mínimo) para conectivo lógico “e” e o conectivo “ou” para a t-conorma $\vee$ (máximo), cuja função é conectar as regras da base de regras. Esses passos do módulo de inferência podem ser vistos resumidamente na Figura 14.

[8] Assim como nos conjuntos fuzzy, é necessário estender a lógica clássica à lógica fuzzy. Os conectivos da lógica clássica, ‘e’ e ‘ou’, são estendidos, respectivamente por meio das chamadas t-normas e t-conormas triangulares.
[9] Veja o método completo em *An experiment in liguistic synthesis with a fuzzy logic controller*, de 1975 de E. H. Mamdani e S. Assilian.

FIGURA 14 – Módulo de Mamdani.



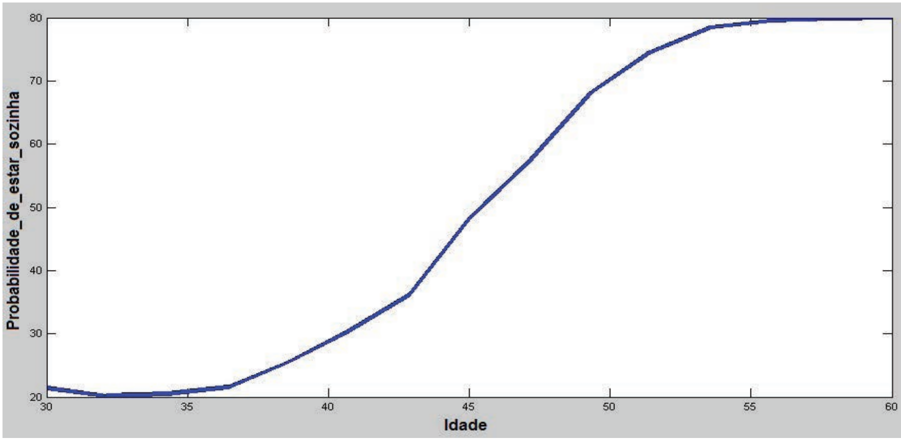
Nota-se que há uma mudança na linguagem: parte-se de uma linguagem natural e ruma-se para uma linguagem fuzzy. Essa mudança decorre da necessidade de representação de um modelo que sintetize os dados levantados. Isso se dá por meio de uma mudança nas regras e na gramática utilizada, provocando uma mudança no jogo de linguagem e nos signos utilizados.

O módulo de defuzzificação é o processo que permite representar um conjunto fuzzy por meio de um valor crisp. Esse módulo possui diversos métodos, sendo que os mais usuais são o Centro de Gravidade ou Centroide, o Centro de Máximos e a Média dos Máximos.

Para nossa atividade, foi utilizado o método da Centroide, que pode ser aproximado à média aritmética ponderada de uma distribuição de dados, onde os pesos são os graus de pertinência, que indicam o grau de compatibilidade do valor da variável com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy. O que esse método faz é calcular a área de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um conjunto fuzzy.

Na Figura 14 pode-se perceber que o último gráfico inferior à direita possui uma curva em forma de sino. A defuzzificação pelo método da centroide (ou da gravidade ou do centro de área) revela o valor defuzzificado de 20.2, que seria a probabilidade de uma mulher estar sozinha com a idade de 36 anos e que parece estar mais próxima dos dados inicialmente apresentados no gráfico da Figura 8 do que aqueles a que se refere a Tabela 2. Ao final do processo desses módulos, obtivemos um modelo matemático representado pelo gráfico da Figura 15 em que podemos observar que a probabilidade de uma mulher ficar sozinha cresce na medida em que sua idade varia entre 35 e 60 anos.

FIGURA 15 – Modelo Fuzzy.



Fonte: autor.

Na atividade de modelagem estudada, ambas as resoluções, a 'clássica' e a 'fuzzy', se mostraram profícuas, pois, ao mesmo tempo em que se distanciam, se aproximam. Se distanciam pelo fato de as regras, a gramática (na concepção de Wittgenstein) e as representações serem diferentes. Se aproximam, pois o 'modelo final fuzzy' (Figura 15) possui 'semelhanças' em relação ao 'modelo final clássico' apresentado na Figura 9, o que nos permite inferir que, apesar de possuírem gramáticas com regras distintas, levando a jogos de linguagem distintos, elas possuem 'semelhanças de família', uma vez que a idade mínima obtida pela matemática fuzzy não se afasta da idade mínima obtida na matemática clássica.

FINALIZANDO, MAS AINDA NÃO CONCLUINDO – AFINAL ESTÁ EM FOCO A LINGUAGEM

À luz dos referenciais teóricos usados, podemos considerar que, em algumas situações o que diferencia os modelos matemáticos, é na verdade, a linguagem. Ou seja, diferentes modelos matemáticos parecem ser, na verdade, diferentes linguagens, utilizadas para representar um mesmo 'sistema'. Se, por um lado, pensamos nas relações entre variáveis mediadas por expressões algébricas, por exemplo, por outro lado, crianças cuja escolarização ainda não os colocou em contato com o conceito de função e obtenção destas expressões, resolvem os problemas obtendo modelos desprovidos dessa representação, mas ainda assim constituem soluções. No mesmo sentido, se por um lado estudantes de um curso de graduação, por exemplo, tratam de máximos e mínimos obtendo valores exatos, por outro lado, uma linguagem fuzzy pode apresentar soluções menos precisas, mas, provavelmente, mais próximas da solução deste problema no seu contexto de origem.

O que se pode afirmar neste sentido é que o uso de diferentes linguagens pode ocorrer em qualquer nível de escolaridade, desde as Séries Iniciais da Educação Básica até os anos finais do Ensino Superior. Não é a sofisticação da matemática que irá trazer à tona uma nova linguagem, mas sim, as formas de vida e o contexto em que as atividades de Modelagem Matemática são desenvolvidas.

Essas formas de vida definem diferentes regras a serem utilizadas, o que, por sua vez, nos leva a utilizar diferentes linguagens nas diferentes representações para os modelos matemáticos, ou ainda para Wittgenstein, nos diferentes 'jogos de linguagem'.

Esses diferentes jogos são expressos por signos, cuja significação pode variar conforme seus usos e, diferentes representações semióticas podem ser utilizadas, o que nos leva a concluir que é preciso ensinar e inserir os estudantes em diversos jogos de linguagem, que lhes possibilitarão identificar e relacionar características presentes nas diferentes representações semióticas e lidar com as diferentes linguagens.

Portanto, se compararmos a linguagem utilizada nos modelos matemáticos por estudantes de diferentes níveis de escolaridade, as linguagens certamente serão diferenciadas, os signos usados serão outros, pois os estudantes estão imersos em jogos de linguagem, provenientes do contexto e da forma de vida em questão. Entretanto, os conceitos envolvidos podem ser os mesmos, o que resguarda semelhanças de família nos diferentes modelos matemáticos, entre as diferentes linguagens utilizadas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

______. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (En línea)*, v.6, p.8-17, 2011.

ARAÚJO, I. L. *Do signo ao discurso*: introdução à filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola Editorial, 2004.

BARON, M. E. *Curso de história da matemática*: origens e desenvolvimento do cálculo (Matemática Grega). Editora Universidade de Brasília, 1985, unidade 1.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Campinas. SP: Coleção IMECC, 2006.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BERGER, P. L.; LUCKMANN, T. *A construção social da realidade*: tratado de sociologia do conhecimento. 28.ed. Trad. Floriano de Souza Fernandes. Petrópolis: Vozes, 2008.

COX, E. *The Fuzzy Systems Handbook*: a practioner's guide to building, using and maintaining fuzzy systems, Academic Press, 1994.

CUNHA, A. G. da. *Dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da

compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA, S. D. (Org.). *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2011, p.11-33.
______. *Sémiosis e pensamento humano*: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. Tradução de: Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissageges intellectuels.
FERREIRA, A. B. H. *Dicionário Aurélio*. R.J.: Ed. Nova Fronteira, 1986.
______. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa.* 2. ed. Rio de Janeiro, R. J.: Nova Fronteira S.A, 1986.
GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Caderno CEDES*, Campinas, v.28, n.74, Apr. 2008. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-3262200800 0100006 &lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 19 Abr. 2012.
HOUAISS, A. *Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.
KOSKO, B. *Fuzzy Thinking*. New York: Hyperion, 1993.
MEYER, J. F.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.
PEIRCE, C. S. *Semiótica*. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v.46. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos).
REZNIK, L. *Fuzzy Controllers*. Reino Unido: Newnes, 1997.
SANTOS, V. de M. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009, v.1, p.117-126.
SHAW, I. S.; SIMÕES, M. G. *Controle e Modelagem Fuzzy*. São Paulo: Edgard Blücher, 2007.
VILELA, D. S. *Matemáticas nos usos e jogo de linguagem*: ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. 247f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, SP, 2007.
WEBER, L.; KLEIN, T. A. P. *Aplicações da Lógica Fuzzy em Software e Hardware*. Canoas: ULBRA, 2003.
WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Trad. Marcos G. Nontagnoli. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.
ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, v.8, n.1, 1965, p.338-353.

Recebido em: maio 2012 **Aceito em**: jul. 2012