Los implícitos en el discurso tecnológico-teórico en dos libros de álgebra lineal

Diana Pozas
Marlene Alves Dias

RESUMEN

En el marco de un proyecto de investigación analizamos cómo se caracteriza el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en dos libros de álgebra lineal utilizados en carreras de ingeniería de universidades argentinas. El análisis toma elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard y Bosch; la noción de cuadro de Douady y los niveles de conocimiento que se esperan de los alumnos, de acuerdo con Robert. Los resultados indican que en ambos libros los autores consideran como conocimientos disponibles muchas nociones que se suponen ya han sido trabajadas en la escuela secundaria y que resultan indispensables para hacer inteligible el discurso tecnológico – teórico utilizado.

Palabras clave: Sistema de ecuaciones lineales. Textos de álgebra lineal. TAD.

The implicit of the theoretical technological discourse of two books of linear algebra

ABSTRACT

As part of a research project we have analyze the study of systems of linear equations in two linear algebra books used in engineering courses at Argentinean universities. The analysis uses theoretical elements from the Anthropological Theory of Didactics (ATD) by Chevallard and Bosch, the notion of Douady's frame and levels of knowledge expected from the students, according to Robert. The results indicate that in both books the authors consider as available knowledge many notions that should have already been worked in secondary school and are essential to make the technological-theoretical discourse used intelligible.

Keywords: System of linear equations. Linear algebra texts. ATD.

Diana Pozas é atualmente professora Doutora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhnaguera de São Paulo. E-mail: dianapozas@hotmail.com
Marlene Alves Dias é Doutora em Matemática – Didática da Matemática. Atualmente, é docente da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. Endereço para correspondência: Rua Sobrália, 407, Vila Gea, São Paulo, São Paulo – Brasil. CEP: 04691-020. E-mail: maralvesdias@gmail.com
Recebido para publicação em 21/3/2016. Aceito, após revisão, em 23/4/2017.

O implícito do discurso tecnológico teórico de dois livros de álgebra linear

RESUMO

Como parte de um projeto de pesquisa, analisamos o estudo de sistemas de equações lineares em dois livros de álgebra linear usados em cursos de engenharia em universidades argentinas. A análise utiliza elementos teóricos da Teoria Antropológica da Didática (ATD) por Chevallard e Bosch, a noção de quadro de Douady e os níveis de conhecimento esperados dos alunos, de acordo com Robert. Os resultados indicam que, em ambos os livros, os autores consideram como conhecimento disponível muitas noções que já deveriam ter sido trabalhadas no ensino secundário e são essenciais para tornar inteligível o discurso teórico-tecnológico.

Palavras-chave: Sistema de equações lineares. Textos de álgebra linear. ATD.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en una investigación en curso referida al estudio de las praxeologías en torno a las matrices, función determinante y sistema de ecuaciones lineales propuestas para el Ciclo Básico de las carreras de Ingeniería. En los últimos años numerosas investigaciones analizan la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en carreras de ingeniería. (MOLINA, 2000; SCHMAL, 2012; CAMARENA, 2006; BUCARI et al., 2007; MAGUNA; OKULIK, 2013; MONTERO et al., 2002). En particular, durante las últimas décadas se han producido importantes cambios y avances en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en el nivel universitario. Los trabajos de Sierpinska (2000) y de Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) dan cuenta de las dificultades para el aprendizaje de diversos conceptos del álgebra lineal debido a que ésta posee, dentro de sus orígenes epistemológicos, una componente geométrica, y una fuerte componente teórica que la enriquece, con un carácter globalizador.

El objeto matemático sistema de ecuaciones lineales ha sido abordado por investigadores argentinos con diversos enfoques teóricos (PANIZZA et al., 1999; SESSA, 2005; ENGLER et al., 2001; SEGURA, 2004; LUCUY et al., 2009) y refiriéndose, en general, a la enseñanza en la escuela secundaria. Asimismo, en varias investigaciones se reporta que en los primeros cursos universitarios los estudiantes poseen y adquieren conocimientos algebraicos pero prescinden del empleo de la geometría para analizar y correlacionar conceptos en la resolución de problemas. Con referencia a sistemas de ecuaciones lineales, los estudiantes universitarios alcanzan a dominar las técnicas de resolución pero presentan serias falencias en la comprensión y en la visualización del conjunto solución, aún en IR^2.

El objetivo del presente trabajo es describir y analizar las organizaciones matemáticas (OM) relativas a los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen en dos libros muy utilizados en carreras de ingeniería de las universidades públicas argentinas.

Consideramos que en el nivel universitario los libros de texto están en todo proceso de estudio, son elementos fundamentales de la actividad en el aula y, a menudo, se convierten en el esquema conceptual de la clase. Muestran lo que debe ser considerado como relevante para la disciplina, por ejemplo, los problemas y las maneras de resolverlos. De manera que siempre participan de una u otra forma en el proceso de enseñanza y de aprendizaje y es por ello que han sido objetos de múltiples investigaciones educativas bajo diversos paradigmas teóricos.

Para el análisis de los textos seleccionados tomamos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (CHEVALLARD, 1997, 1999, 2001, 2007); las nociones de cuadro, herramienta y objeto (DOUADY, 1984, 1992) y los niveles de conocimiento que se esperan de los alumnos (ROBERT, 1998). Seguidamente, explicitaremos algunas cuestiones teóricas y metodológicas que orientaron la elaboración de un instrumento de análisis, el cual se aplicó a varias tareas que se proponen en los textos seleccionados. Observamos que en ambos libros los autores consideran como conocimientos disponibles muchas nociones que se suponen ya han sido trabajadas en la escuela secundaria. Sabiendo que esto no es así, observamos una gran cantidad de implícitos que deben ser explicitados por el profesor y/o el estudiante para llevar a buen término el desarrollo de una tecnología.

REFERENCIAL TEÓRICO

En esta investigación tomamos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante, TAD (CHEVALLARD, 1999). La TAD propone modelizar cualquier actividad humana en términos de *praxeologías*. El caso de la actividad matemática es un caso particular que llamaremos praxeología matemática u organización matemática (OM). Sus componentes fundamentales son por un lado los tipos de tareas y las técnicas para resolverlas, ambas conforman el bloque de la "praxis". Por otro lado la tecnología, que es el discurso racional sobre la técnica y la teoría que es el argumento formal que justifica en última instancia a la tecnología, ambas conforman el bloque del "logos" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997).

En el enfoque antropológico se concibe la noción de estudio en un sentido muy general e integrador. Se aplica a un ámbito más amplio que el del aula e, incluso, más general que el de las propias instituciones didácticas, abarcando desde la actividad de los investigadores hasta la que realizan los alumnos. La consideración de diversos procesos de estudio permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos. La TAD propone aquí un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de *momentos didácticos* (CHEVALLARD et al., 1997; CHEVALLARD, 1999, 2001). Brevemente, diremos que se distinguen seis momentos didácticos: 1) el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; 2) el momento exploratorio del tipo de tareas; 3) el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico; 4) el momento del trabajo de la técnica; 5) el momento de la institucionalización, y 6) el momento de la evaluación.

Bosch y Chevallard (1999) enfatizan el hecho de que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a nuestros sentidos, son objetos *no ostensivos*. Los no ostensivos son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. En una determinada actividad matemática, trabajamos con éstos a través de las representaciones ostensivas apropiadas. Los objetos *ostensivos* se perciben porque están dotados de cierta materialidad, como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos. El enfoque antropológico atribuye a los objetos ostensivos un valor semiótico (los signos), y un valor instrumental ligado a la capacidad para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Los objetos ostensivos se consideran constitutivos de las organizaciones matemáticas e ingredientes primarios de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías (BOSCH, 2000).

Otro elemento teórico que tomamos para nuestro análisis es la noción de *cuadro*. Douady (1992) define que un cuadro está constituido por: objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre dichos objetos, sus diversas formulaciones y las imágenes mentales posiblemente asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Estos elementos juegan un rol esencial como herramientas dentro del funcionamiento del cuadro. Además es importante mencionar que esta definición permite transponer el trabajo del matemático al dominio de la didáctica por medio de la noción "cambio de cuadro", esto es, obtener diferentes formulaciones de un problema que permiten la puesta en marcha de herramientas y técnicas, que no es posible realizar dentro de la primera formulación. Para esta investigación diremos brevemente que consideramos cuatro cuadros: sistemas lineales, matrices, determinantes y geometría euclideana.

Para complementar el análisis de los tipos de tareas que se proponen en un libro de texto haremos referencia a la noción: *niveles de conocimiento esperados de los estudiantes.* Robert (1997) propone tres tipos de niveles. Hay que destacar que no existe una jerarquía absoluta entre ellos sino que, al menos en la enseñanza, dependen de los objetivos del docente. Los niveles de conocimiento esperados en relación al desempeño del estudiante se identifican como: técnicos, movilizantes y disponibles.

Nivel técnico: en la resolución de una tarea, un estudiante opera a nivel técnico cuando realiza un trabajo acotado y aislado. Este trabajo generalmente se caracteriza por la utilización de una sola técnica o por la aplicación de una definición, propiedad o teorema. El estudiante encuentra explícitamente en el enunciado de la tarea todos los elementos necesarios para su realización.

Nivel movilizante: el estudiante comienza a relacionar y a organizar saberes dentro de un mismo dominio, incluso puede aplicar varias técnicas en la resolución de la tarea, movilizando conocimientos que están explícitos en el enunciado, o que pueden ser sugeridos por el docente.

Nivel disponible: el estudiante es capaz de resolver una tarea sin indicaciones, pone en juego conocimientos que no están explícitos en el enunciado. Por ejemplo: cambiar de cuadro, utilizar ostensivos adecuados, articular diferentes nociones matemáticas, buscar contraejemplos. A este nivel de conocimiento generalmente se asocian problemas enunciados en el contexto de la vida cotidiana o aplicaciones a otras ciencias, por ejemplo, la Física. Pero también hay problemas, sobre todo en el nivel superior, de interés intra-matemático que el estudiante debe poder abordar con autonomía para avanzar en su formación matemática.

Los diseños curriculares de matemática en la educación secundaria argentina

En los lineamientos curriculares para los primeros años de la educación secundaria argentina se encuentra un eje transversal asociado al álgebra y a las funciones. El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, en adelante SEL, se reduce al estudio de dos métodos de resolución y de algunos problemas contextualizados que deben resolverse vía "traducción" al lenguaje algebraico. El estudio de los SEL de 2x2 se hace generalmente en tercer año (15 años edad promedio). La enseñanza de los métodos de resolución en este nivel escolar focaliza en los que se pueden identificar como convencionales, estos son, método gráfico y sustitución. El estudio de los SEL gesta un entorno tecnológico que justifica el estudio de conceptos formales del Álgebra Lineal, conceptos que se encuentran excluidos del diseño curricular de matemática de la escuela secundaria.

Respecto a nociones de Geometría Analítica, se sugiere el estudio de vectores en el plano y en el espacio, operaciones, ecuación vectorial y ecuación paramétrica de rectas y planos. Pero, a excepción de las nociones utilizadas en Física, raramente se alcanzan a estudiar los conceptos mencionados.

METODOLOGÍA

El objetivo del presente trabajo es describir y analizar las OM relativas a los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen en dos libros de texto universitarios. Para ello proponemos un estudio cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo.

Adoptamos la propuesta de Lüdke y André (1986, apud SÁ-SILVA, ALMEIDA, GUINDANI, 2009) quienes consideran que la investigación documental es una parte esencial de un proceso sistemático de investigación cualitativa, constituyéndose en una estrategia operacional donde se observa y reflexiona sistemáticamente sobre realidades usando para ello diferentes tipos de documentos. Comenzamos la recolección y análisis de los documentos de la siguiente manera:

1. Relevamiento de los programas de cátedra de todas las universidades públicas argentinas que dictan carreras de ingeniería. Registro de la bibliografía utilizada en los cursos de álgebra y geometría.

2. Elaboración de un instrumento de análisis.

3. Selección de una muestra de cinco libros. Análisis de los mismos.

Herramientas didácticas que componen la grilla de análisis

En consonancia con el referencial teórico de esta investigación y para caracterizar las praxeologías existentes en los libros, elaboramos un instrumento de análisis tomando como modelo uno diseñado por Dias (1998).

FIGURA 1 – Instrumento de análisis.

Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea	1) primer encuentro 2) momento exploratorio 3) construcción de un entorno tecnológico-teórico 4) trabajo de la técnica 5) institucionalización 6) evaluación.
Cuadro en que la tarea es enunciada	1) cuadro de los sistemas lineales 2) de las matrices 3) de los determinantes 4) de la geometría euclideana.
Cuadro en que la tarea puede ser resuelta	1) cuadro de los sistemas lineales 2) de las matrices 3) de los determinantes 4) de la geometría euclideana.
No ostensivos evocados	dependen de la tarea
Ostensivos que se manipulan	dependen de la tarea
Nivel de conocimiento esperado	1) técnico 2) movilizante 3) disponible

Fuente: las autoras.

Anticipando que en los libros se encontrarán muchos tipos de tareas diferentes, se pensó en una manera de agruparlos a fin de posibilitar la aplicación de la grilla de análisis a un número representativo de ejemplos. Para ello se clasificaron los tipos de tareas según el género al cual pertenecen (CHEVALLARD, 1999).

A continuación, para cada libro, presentaremos unos comentarios generales sobre el capítulo de Sistemas de Ecuaciones Lineales. Seguidamente mostraremos el funcionamiento de la grilla de análisis sobre algunas tareas que cada uno de los autores proponen en la sección de ejercicios.

David Poole (2011). *Álgebra lineal*. Una introducción moderna

Este libro está dirigido a estudiantes de diversas carreras, especialmente adecuado para cursos introductorios de álgebra lineal. Los temas que incluye se dividen en 7 capítulos: 1.Vectores – 2.Sistemas de ecuaciones lineales – 3.Matrices –

4.Eigenvalores y eigenvectores – 5.Ortogonalidad – 6.Espacios vectoriales – 7.Distancia y aproximación.

Según el autor, el álgebra lineal trata esencialmente de vectores, por lo cual los estudiantes deben ver primero vectores en un escenario "concreto" con la finalidad de obtener cierta comprensión geométrica. Es decir, se comienza trabajando con vectores en IR^2 y en IR^3, generalizando para IR^n. En este primer capítulo se desarrollan muchos conceptos que aparecen a lo largo del texto, por ejemplo, las propiedades algebraicas de los vectores en IR^n y la noción de combinación lineal.

El autor comienza el capítulo sobre sistemas de ecuaciones lineales ejemplificando de manera muy resumida el concepto de solución o de conjunto solución. Se asume de este modo que el lector ya dispone de herramientas explícitas, en el sentido de Douady, para realizar ciertas tareas de álgebra lineal.

Veamos, a modo de ejemplo, la tecnología que desarrolla para resolver la siguiente ecuación lineal:

FIGURA 2 – ejemplo de conjunto solución.

(b) La ecuación lineal $x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$ tiene $[3, 0, 0]$, $[0, 1, 2]$ y $[6, 1, -1]$ como soluciones específicas. El conjunto completo de soluciones corresponde al conjunto de puntos en el plano determinado por la ecuación dada. Si se hace $x_2 = s$ y $x_3 = t$, entonces una solución paramétrica está dada por $[3 + s - 2t, s, t]$.(¿Cuáles valores de s y t producen las tres soluciones específicas anteriores?)

Fuente: Poole (2011, p. 65).

El autor también desarrolla otros ejemplos asumiendo que el estudiante está familiarizado con la ecuación de la recta en el plano cartesiano. Recordemos que en el capítulo 1 se estudiaron las rectas en IR^2 desde un punto de vista vectorial. Luego, se deducen las ecuaciones que definen rectas y planos en IR^3. Estos desarrollos, sin embargo, no permiten que el estudiante escriba naturalmente el conjunto solución de una ecuación con dos variables en forma paramétrica, y mucho menos, si se trata de una ecuación con tres variables. Además, a esto se suma el hecho que para todo sistema con infinitas soluciones, el conjunto solución no tiene una única descripción paramétrica.

En relación a los métodos para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales, se introduce con un ejemplo la noción de matriz aumentada. Trabajando en paralelo con el sistema de ecuaciones se lleva tanto la matriz como el sistema a la forma escalonada mediante operaciones elementales. La noción de matriz no se define formalmente, el autor señala que sólo se emplea como notación que facilita la escritura, ya que sólo se realizan operaciones aritméticas sobre los coeficientes del sistema, no sobre las variables. Bajo la premisa de la reversibilidad de las operaciones elementales, la tecnología para resolver un sistema consiste en reemplazar la matriz aumentada por otra equivalente. Queda a cargo del profesor y del estudiante explicitar por qué las operaciones elementales no alteran el conjunto solución del sistema original.

Ejemplo 1

Género de tarea: calcular

Tipo de tarea: discutir sistemas de ecuaciones lineales con parámetros

FIGURA 3 – ejemplos de sistemas con parámetros.

En los ejercicios 40-43, ¿para qué valor(es) de k, si hay alguno, los sistemas tendrán (a) ninguna solución, (b) una solución única y (c) un número infinito de soluciones?

40. $\begin{aligned} kx + y &= -2 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} x + ky &= 1 \\ kx + y &= 1 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 4y - z &= k \\ 2x - y + 4z &= k^2 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= -2 \end{aligned}$

Fuente: Poole (2011, p. 87).

- *Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea*: momento de primer encuentro, momento de trabajo de la técnica.
- *Cuadro en que la tarea es enunciada*: cuadro de los sistemas lineales.
- *Cuadro en que puede resolverse la tarea*: cuadro de los sistemas lineales, cuadro de las matrices.
- *No ostensivos evocados*: noción de parámetro, posibles conjuntos solución de un sistema de ecuaciones, método de Gauss, matriz escalonada.
- *Ostensivos que se manipulan*: ostensivos algebraicos para representar sistemas de ecuaciones, ostensivos matriciales de un sistema.
- *Nivel de conocimiento esperado*: movilizante.

Si tenemos en cuenta que el autor no desarrolló ningún ejemplo similar, este tipo de tarea puede ser ubicada en el momento del primer encuentro. En particular, para los sistemas de 2x2, puede ser un momento de reencuentro con objetos que se estudiaron en la escuela secundaria y aparecen de nuevo en una tarea diferente. No sería éste el caso para los sistemas de 3x3 que raramente se alcanzan a estudiar en la escuela secundaria. La única técnica que se desarrolla en el libro para resolver distintas tareas relativas a los SEL es el método de Gauss. No obstante, cuando existen parámetros en un sistema y el objetivo es discutir las condiciones para que el sistema tenga o no soluciones, es necesario detenerse a reflexionar un poco más sobre la técnica. Por ejemplo: ¿cómo elegir los mejores pivots sucesivos?, ¿en qué paso del método se puede empezar a discutir sobre los valores de un parámetro? Estos cuestionamientos acerca de la técnica quedan a cargo del estudiante.

Los no ostensivos mencionados son los conocimientos que el estudiante debería evocar y movilizar ante la pregunta explícita en el enunciado. Pero, a menudo suele suceder que para discutir un sistema en particular sean necesarios otros conocimientos a nivel disponible. En los sistemas de 3x3 de la figura anterior, por ejemplo, se espera que la factorización de expresiones de segundo grado sea un conocimiento previo disponible.

Ejemplo 2

Género de tarea: calcular.

Tipo de tarea: determinar el punto de intersección de dos rectas (en IR^3).

FIGURA 4 – Intersección de rectas en IR^3.

En los ejercicios 48 y 49, determine si las rectas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ *se intersectan y, si lo hacen, encuentre su punto de intersección.*

48. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

49. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Fuente: Poole (2011, p. 87).

- *Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea*: construcción entorno tecnológico – teórico, momento del trabajo de la técnica.
- *Cuadro en que la tarea es enunciada*: cuadro de la geometría euclideana y cuadro de las matrices.
- *Cuadro en que puede resolverse la tarea*: cuadro de los sistemas lineales.
- *No ostensivos evocados*: ecuación vectorial de la recta, noción de combinación lineal, noción de rectas paralelas, noción de parámetro, noción de incógnita, métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, noción de conjunto solución.
- *Ostensivos que se manipulan*: representación matricial de vectores, ostensivo algebraico para representar sistemas de ecuaciones lineales, ostensivo para representar el conjunto solución.
- *Nivel de conocimiento esperado*: disponible.

La tecnología desarrollada en el libro para resolver este tipo de tarea no está totalmente explicitada. En principio, dicha tecnología consiste en "mudarse" al cuadro de los sistemas de ecuaciones vía la noción de igualdad de matrices. En este ejemplo en particular, se trata de resolver un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Sin embargo, encontramos que la noción de parámetro, un no-ostensivo presente en la ecuación vectorial de la recta, y la noción de incógnita, ostensivo presente en el sistema de ecuaciones, son elementos problemáticos si el estudiante no tiene bien en claro la técnica que está empleando y el resultado que está obteniendo. En este sentido, la dialéctica entre ostensivos y no-ostensivos, juega un papel muy importante en la resolución de este tipo de tarea.

En relación al nivel de conocimiento esperado para este tipo de tarea, las posiciones relativas de las rectas en el espacio y las ecuaciones vectoriales, son conocimientos supuestos disponibles. Esta parte de la tecnología debería ser explicitada oportunamente por el profesor, atendiendo a las dificultades de los estudiantes que no dispongan de los conocimientos necesarios de Geometría Analítica. La articulación entre diversos cuadros y la elección de ostensivos adecuados para brindar una respuesta a esta tarea, quedan a cargo del estudiante.

Ejemplo 3

Género de tarea: demostrar.

Tipo de tarea: demostrar propiedades relativas a rectas y planos usando determinantes

FIGURA 5 – Demostrar propiedades.

12. Demuestre que los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales (están en la misma recta) si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fuente: Poole (2011, p. 300).

- *Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea*: momento de exploración, construcción entorno tecnológico – teórico, institucionalización.
- *Cuadro en que la tarea es enunciada*: cuadro de la geometría euclideana y cuadro de los determinantes.
- *Cuadro en que puede resolverse la tarea*: cuadro de la geometría euclideana y cuadro de los determinantes.
- *No ostensivos evocados*: procedimientos de validación propios de la matemática, noción de puntos colineales, teorema de Tales, noción de recta en el plano, noción determinante, métodos de resolución de determinantes.

- *Ostensivos que se manipulan*: coordenadas de un punto, representación gráfica de punto y recta en el plano, ecuación de la recta a través de un determinante de orden 3.
- *Nivel de conocimiento esperado*: disponible.

La resolución de este tipo de tarea requiere que el estudiante articule al menos dos cuadros. Podría comenzar con la evocación de la noción geométrica de colinealidad y la representación de los tres puntos colineales en un sistema de ejes ortogonales, es decir, por medio de un ostensivo gráfico. El estudiante debe disponer de saberes aprendidos en la escuela secundaria, como el Teorema de Tales y de distintos ostensivos para representar una recta en el plano. La articulación de estos conceptos con elementos del cuadro de los determinantes permite formular una definición de colinealidad (quizá nueva para el estudiante) que contribuye a la construcción de un entorno tecnológico-teórico. Además se justifica una técnica (quizá también nueva) para evaluar si tres puntos del plano son colineales.

Respecto al nivel de conocimiento esperado cuando se trata de *demostrar*, es generalmente, disponible. Pero es preciso destacar que cualquier deficiencia en relación a las nociones indicadas en la tecnología, en particular, aquellas que están implícitas, hace que dichas nociones operen a nivel disponible. En este caso, el estudiante debe disponer de conceptos de álgebra elemental, geometría euclideana, función lineal y determinante. Dichos conceptos desempeñan un papel de herramienta explícita en la resolución de la tarea.

Howard Anton (1994). *Introducción al álgebra lineal*

Los temas que se estudian en este libro se distribuyen en los siguientes capítulos: 1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices – 2. Determinantes – 3. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ – 4. Espacios vectoriales – 5. Transformaciones lineales – 6. Valores característicos, vectores característicos y formas cuadráticas – 7. Introducción a los métodos numéricos del álgebra lineal.

En el primer capítulo ya se utiliza la forma paramétrica para indicar el conjunto solución de una ecuación con dos incógnitas, explicado con un poco más de detalle que en el libro de Poole. Seguidamente, se definen las nociones de sistema consistente (inconsistente), matriz aumentada y operaciones elementales. Estos serían los elementos tecnológicos que permiten reemplazar un sistema dado por otro que tenga el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver. Al igual que en el libro de Poole, el discurso para llevar esto a cabo se presenta mediante un ejemplo ilustrativo trabajando en paralelo con el sistema de ecuaciones y la matriz aumentada.

Luego de sistematizar los pasos que conforman el método de “eliminación gaussiana”, el autor hace dos observaciones importantes. Una refiere a la unicidad de la forma escalonada reducida (no demuestra esta afirmación), y la otra, a la no unicidad de la forma escalonada.

El tratamiento de las demostraciones es variable. Algunas están desarrolladas con rigurosidad y en forma adecuada para un estudiante principiante. Otras se dejan a cargo del estudiante a modo de ejercicio y otras se omiten por completo, haciendo énfasis en las aplicaciones de los teoremas.

Ejemplo 4

Género de tarea: calcular

Tipo de tarea: dada una matriz en forma escalonada, resolver un sistema.

FIGURA 6 – ejemplos de matrices en forma escalonada.

4. En cada inciso, suponer que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido reducida mediante operaciones en los renglones a la forma escalonada reducida dada. Resolver el sistema.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fuente: Anton (1994, p. 36).

- *Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea*: momento del entorno tecnológico – teórico, momento de institucionalización.
- *Cuadro en que la tarea es enunciada*: cuadro de las matrices.
- *Cuadro en que puede resolverse la tarea*: cuadro de los sistemas lineales.
- *No ostensivos evocados*: noción de matriz ampliada, noción de forma escalonada, noción de variable libre, noción de conjunto solución.
- *Ostensivos que se manipulan*: ostensivo de matriz ampliada, ostensivo de forma escalonada, ostensivos algebraicos del conjunto solución de un sistema.
- *Nivel de conocimiento esperado*: movilizante.

Este tipo de tarea es de interés teórico ya que en la práctica generalmente se parte de un sistema de ecuaciones, es decir, del cuadro de los sistemas. Es importante que el estudiante comprenda exactamente qué significa en este contexto resolver el sistema.

Observando las cuatro matrices del enunciado surgen, por ejemplo, los siguientes cuestionamientos tecnológicos: ¿es posible descartar algún renglón?, ¿si se descartó un renglón, esto implica necesariamente que existen infinitas soluciones?, ¿cómo elegir las variables libres? Las respuestas justificadas quedan a cargo del profesor y/o del estudiante.

En definitiva, el énfasis está puesto en el estudio de las posibilidades de solución desde una correcta lectura de los renglones. Esto requiere movilizar conocimientos que superan la simple aplicación de la técnica.

Ejemplo 5

Género de tarea: calcular

Tipo de tarea: resolver casos particulares de sistemas no lineales.

FIGURA 7 – Sistema no lineale.

20. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para los ángulos desconocidos α, y β, donde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, y $0 \leq \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma &= 3 \\ 4\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma &= 2 \\ 6\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma &= 9 \end{aligned}$$

Fuente: Anton (1994, p. 37).

- *Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea*: momento del primer encuentro, momento del trabajo de la técnica.
- *Cuadro en que la tarea es enunciada*: cuadro de los sistemas de ecuaciones lineales.
- *Cuadro en que puede resolverse la tarea*: cuadro de los sistemas lineales y cuadro de las matrices.
- *No ostensivos evocados*: Funciones trigonométricas. Noción de cambio de variable. Método de Gauss. Noción de preimagen de una función trigonométrica.
- *Ostensivos que se manipulan*: ostensivos algebraicos de un sistema de ecuaciones lineales y su respectiva matriz ampliada. Representación algebraica de funciones trigonométricas y de sus argumentos.
- *Nivel de conocimiento esperado*: disponible.

Al igual que en el ejemplo 1, en este momento el estudiante se reencuentra con objetos que estudió en la escuela secundaria pero que aparecen en una tarea diferente. Sin embargo, el contrato didáctico sugiere que el sistema dado debería poder resolverse como un sistema de ecuaciones lineales. Cabe preguntarse: ¿por qué este sistema no es lineal? ¿qué pasa si se resuelve "como si fuera lineal"? La técnica para resolver esta tarea consiste en hacer un cambio de variables conveniente que simplifique el sistema y así facilitar su resolución. Para dar una respuesta final a este tipo de tarea, deberá disponer de conocimientos relativos a la preimagen de una función trigonométrica.

Hemos aplicado esta grilla de análisis a numerosas tareas propuestas en los libros seleccionados. Esto permite reflexionar sobre cómo un libro trata un concepto y visualizar cuáles aspectos de las técnicas deben ser enfatizados y explicados, lo cual implica analizar el discurso tecnológico-teórico utilizado por el/los autor/es.

CONSIDERACIONES FINALES

La enseñanza del álgebra lineal representa una parte importante de la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería en Argentina. Numerosas investigaciones dan cuenta de las dificultades para el aprendizaje de conceptos propios del álgebra lineal debido a que ésta posee un carácter unificador, generalizador y formalizador de conceptos matemáticos (DORIER, 2002). En este trabajo hemos focalizado en el estudio de la OM relativa a los SEL asumiendo que juegan un papel central en relación con todos los demás conceptos de esta disciplina.

Ya hemos mencionado que la enseñanza en la escuela secundaria trata esencialmente dos técnicas de resolución para sistemas de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (sustitución y gráfico). En términos de la TAD, las praxeologías giran en torno a un único tipo de tareas: resolver sistemas de ecuaciones lineales. Por lo tanto, en los comienzos de los estudios universitarios se produce un “salto cualitativo” en donde se reemplaza la problemática de resolver sistemas por la problemática del estudio teórico de los sistemas (DORIER, 1998).

En relación al método de Gauss y siguiendo a Rogalski (1994), el discurso tecnológico-teórico debería provocar cuestionamientos que se conviertan en problemas para los estudiantes y que justifiquen la introducción de conceptos de álgebra lineal. Por ejemplo, dado un sistema de ecuaciones que ha sido llevado a la forma escalonada, ¿cuáles ecuaciones son realmente útiles?

En los libros analizados a pesar de mostrar que la aplicación del método de Gauss puede realizarse tanto sobre un sistema dado, como sobre la matriz aumentada del sistema, siendo ambos adecuados para desarrollar el método, ambos autores privilegian el trabajo sobre la matriz aumentada (cuadro de las matrices), explicitando las operaciones elementales que se realizan sobre los renglones. En este enfoque se valora sobre todo la sistematización del método. Es decir, el método de Gauss es directo en el sentido de que conduce directamente a la solución, si existe, en un número finito de pasos.

En definitiva, el discurso tecnológico – teórico relativo a los Sistemas de Ecuaciones Lineales en ambos libros, está dirigido al estudio de ciertos conceptos y técnicas para que el estudiante comience un curso de Álgebra Lineal “con el pie derecho”. En efecto, los objetivos principales es que el estudiante tenga claros los siguientes puntos:

- Conceptos de matriz ampliada, matriz escalonada y conjunto solución de un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas.

- Resolución de un SEL mediante el método de eliminación de Gauss. Saber identificar mediante este método cuándo un SEL es consistente o inconsistente.
- Parametrización del conjunto solución de un SEL. Establecer las variables libres.

Es importante entonces destacar el enorme trabajo estructural que subyace en cualquier tecnología que apunte al logro de dichos objetivos.

Finalmente, debemos destacar que los libros de texto son el resultado de transposiciones didácticas (CHEVALLARD, 1991), motivo por el cual es importante tener en cuenta el contexto institucional en que fueron producidos. Muchos de los conocimientos necesarios para resolver los tipos de tareas que se analizaron en este trabajo no fueron estudiados en la escuela secundaria argentina. Por lo tanto, comenzar un curso de Álgebra Lineal utilizando libros diseñados para instituciones extranjeras podría convertirse en otro problema tanto para el profesor como para los estudiantes.

REFERENCIAS

ANTON, H. *Introducción al álgebra lineal.* 3.ed. Limusa: México, 1994.

BOSCH, M. Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. In: IV SIMPOSIO SEIEM. *Actas…*, 2000.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathematique aux ostensifs. Objet d'étude et de problematique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, v.19, n.1, p.77-124, 1999.

BUCARI N.; ABATE, S.; MELGAREJO A.; GUARDARUCCI M.; VACCHINO C. Innovación en la enseñanza de las matemáticas en carreras de Ingeniería, evaluación y perspectivas. In: XXI CONGRESO CHILENO DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA. *Actas…* Santiago de Chile, 2007.

CAMARENA, P. La matemática en el contexto de las ciencias en los retos educativos del siglo XXI*, Científica*, Distrito Federal, México, v.10, n.4, p.167-173, 2006.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v.19, n.2, p.221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica*. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CHEVALLARD, Y. *Organiser l'étude*. 1 .Structures & Functions, 30 octubre 2001. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52. Acceso: 06/12/2016.

CHEVALLARD, Y. *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*, 03 fevrero 1994. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125. Acceso: 06/12/2016.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudiar matemática*. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: Horsori, 1997.

DIAS, M. *Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. 500f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas), Université Dennis Diderot, París, 1998.
DORIER, J.; ROBERT, A.; ROBINET , R.; ROGALSKI, M. The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.
DORIER, J. L. Teaching linear algebra at university. In: ICM 2002. *Actas...*, v.3, p.875-874, 2002.
DORIER, J-L. Exemples d'interaction entre recherches en didactique et en histoire des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Fascicule de Didactique des Mathématiques et de l'EIAO*, Rennes, v.unico, p.53-74, 1998.
DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, Paris, v.6, p.132-158, 1992.
DOUADY, R. *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. 500f. Tesis (doctorado en didáctica de las matemáticas), Université Dennis Diderot, París, 1984.
ENGLER, A.; MÜLLER, D.; HECKLEIN, L.; CADOCHE, L. Propuesta didáctica para estudiar sistemas de ecuaciones lineales. Sondeo de opiniones. *Revista Educación Matemática,* FAMAF-UNC, Argentina, v.13, n.2, p.127-139, 2001.
LUCUY, F.; DODERA, M.G.; PONCE, L. Un enfoque para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el primer ciclo universitario. *Revista Premisa, SOAREM,* Buenos Aires, v.11, n.41, p.42-50, 2009.
MAGUNA, F.; OKULIK, N. Acceso a la Universidad: el caso de Ingeniería. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería,* Buenos Aires, v.2, n.5, p.51-59, 2013.
MOLINA, A. Problemática actual de la enseñanza de la ingeniería: una alternativa para su solución. *Ingenierías*, Buenos Aires, v.2, n.3, p.10-15, 2000.
MONTERO J., MARTÍNEZ E.; MORÁN J. ALGTEC: Un complemento a la enseñanza del álgebra lineal en carreras de ingeniería de telecomunicaciones. *Virtual Educa,* 2002.
PANIZZA, M.; SADOVSKY, P.; SESSA, C. Ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*, España, v.17, n.3, p.453–461, 1999.
POOLE D. *Álgebra lineal*. *Una introducción moderna*. 3.ed. edición. México: Cengage Learning Editores, 2011.
ROBERT, A. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v.18, n.2, p.139-190, 1998.
ROGALSKI, M. L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A, *La Gazette des Mathématiques*, París, v.60, p.39-62, 1994.
SÁ-SILVA, J.; ALMEIDA, C.; GUINDANI, J. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais*, v.1, n.1, p.1-15, 2009.
SCHMAL, R. Reflexiones en torno a un programa para la formación de competencias transversales en ingeniería. *Ciencia, Docencia y Tecnología*, v.23, n.44, p.239-262, 2012.
SEGURA, S. Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v.7, n.1, p.49-78, 2004.

SESSA, C. *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*: orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005.
SIERPINSKA, A. On some aspects of students thinking in linear algebra. En J–L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra* Dortrecht: Kluwer, 2000.