O ensino de equações quadráticas: como "costurar" o corte didático?

Rosana Nogueira de Lima
Lulu Healy
Rosangela Marazzio Koch

RESUMO

Neste artigo, temos por objetivo identificar os desafios de natureza cognitiva associados à transição do trabalho com equações lineares para equações quadráticas. Para isso, elaboramos algumas equações quadráticas a serem resolvidas por alunos de 8º ano de uma escola estadual da cidade de Jundiaí/SP, que não haviam aprendido a resolver equações desse tipo, e trabalharam em duplas e trios para resolvê-las. Os dados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Os resultados evidenciam que a transição de equações lineares para quadráticas não foi realizada naturalmente por esses alunos. Para isso, é necessária uma intervenção didática, até mesmo para que eles usem os próprios *já-encontrados* de forma colaborativa ao invés de dificultadora.

Palavras-chave: Equações Quadráticas. Lacuna Cognitiva. Três Mundos da Matemática.

Teaching quadratic equations: How to sew the didactic cut?

ABSTRACT

This paper presents a study aimed at investigating the cognitive challenges associated with the transition from solving linear equations to solving quadratic ones. To develop this research, 8th graders from a public school in Jundiaí/SP, who had not yet been taught about quadratics equations, were given a set of these equations with different characteristics to solve. The students worked in groups of two or three. Data were analysed in the light of the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics. Results evidenced that the transition from linear to quadratic equations is not a spontaneous one for these students and that a didactic intervention in necessary, in order that students might use their own *met-befores* in ways that are supportive rather than problematic.

Keywords: Quadratic Equations. Cognitive Gap. Three Worlds of Mathematics.

Rosana Nogueira de Lima é Doutora em Educação Matemática, Professora e Pesquisadora da Universidade Anhanguera de São Paulo/UNIAN, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Av. Raimundo Pereira de Magalhães, 3305, 05145-200. São Paulo/SP. E-mail rosananlima@gmail.com

Lulu Healy é Doutora em Educação Matemática, Professora e Pesquisadora da Universidade Anhanguera de São Paulo/UNIAN, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Av. Raimundo Pereira de Magalhães, 3305, 05145-200. São Paulo/SP. E-mail lulu@baquara.com

Rosangela Marazzio Koch é Mestre em Educação Matemática, Professora da Escola Estadual Paulo Mendes Silva, Secretaria Estadual de Educação, Rua Fernando Arens, 830, Vila Progresso, 13214-719. Jundiai/SP. E-mail tatamarazzio@gmail.com

Recebido para publicação em 4 abr. 2017. Aceito, após revisão, em 25 out. 2017.

INTRODUÇÃO

Questões relacionadas à passagem de se calcular aritmeticamente para efetuar operações algébricas foram extensamente estudadas para o caso de equações lineares (por exemplo, FILLOY; ROJANO, 1989; HERSCOVICS; LINCHEVSKI, 1994; VLASSIS, 2002; LIMA; HEALY, 2010). Em particular, Filloy e Rojano (1989) apresentaram uma discussão sobre problemas de se passar de resolver equações lineares em que a incógnita ocorre em um único membro (por eles chamadas de equações aritméticas) para resolver equações lineares em que a incógnita ocorre nos dois membros (equações não aritméticas), ocorrendo o que eles chamaram de "corte didático".

Para Herscovics e Linchevski (1994), Filloy e Rojano (1989) desconsideram os processos matemáticos envolvidos na solução de equações aritméticas ou não aritméticas, pois, para eles, é na mudança do tipo de processo a ser usado que reside uma lacuna cognitiva[1], isto é, uma "inabilidade de operar espontaneamente com ou sobre a incógnita" (HERSCOVICS; LINCHEVSKI, 1994, p.63). Esses mesmos autores fazem outras críticas ao estudo de Filloy e Rojano (1989), como, por exemplo, a discussão sobre uma solução por meio de tentativa e erro ser aritmética ou algébrica; e se há ou não corte didático quando a incógnita ocorre duas vezes no mesmo membro da equação. De acordo com Herscovics e Linchevski (1994), dificilmente estudantes conseguem operar sobre a incógnita sem que lhes seja ensinado, e isso é uma *lacuna cognitiva* que demarca a passagem da aritmética para a álgebra.

Lima e Healy (2010) refletiram sobre a palavra "didático" utilizada por Filloy e Rojano (1989), apontando que, apesar da preocupação desses autores com questões ligadas à sala de aula, as mudanças percebidas por eles são de natureza cognitiva, e não didática, o que nos parece em consonância com as ideias e Herscovics e Linchevski (1994). Por outro lado, para se lidar com essas mudanças, é necessário que se faça uma intervenção didática, o que pode ter influenciado Filloy e Rojano (1989) a utilizar tal palavra. Além disso, as autoras afirmam que, na pesquisa realizada por elas, não houve manifestação do corte didático entre resolver equações ditas aritméticas ou não aritméticas, o que as levou a concluir que o corte não está relacionado à existência ou ao posicionamento da incógnita na equação (como nas equações aritméticas e não aritméticas), mas aos processos utilizados pelos alunos para a resolução delas.

Revisitando sua própria ideia de corte didático, em 2010, Filloy, Rojano e Solares argumentaram que

> [...] um *corte didático* na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico ocorre quando alunos se deparam com tarefas de uma natureza algébrica pela primeira vez e precisam construir novos significados e novos sentidos para objetos e operações aritméticos, com a característica especial adicional de que tais

[1] Em inglês, *cognitive gap*.

significados e sentidos recentemente construídos necessariamente pressupõem uma quebra com a aritmética. (FILLOY; ROJANO; SOLARES, 2010, p.59, tradução nossa)

Eles analisaram o trabalho de alunos ao operarem com uma incógnita escrita em função de uma segunda incógnita, o que acontece quando se estuda, por exemplo, sistemas lineares. Dessa forma, os autores se depararam com o que definiram como um segundo corte didático, quando os alunos tentaram utilizar uma estratégia de equações escritas com uma única incógnita para resolver problemas que envolvem equações com duas incógnitas, e concluem que "competências algébricas relacionadas à manipulação de uma única incógnita não são espontaneamente estendidas para casos com duas incógnitas" (FILLOY; ROJANO; SOLARES, 2010, p.75, tradução nossa). Novamente, a ideia central deste corte didático parece mais relacionada a questões cognitivas que didáticas, por exemplo, ao observarem a necessidade de o aluno construir significados e sentidos para objetos matemáticos anteriormente desconhecidos por ele.

Ao iniciar o trabalho com equações quadráticas, uma das referências que os alunos têm é o aprendizado anterior de equações lineares. Da mesma forma que Filloy, Rojano e Solares (2010) evidenciaram para sistemas lineares, Lima (2007) observou que alunos de 1º e 2º anos do Ensino Médio, para resolver equações quadráticas, tentaram transformá-las em equações lineares. Levando esses resultados em consideração, é nossa crença que as competências algébricas relacionadas à manipulação de uma incógnita linear não são espontaneamente estendidas para casos em que a incógnita está ao quadrado, em equações quadráticas. De fato, entendemos que, nesse caso, há uma descontinuidade epistemológica, que implica o uso de novos conceitos matemáticos, novas maneiras de se operar com símbolos matemáticos, que não são naturalmente criadas somente a partir do que um indivíduo já conhece de equações lineares. Frente a uma descontinuidade epistemológica desse tipo, *lacunas cognitivas* evidentes nas atividades dos alunos não devem ser consideradas surpreendentes. Mais que isso, é necessário que elas sejam "preenchidas", o que implica uma intervenção didática. Assim, entendemos que essa intervenção que parece necessária pode "costurar" o que Filloy e Rojano (1989) chamam de "corte".

Assim, neste artigo, apresentamos uma pesquisa em que se discute a necessidade de uma intervenção didática ao se trabalhar equações quadráticas com alunos que ainda não haviam aprendido a resolvê-las em aulas de Matemática. Considerando os resultados de Lima e Healy (2010), entendemos como fundamental a análise do pensamento do aluno ao resolver esse tipo de equações, pois é necessário levar em conta os processos de resolução efetuados pelos alunos e os processos matemáticos envolvidos nessa resolução, como afirmam também Herscovics e Linchevski (1994). Assim, o objetivo desta pesquisa foi identificar os desafios de natureza cognitiva associados à transição do trabalho com equações lineares para quadráticas.

DESENVOLVIMENTO COGNITIVO EM MATEMÁTICA: OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Para fundamentar nossa pesquisa, utilizamos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, desenvolvido por Tall (2013), que propõe que existem pelo menos três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo em Matemática, e que entender conceitos envolve conectar esses tipos de desenvolvimento, que são parte de Três Mundos da Matemática, o mundo conceitual corporificado, o mundo operacional simbólico e o mundo formal axiomático.

O mundo conceitual corporificado é o mundo das percepções, em que propriedades de um objeto (físico ou mental) são observadas, analisadas, de forma a fazer sentido para um indivíduo, que passa a ser capaz de descrever tal objeto.

O mundo operacional simbólico (previamente chamado de proceitual simbólico) é o mundo habitado pelos símbolos matemáticos que são usados para representar as ações efetuadas sobre entidades matemáticas. Tais símbolos podem ser vistos flexivelmente tanto como o próprio procedimento a ser efetuado, quanto como o resultado obtido a partir desse procedimento, que é o conceito. Dessa forma, os símbolos, neste mundo, podem ser vistos como a dualidade entre processo e conceito, que gera um proceito (GRAY; TALL, 1994).

O mundo formal axiomático, no qual axiomas, propriedades, definições e teoremas são usados para construir o corpo axiomático da Matemática.

Neste artigo, nos referimos a esses mundos como o mundo corporificado, o mundo simbólico e o mundo formal.

Tall (2013) afirma também que as experiências anteriores são fundamentais para o desenvolvimento e o aprendizado de conceitos matemáticos, inclusive para que o aluno possa fazer uma jornada por esses mundos. Ele chama tais experiências de "*já-encontrados*",[2] e os define como "... um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente" (LIMA; TALL, 2008, p.6, tradução nossa). Ao se deparar com experiências que lhe são familiares, um indivíduo utiliza um conhecimento ou procedimento *já-encontrado*, assumindo-o válido para a situação que tem em mãos. Se o *já-encontrado* é utilizado de maneira positiva, isto é, ele é válido para a situação em que ele é utilizado, ele é chamado de *já-encontrado colaborador*[3] (TALL, 2013). Se ele não é válido para a situação em que se usa, ele é um *já-encontrado dificultador*[4] (TALL, 2013).

É importante que o professor compreenda essa distinção entre *já-encontrados facilitadores* e *dificultadores*, e também como um *já-encontrado* pode tornar-se dificultador ao ser relacionado a alguma situação em que ele não é válido, pois um dos papeis de uma intervenção didática é justamente evitar tais situações. Ao desenvolver

[2] Em inglês: "met-befores".
[3] Em inglês: "Supportive met-before".
[4] Em inglês: "Problematic met-before".

uma intervenção, o professor que tem esse entendimento pode evitar a utilização de *já-encontrados dificultadores* ou até mesmo provocá-la, para que ela possa ser discutida.

Para Tall (2013), experiências novas também podem intervir no aprendizado anterior. Elas são chamadas de "*a-encontrar*"[5] e são definidas como "...uma experiência encontrada posteriormente que pode afetar a memória de conhecimentos anteriores" (LIMA; TALL, 2008, p.7, tradução nossa). Entendemos que um *a-encontrar* pode "preencher" uma lacuna cognitiva. Assim, quando um professor se depara com um corte didático, ele pode provocar o uso de *já-encontrados colaboradores* ou mesmo introduzir novas experiências, isto é, *a-encontrar* que possam "costurar" os cortes didáticos evidenciados.

Para a análise dos dados coletados nesta pesquisa, observamos como a utilização de características formais, simbólicas ou corporificadas influenciam o trabalho dos alunos com equações. Observamos também os *já-encontrados colaboradores* ou *dificultadores* que interferem nesse trabalho. Além disso, tendo como foco as equações, seguimos a classificação de Lima e Healy (2010) para equações, que foi baseada na análise de desenvolvimento cognitivo em pensamento algébrico discutida por Thomas e Tall (2001) e inspirada no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013). Consequentemente, classificamos equações quadráticas como equações de avaliação e equações de manipulação.

Uma equação de avaliação é aquela em que as operações efetuadas sobre a incógnita podem ser "desfeitas", para se obter os valores procurados, ou aquela que pode ser avaliada de forma a perceber quais são as raízes. No caso de equações quadráticas, as da forma $a\,(x-b)^2+c=d$ (em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e $a \neq 0$) podem ser consideradas de avaliação, pois as operações podem ser desfeitas sem a necessidade de se operar com a incógnita, e as da forma $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ (em que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ são as raízes da equação, e $a \neq 0$) podem ser avaliadas. Já as equações de manipulação são aquelas que, para se encontrar os valores da incógnita, é preciso fazer alguma manipulação algébrica, pelo menos até que elas sejam transformadas em equações de avaliação. Exemplos de equações quadráticas de manipulação podem ser da forma $ax^2+bx+\mathrm{c}=0$ (coeficientes reais e $a \neq 0$).

Nosso entendimento é o de que os processos cognitivos relacionados à resolução de equações de avaliação têm características que relacionam os mundos simbólico e corporificado, pois, se trabalha com símbolos matemáticos, mas não é necessário operar com a incógnita, pela possibilidade de se desfazer operações efetuadas sobre ela, ou de se observar raízes válidas para a equação a partir de uma análise dela. Essa não necessidade de se operar com a incógnita, para nós, traz à equação também características do mundo corporificado, pois possibilita um pensar numérico, que pode ser relacionado a esse mundo.

Já no que se refere aos processos relacionados à resolução de equações de manipulação, é imprescindível que se opere com a incógnita para que seja possível encontrar as raízes. Essa manipulação envolve principalmente características do mundo

[5] Em inglês: "met-after".

simbólico, pois, para que ela seja efetuada, é necessário deixar de lado características corporificadas e manipular os símbolos algébricos. Conjecturamos que essa diferença entre equações de avaliação e equações de manipulação pode ser associada a uma lacuna cognitiva, pois ela caracteriza uma transição de fazer cálculos aritméticos, parte do mundo corporificado, para efetuar procedimentos algébricos, que habitam o mundo simbólico.

As características apontadas acima para equações de avaliação e manipulação, bem como a relação delas com os mundos matemáticos não se fazem sempre presentes, tendo em vista a importância de se levar em conta os processos de resolução efetuados por alunos. Isso se dá, pois, em nossas análises dos dados coletados, observamos não somente a característica que julgamos predominante de cada mundo nas equações quadráticas, mas também as maneiras com que os sujeitos de nossa pesquisa resolveram essas equações. Por exemplo, Lima (2007) e Lima e Healy (2010) evidenciaram que uma equação ser de avaliação ou de manipulação não é suficiente para que um aluno a trate como tal. Há, nessas pesquisas, evidências de que um aluno pode resolver uma equação de avaliação por manipulações simbólicas, e também tentar resolver uma equação de manipulação buscando valores para a incógnita, isto é, avaliando-a. Assim, é importante buscarmos entender as ideias matemáticas e as características de cada um dos Três Mundos da Matemática subjacentes às resoluções dos alunos, e não somente as que nos parecem nelas contidas.

Antes de apresentar detalhes sobre nosso estudo, consideramos pertinente apresentar resultados de outras pesquisas que tratam de dificuldades enfrentadas por alunos para resolver equações, em especial equações quadráticas, como apresentamos na próxima seção.

PESQUISAS SOBRE AS INTERAÇÕES DE ALUNOS COM EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Vaiyavutjamai e Clements (2006) afirmam serem poucas as pesquisas sobre equações quadráticas. De fato, percebemos uma produção muito mais numerosa de pesquisas relacionadas a equações lineares que quadráticas. Mesmo as de Filloy e Rojano (1989) e Herscovics e Linchevski (1994) enfocam somente as lineares. Tal escassez nos remete à importância de voltarmo-nos ao estudo de equações quadráticas e às possíveis *lacunas cognitivas* relacionadas a elas.

Em relação às dificuldades apresentadas por alunos ao trabalharem com esse tipo de equação, Vaiyavutjamai, Ellerton e Clements (2005), investigando a aprendizagem de equações quadráticas de 231 alunos de 9º ano de escolas tailandesas, evidenciaram que, após o ensino, muitos daqueles alunos ainda não percebiam que equações quadráticas têm duas soluções, alguns não souberam verificar se as soluções por eles encontradas estavam corretas, e muitos não perceberam que a incógnita tinha o mesmo status, isto é, representavam o mesmo número, embora aparecesse duas vezes na mesma equação. Por exemplo, em $(x - a)(x - b) = 0$ (com $a, b \in \mathbb{R}$), os estudantes acreditavam que valores diferentes poderiam ser assumidos pela incógnita em cada fator (a no primeiro e b no segundo), então, para $(x - 3)\ (x - 5) = 0$, eles determinavam que x no primeiro fator seria igual a 3, e no segundo fator, igual a 5, pois $(3 - 3)\ (5 - 5) = 0$. Vaiyavutjamai e Clements (2006) também perceberam que os alunos pesquisados acreditavam que era possível colocar valores diferentes em cada um dos termos em x de equações como $x^2 - x = 12$.

Equações como $(x - 3)\ (x - 5) = 0$ foram resolvidas a partir da busca de valores que as satisfizesse, isto é, por tentativa e erro (um meio de avaliar o valor da incógnita); ou da multiplicação dos fatores, resultando em $x^2 - 8x + 15 = 0$, o que caracteriza uma manipulação. Esta última estratégia utilizada pelos alunos evidencia nossa afirmação de que a característica fundamental da equação como de avaliação ou de manipulação não determina a maneira com que um indivíduo a aborda.

No que se refere a equações da forma $x^2 = k$ ($k > 0$ e $k \in \mathbb{R}$), muitos dos alunos tailandeses não pareceram perceber que elas possuem duas raízes, sendo a raiz negativa negligenciada (VAIYAVUTJAMAI; ELLERTON; CLEMENTS, 2005). Os autores, em ambas as pesquisas, percebem o desenvolvimento pelos alunos de um entendimento instrumental (SKEMP, 1976), em detrimento de um entendimento relacional.

Muitas das raízes negativas também foram deixadas de lado pelos sujeitos da pesquisa de Lima (2007), que trabalhou com três turmas de Ensino Médio; uma de 1º ano, com 32 alunos, e outra de 2º ano com 28 alunos, ambas de uma escola pública de Guarulhos; a terceira turma era de 2º ano, com 20 alunos, de uma escola particular de São Paulo. Isso se deu especialmente quando os alunos pesquisados tentavam resolver equações quadráticas (de avaliação ou de manipulação) por meio de uma avaliação. Naquela pesquisa, o único método de resolução utilizado que gerou soluções corretas foi a fórmula de Bhaskara. Outras tentativas de resolução apresentadas envolviam a avaliação da equação, com a obtenção de apenas uma das raízes, sendo esta positiva; ou então manipulações algébricas incorretas que transformavam uma equação quadrática em uma linear.

Em suas conclusões, Lima (2007) também percebeu que os alunos utilizaram procedimentos para resolver as equações apresentadas, mas entende que tais procedimentos ou regras não são "sem razão", como afirmam Vaiyavutjamai, Ellerton e Clements (2005), mas sim *corporificações procedimentais*, justificando que os alunos pesquisados deram significado corporificado aos procedimentos que utilizavam, transportando termos de um membro a outro da equação, sem relacionar essas transposições a princípios algébricos, que são parte do mundo formal.

Buscando colaborar para a superação de problemas como estes, Gray e Thomas (2001) relataram uma abordagem de ensino para equações quadráticas usando papel e lápis e calculadoras gráficas, aplicada a 25 alunos da 10ª série em Auckland (Nova Zelândia). Esta abordagem envolveu o uso de representações simbólica, tabular e gráfica. Foi pedido aos alunos que traçassem gráficos de funções associadas a uma equação quadrática, e que encontrassem as soluções da equação seja algébrica ou graficamente. Os autores não observaram progresso nas habilidades para resolver equações quadráticas. Os estudantes buscavam, por tentativa e erro, valores que satisfizessem a equação (o que chamaríamos de resolução por avaliação), e pareciam não entender o princípio de efetuar a mesma operação em ambos os membros de uma equação. Os gráficos das funções relacionadas às equações não colaboraram para que as soluções fossem encontradas, e procedimentos algébricos (tentativas de resolução por manipulação) foram usados sem compreensão de seus fundamentos.

As pesquisas apresentadas nesta seção evidenciam dificuldades enfrentadas por alunos para a resolução de equações quadráticas, algumas delas até similares de uma pesquisa para outra. Tais dificuldades envolvem tanto características corporificadas, em tentativas de avaliar equações ou usar gráficos, quanto simbólicas, ao buscar manipulação algébrica para resolver as equações. Para melhor interpretar essas dificuldades à luz dos Três Mundos da Matemática, pareceu apropriado investigar mais profundamente a transição entre equações lineares e quadráticas, em particular a relação delas com a álgebra de avaliação e a álgebra de manipulação.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Ao analisarem se havia um corte didático na passagem de resolver equações lineares aritméticas para resolver as não aritméticas, Filloy e Rojano (1989) escolheram alunos que já estavam familiarizados com equações aritméticas. Seguindo esta mesma linha de raciocínio, esta pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. Na primeira, elaboramos uma Tarefa de Resolução de Equações, composta por dez equações lineares, com as quais pretendíamos identificar alunos que já tinham algum conhecimento para resolver este tipo de equação para que eles fossem escolhidos para o trabalho na segunda fase da pesquisa. Além disso, acrescentamos duas equações quadráticas a essa tarefa para que pudéssemos observar se estes alunos, que ainda não haviam tido contato com equações quadráticas, arriscariam algum tipo de resolução, e a partir de que tipo de procedimento. A Tarefa de Resolução de Equações foi realizada por 40 alunos de duas turmas de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual, situada na periferia do município de Jundiaí/SP. Este ano escolar foi escolhido justamente por serem alunos que já deveriam ter tido contato com equações lineares, mas não com equações quadráticas.

Na segunda etapa de nossa pesquisa, selecionamos os 10 alunos que apresentaram melhor conhecimento na resolução de equações lineares a partir dos dados coletados na primeira etapa. Esses alunos foram divididos em dois trios de alunos e duas duplas de alunos. Com eles trabalhando em grupos para resolver algumas equações quadráticas, fizemos entrevistas reflexivas semiestruturadas. Segundo Almeida, Brandini e Szymanski (2011), a entrevista reflexiva permite uma interação entre entrevistador e entrevistado, de forma a se refletir sobre a conversa, resultando em algum aprendizado. A escolha pela entrevista reflexiva semiestruturada foi feita pelo fato de existir a possibilidade de interagirmos com os participantes da pesquisa, organizados em grupos, e questionarmos as formas de resolução apresentadas por eles para as equações, buscando compreender as motivações do grupo para o uso do procedimento de resolução escolhido no momento em que cada um expunha aos colegas suas ideias e formas de raciocinar. Para estas entrevistas, que foram audiogravadas para posterior análise, apresentamos aos alunos algumas equações já estabelecidas antes da entrevista que eles deveriam resolver (veja Quadro 1). Vale destacar que, ao tentarem resolver as equações quadráticas da Tarefa de Resolução de Equações apresentada na primeira etapa desta pesquisa, o único procedimento utilizado por esses 10 alunos foi a busca de valores positivos que as satisfizesse.

As equações apresentadas aos alunos nessa entrevista foram elaboradas a partir dos resultados de pesquisas (por exemplo, LIMA, 2007; VAIYAVUTJAMAI; ELLERTON; CLEMENTS, 2005; VAIYAVUTJAMAI; CLEMENTS, 2006) que tratam das dificuldades dos alunos em relação à resolução de equações, que sugerem que a passagem do que entendemos como uma equação de avaliação para uma equação de manipulação não é uma transição feita espontaneamente para a maioria dos aprendizes. Por isso, escolhemos, além das equações de avaliação, também algumas equações de manipulação, mesmo sabendo que esses alunos ainda não tinham tido contato com procedimentos de resolução de quadráticas. Nossa intenção foi analisar quais *já-encontrados* seriam utilizados por eles para resolver essas equações. Vale ressaltar que duas dessas equações de manipulação eram quadrados perfeitos, e poderiam ser resolvidas se os alunos tivessem essa ideia como *já-encontrado* e percebessem a possibilidade de uso para transformá-las em equações de avaliação, uma delas era incompleta e poderia ser resolvida colocando-se um fator em evidência, outro *já-encontrado* que poderia ser usado por esses alunos, e uma delas tinha raízes irracionais, o que dificultaria o trabalho dos alunos, que provavelmente não teriam *já-encontrados* suficientes para resolvê-la.

QUADRO 1 – Equações Quadráticas da entrevista semiestruturada.

Equações quadráticas de avaliação	**Equações quadráticas de manipulação**
$x^2 = 9$	
$4 = x^2$	
$(x+3)^2 = 49$	
$x^2 - 25 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$
$x^2 - 4 = 12$	$x^2 + 10x + 25 = 0$
$3x^2 = 27$	$x^2 + 4x + 2 = 0$
$4x^2 - 36 = 0$	$8x^2 + 6x = 0$
$4x^2 - 25 = 0$	
$x(x+3) = 0$	
$x(x+2) = 15$	

Fonte: Koch (2011, p.79).

A nossa conjectura é a de que a resolução bem-sucedida de equações quadráticas pelo aluno implica uma intervenção didática, na qual novos métodos de resolução sejam introduzidos. Entretanto, decidimos apresentar equações quadráticas sem a interferência de novos métodos para melhor entendermos como os *já-encontrados* podem interferir nessa transição. Com isso, poderíamos levantar alguns elementos que sugerissem caminhos possíveis para essa intervenção didática que julgamos necessária.

Escolhidos os 10 alunos, e tendo eles sido divididos em grupos, fizemos uma entrevista[6] com cada grupo, apresentando uma equação de cada vez, primeiro as quadráticas de avaliação e depois as de manipulação.

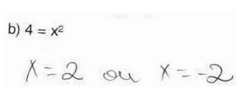
AS ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS

Conforme apresentado Quadro 1, fizemos uso de 14 equações quadráticas, 10 de avaliação e quatro de manipulação.

De maneira geral, os quatro grupos que trabalharam em nossa pesquisa resolveram as equações quadráticas de *avaliação* utilizando-se de duas maneiras diferentes de avaliar: ou buscando um número que satisfizesse a sentença matemática, ou desfazendo as operações efetuadas sobre a incógnita, isto é, elas foram tratadas como de avaliação.

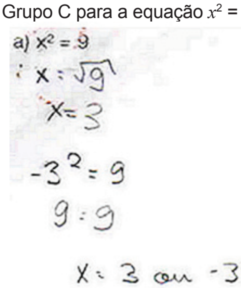
Para as duas primeiras equações apresentadas, três grupos buscaram um número que as satisfizesse (Grupos A, B e D), e o quarto grupo (Grupo C) iniciou desfazendo as operações. Exemplos disso podem ser vistos na **Figura 1**, em que o Grupo D avaliou a equação e percebeu 2 e –2 como valores para x, e na **Figura 2**, em que o Grupo C fez *"o inverso do quadrado"* para encontrar $x = 3$, e, em seguida, ao avaliar a equação, percebeu que – 3 também é uma raiz, como apresentado no trecho da entrevista.[7]

FIGURA 1 – Resolução apresentada pelo Grupo D para a equação $4 = x^2$



Fonte: Koch (2011, p.88).

FIGURA 2 – Resolução apresentada pelo Grupo C para a equação $x^2 = 9$



Fonte: Koch (2011, p.88).

Carlos: $x^2 = 9$.
Cris: 3 ao quadrado. 3 ao quadrado é nove.
Carlos: ahã...[concordando]

---

[6] Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética da então Universidade Anhanguera de São Paulo/UNIBAN, sob número 2007-149.

[7] Nas apresentações dos trechos das entrevistas, a fala dos alunos será indicada por um nome fictício, que se inicia pela letra do Grupo ao qual o aluno faz parte, por exemplo, Ana refere-se um aluno pertencente ao Grupo A. "Pesquisadora" refere-se à fala da pesquisadora que conduziu a entrevista. Os trechos de entrevista apresentados neste artigo foram extraídos de Koch (2011).

Cris: Porque o inverso do quadrado é a raiz, e raiz quadrada de 9 é 3
Pesquisadora: Qual valor vocês encontraram?
Carlos: x é igual a 3
Pesquisadora: Como vocês encontraram a resposta?
Carlos: Fizemos o inverso do quadrado... aí encontramos o número 3, pois a raiz de 9 é 3.
Pesquisadora: Existe outro valor, negativo ou fracionário que satisfaça a equação?
Cris: o – 3.
(Trecho da entrevista com o grupo C, para a equação $x^2 = 9$)

Vale salientar que, sempre que os alunos decidiam ter encontrado uma solução para a equação, a pesquisadora que conduziu as entrevistas perguntava a eles se não haveria alguma outra solução para aquela equação. Essa segunda solução, quando encontrada, era sempre por avaliação de um número que satisfizesse a equação, e não por meio de desfazer as operações. Além disso, observamos que o questionamento da pesquisadora já foi suficiente para evocar um *já-encontrado* sobre o quadrado de números negativos, que passou a ser utilizado por esses alunos, isto é, que os quadrados de um número e do oposto desse mesmo número são iguais.

A nosso ver, os métodos de resolução utilizados, tanto pelos Grupos A, B e D, quanto pelo Grupo C, têm características corporificadas além das simbólicas. O primeiro método, de encontrar valores, tem características corporificadas por causa da visualização de um número que satisfaz a equação a partir de elementos dela. O segundo método, de desfazer as operações efetuadas pela incógnita, é corporificado justamente por essa busca de operações inversas, característica das equações de avaliação, em que não se efetua operações sobre a incógnita, mas somente sobre números. As características simbólicas estão presentes ao desenvolver cálculos algébricos ou aritméticos; em particular nesse exemplo, a operação inversa que resulta em uma raiz quadrada.

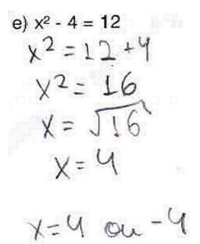
A partir do trabalho com as primeiras equações resolvidas, o grupo C percebeu que aquelas do tipo $x^2 = k$, com $k \geq 0$, tem soluções $\sqrt{k}$ ou $-\sqrt{k}$. Esta percepção se deu a partir da raiz positiva encontrada por eles. Ao observarem o número, e tendo sido perguntado pela pesquisadora que realizou a entrevista, perceberam que o oposto daquela raiz também seria raiz da equação.

O trabalho desses alunos foi realizado no sentido de perceberem possíveis números que satisfaziam a equação, e não necessariamente de utilizarem procedimentos algébricos formais. Por exemplo, na resolução apresentada na Figura 2, os alunos do Grupo C tinham como *já-encontrado* que, assim como 3^2, $(-3)^2$ também é igual a 9, e então também satisfaria a equação. Salientamos que eles continuaram usando essa estratégia de que se um número é raiz de uma equação na forma $x^2 = k$, com $k \geq 0$, então o oposto desse número também o é. A nosso ver, este é um *a-encontrar* importante que se manifestou durante as entrevistas, a partir do *já-encontrado* do quadrado de números opostos, que pode ser utilizado por esses alunos, e que tem características simbólicas pela manipulação algébrica efetuada.

A postura inicial dos grupos foi se modificando gradativamente. Os grupos A e B também passaram a desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita para resolver as equações de avaliação, também obtendo duas raízes para equações na forma $x^2 = k$, com $k \geq 0$. Somente o Grupo D não passou a desfazer operações, mas observou a existência das duas raízes.

Em algumas equações, esses grupos, antes de resolverem a equação pela avaliação de um valor que a satisfizesse, iniciavam a resolução com uma manipulação similar àquelas realizadas em equações lineares, isto é, faziam uma tentativa de espontaneamente manipular a equação para que ela se transformasse em uma equação de avaliação mais simples a partir dos seus próprios *já-encontrados*. Exemplo disso é apresentado na Figura 3.

FIGURA 3 – Resolução apresentada pelo Grupo B para a equação $x^2 - 4 = 12$.



Fonte: Koch (2011, p.88).

Ideia similar foi relatada em Filloy e Rojano (1989), em que os alunos transformavam uma equação não aritmética em uma equação aritmética que sabiam resolver. Analogamente, toda equação de manipulação pode ser transformada em uma equação de avaliação, desde que se conheçam princípios algébricos de manipulação simbólica.

Esta estratégia não foi sempre utilizada, mas foi utilizada por todos os grupos. Para a resolução apresentada na Figura 3, os alunos, utilizando características simbólicas, inicialmente, igualaram x^2 a $12 + 4$, obtendo uma equação com a incógnita ao quadrado igual a um número, e encontraram uma raiz.

> Bianca: $x^2 - 4 = 12$.
> Bianca: é o 2. 2 ao quadrado vale quatro.
> Bruno: –2 ao quadrado também é quatro
> Bianca: espera. Vamos isolar o x. Assim, olha. [Bianca mostra para Bruno como deveria ser isolado o x, descrevendo no ar a passagem do 4 para o segundo membro da igualdade, e Bruno escreve o procedimento indicado por Bianca]
> Bianca: 12 mais 4 dá 16.

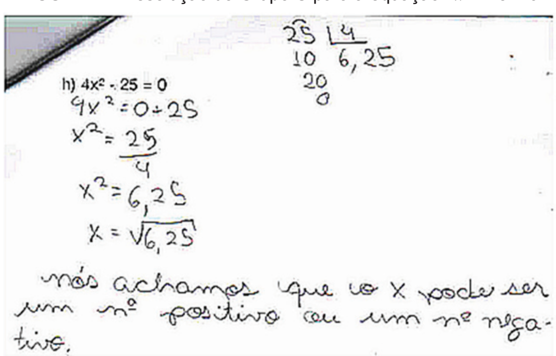
Bruno: E raiz de 16... Ah! Vale quatro! Quatro e menos quatro!
Bianca: Isso.
Pesquisadora: Quais valores vocês encontram?
Bianca: 4 e – 4.
(Trecho da entrevista com o Grupo B, para a equação $x^2 - 4 = 12$).

Como se pode observar no trecho da entrevista, encontraram as duas raízes 4 e – 4 da equação a partir do uso colaborador de um *a-encontrar*, que eles compreenderam durante a resolução das equações dessa etapa da pesquisa, o de que equações na $x^2 = k$, com $k \geq 0$, tem soluções ou $\sqrt{k}$ ou $-\sqrt{k}$.

Neste exemplo, inicialmente, vemos que Bianca fez uma substituição válida para a equação $x^2 - 4 = 0$. Ao voltar a analisar a equação e "isolar o x", um *já-encontrado* conhecido das equações lineares, realizou um início de resolução por manipulação, de forma a obter uma equação de avaliação na forma $x^2 = k$, neste caso, $x^2 = 16$, obtendo-se 4 como raiz. Um *já-encontrado colaborado*r parece ser observado neste exemplo, e também em outros: $(x)^2 = (-x)^2 = x^2$.

A resolução dada pelo Grupo C para a equação $4x^2 - 25 = 0$ também envolveu manipulação, de forma a obter uma equação na forma incógnita ao quadrado igual a um número ($x^2 = k$), o que resulta em $x^2 = \frac{25}{4}$, isto é, os *já-encontrados* utilizados para equações lineares foram colaboradores nessa resolução. Ao verem tal equação, os alunos fizeram a divisão do número no segundo membro, encontram o valor 6,25, e entenderam que as raízes quadradas positiva e negativa deste número representam as raízes da equação. Nesse caso, a manipulação algébrica característica do mundo simbólico foi de grande ajuda para esses alunos.

FIGURA 4 – Resolução do Grupo C para a equação $4x^2 - 25 = 0$.



Fonte: Koch (2011, p.117).

Assim como Filloy e Rojano (1989) verificaram que os alunos que participaram da pesquisa deles manipularam equações não aritméticas até que elas se tornassem aritméticas, também neste e em outros exemplos de nossa pesquisa os alunos participantes manipularam uma equação quadrática (mesmo ela sendo, em nossa classificação, uma equação de avaliação) para transformá-la em uma forma mais simples de avaliação.

Essa resolução envolveu uma ideia mais sofisticada pertencente ao mundo simbólico, pois os alunos manipularam os números $\sqrt{6{,}25}$ e $-\sqrt{6{,}25}$ e mesmo sem saber um valor aproximado para essas raízes. Conjecturamos que o que os permitiu fazer isso foi o *já-encontrado* de que $(x)^2 = (-x)^2 = x^2$, e, aparentemente, esse *já-encontrado* foi usado para que esses alunos concluíssem o *a-encontrar* se $x^2 = k$, com $k \geq 0$, então $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$.

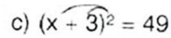
Passando para equações na forma $(x - a)^2 = b$, com $b \geq 0$, o Grupo B, ao tentar resolver a equação $(x + 3)^2 = 49$ por manipulação, não foi bem-sucedido. Esses alunos tentaram usar o que eles chamaram de "*distributiva*", isto é, distribuíram incorretamente o expoente 2 como se fosse uma multiplicação por 2, obtendo $2x + 6 = 49$, e transformando a equação em uma linear, que foi resolvida por manipulação, para encontrar a raiz $\frac{43}{2}$. Esse tipo de manipulação, em que o coeficiente é tratado como multiplicação, também foi evidenciado em Lima (2007). Conjecturamos que essa manipulação errônea pode ser uma *corporificação procedimental*[8] (LIMA, 2007), considerando que o expoente 2 foi retirado da potência para se fazer a "distributiva", e posicionado como coeficiente do fator $(x + 3)$. No trecho de entrevista, observamos como essa ideia estava presente no trabalho dos alunos.

> Bianca: $(x + 3)^2 = 49$.
> Bruno: Podemos resolver por distributiva.
> Bianca: Como?
> Bruno: Assim ó. [o aluno liga os valores dentro dos parênteses com a potência 2, o que pode ser evidenciado na Figura 5].
> Bianca: Mas não vai dar certo. Não dá para resolver assim.
> Bruno: Vamos usar o raciocínio.
> Pesquisadora: Vocês conseguiram usar a distributiva?
> Bruno: Não.
> Pesquisadora: Por quê?
> Bianca: Porque não podemos distribuir a potência.
> Pesquisadora: Como assim?
> Bianca: Não podemos colocar a potência em cima do x e do 3, temos que fazer de outro jeito.
> Pesquisadora: De que jeito?
> Bruno: Acho que repetindo os parênteses. Vai ficar mais difícil.
> Pesquisadora: Então de que jeito vocês irão resolver?
> Bianca: Usando o raciocínio mesmo.

[8] Para Lima (2007), em uma *corporificação procedimental*, os símbolos são movimentados de um membro a outro de uma equação, como se fossem entidades físicas, e ainda carregam certa "mágica" de ser modificados por uma mudança de sinal, ou sendo colocado embaixo do termo que está no outro membro. No caso do exemplo deste artigo, o expoente de uma expressão foi colocado como coeficiente dela.

Pesquisadora: Ok. [apagam o que tinham feito anteriormente]

FIGURA 5 – Tentativa de “Distributiva” efetuada pelo Grupo B.



Fonte: Koch (2011, p.96).

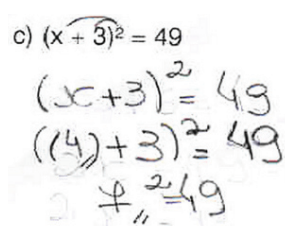
A Figura 5 mostra claramente que eles “ligaram” o expoente 2 ao x e ao 3, mas o que resultou num primeiro instante dessa “ligação” foi $2x + 6$, isto é, o expoente tornou-se um coeficiente, uma variação do *já-encontrado* pretendido (“acho que repetindo os parênteses”), com o qual teriam obtido $(x + 3) \cdot (x + 3)$, resultando em $x^2 + 6x + 9$. Porém, isso foi apagado do papel, pois, como explicaram na fala acima, pensaram que “não podemos distribuir a potência”. Isso evidencia que este procedimento não é uma propriedade matemática para esses alunos, mas sim uma corporificação procedimental (LIMA, 2007).

Neste diálogo, percebemos que os alunos do Grupo B pretendiam efetuar manipulações algébricas pertencentes ao mundo simbólico, isto é, a primeira abordagem deles foi tratar uma equação de avaliação como se fosse de manipulação. Ao iniciar essa manipulação, esses alunos tentaram utilizar os métodos conhecidos por eles, no caso a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que não é válida nessa situação, e que atuou como um *já-encontrado dificultador*.

Sem sucesso, esses alunos resolveram contornar o problema utilizando outra abordagem para a resolução. Intuitivamente, eles acreditavam que a manipulação realizada não era válida, por isso mudaram de estratégia.

Repensando a solução, o grupo decidiu que ela não estava correta, e a resolução foi reformulada como apresentado na Figura 6.

FIGURA 6 – Resolução apresentada pelo Grupo B para a equação $(x + 3)^2 = 49$.



Fonte: Koch (2011, p.96).

Durante a entrevista, explicaram o raciocínio feito.

Bruno: Bom, acho que o valor é o 4.

Bianca: É. 4 mais 3 é 7, e 7 ao quadrado é 49. [Escrevem na folha e verificam, por meio de substituição, se o valor é o correto]
Pesquisadora: Então qual o valor que vocês encontraram para o x?
Bruno: Valor 4.
Pesquisadora: Teria outro valor além do quatro? Algum valor negativo?
Bruno: Poderia ser o –10, mas aí ficaria –7 e o resultado seria –49.
Bianca: Então não tem. É só o 4 mesmo.
Pesquisadora: Qual é a resposta então?
Bianca: Somente o 4.
(Trecho da entrevista com o grupo B, para a equação $(x + 3)^2 = 49$

Durante a conversa com a pesquisadora, percebe-se que os alunos acreditam que *"repetir os parênteses"*, o que interpretamos como escrever a multiplicação $(x + 3) \cdot (x + 3)$, isto é, uma resolução por manipulação, seria *"mais difícil"*. Dessa forma, eles avaliaram a equação e encontraram 4 como raiz. Quando perguntados sobre algum outro valor para a incógnita, um dos alunos do grupo percebeu que –10 poderia ser uma raiz, mas descartou essa possibilidade ao elevar –7 ao quadrado e erroneamente obter –49, erro que não tinha sido cometido anteriormente por este grupo, mas que foi frequente nos outros grupos. Observamos, então, que o *já-encontrado* $(x)^2 = (–x)^2 = x^2$ ainda era frágil no trabalho desses alunos.

Considerando as equações de *manipulação*, os alunos não foram tão bem-sucedidos como foram com equações de avaliação, o que era esperado, dada a necessidade de uma manipulação simbólica mais sofisticada, e por eles não conhecerem ainda métodos de resolução de equações quadráticas. Para essas equações, as tentativas de busca de valores que as satisfizessem nem sempre foram bem-sucedidas, algumas vezes porque os alunos não conseguiam pensar em valores, outras vezes porque eles efetuavam cálculos erroneamente. Mesmo ao encontrar um número que satisfizesse a equação, isso não ocorreu da mesma forma que com equações de avaliação, em que as raízes eram mais evidentes. Isso pode ser percebido no trecho de entrevista abaixo, durante a resolução da equação $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Adriano: Vamos ter que tirar o 25 daqui. [Referindo-se à mudança de membro do valor 25].
Ana: Vai ficar –25.
Adam: Vamos tentar números... Acho que 1,25.
Adam: Não deu...
Ana: Tenta outro número.
Adam: Já tentei o 1,25 e o 2,5
[...]
Ana: Tem que ter valor negativo no x.
Adam: −2?
Ana: Não deu.
Adam: Tenta um número maior.
[...]

Pesquisadora: Vocês acham que só um número ou dois satisfaria essa equação?

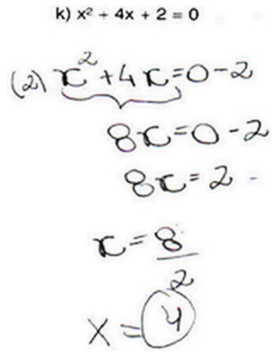
Ana: Só um número!
Pesquisadora: E esse número seria igual neste x^2 e neste outro x, ou podem ser diferentes?
Ana: Acho que tem que ser iguais. Se fossem diferentes teria que ter outra letra aqui. [Aponta para a equação]
Pesquisadora: O que vocês estão tentando agora?
Ana: Estamos tentando encontrar um número que ao quadrado dê 25. Mas o problema é este 10 aqui, que tem que ficar negativo.
Pesquisadora: E por que ele tem que ficar negativo?
Adam: Para que na hora da conta dê zero.
Ana: Negativo com negativo fica positivo.
Adam: Se for -2 ainda não daria. Aqui ficaria $4 - 20 + 25$ e não daria zero!
Ana: Tenta outro... será que -5 daria? [Adam faz a conta]
Ana: Deu certo!
Pesquisadora: Vocês encontraram o valor?
Ana: Sim.
Pesquisadora: E qual foi?
Ana: O -5!
Pesquisadora: Existiria outro valor?
Adam: Não.
(Trecho da entrevista do Grupo A para a equação $x^2 + 10x + 25 = 0$)

Este trecho de entrevista com o Grupo A, além de evidenciar a dificuldade desses alunos em avaliar uma equação de manipulação, também apresenta uma característica formal importante para a resolução de equações: a de que a uma mesma incógnita deve-se sempre atribuir o mesmo valor, esteja ela elevada ao quadrado ou não. Durante a entrevista, a pesquisadora pergunta "E esse número seria igual neste x^2 e neste outro x, ou podem ser diferentes?", e o dois alunos afirmam que é necessário utilizar o mesmo valor, ou "teria que ter outra letra aqui". Esta característica não foi evidenciada em outras pesquisas que encontramos. Filloy, Rojano e Solares (2010), inclusive, discutem a "polissemia do x", em que os alunos fazem uma "equalização termo a termo".

As poucas tentativas de usar procedimentos algébricos para resolver equações de manipulação foram sem sucesso, principalmente pela ausência de *já-encontrados* referentes a procedimentos algébricos para resolver equações quadráticas. Vários procedimentos errôneos encontrados na literatura foram utilizados por estes alunos.

Por exemplo, não seria fácil encontrar valores para a equação $x^2 + 4x + 2 = 0$, já que as raízes dela são irracionais, e, para resolvê-la, seria necessário utilizar alguma manipulação algébrica adequada para a situação. Numa tentativa de resolução, os alunos do Grupo D somaram termos que não são semelhantes, fazendo com que a equação se tornasse linear. Ao adicionar x^2 e $4x$, obtiveram $8x$, como se o expoente 2 de x^2 tivesse sido multiplicado pelo coeficiente 4, isto é, uma *corporificação procedimental*, em que o expoente de x passa a ser um coeficiente de $4x$. Essa transformação de uma equação quadrática para linear proporcionou aos alunos uma familiaridade que os fez pensar que haviam resolvido essa equação.

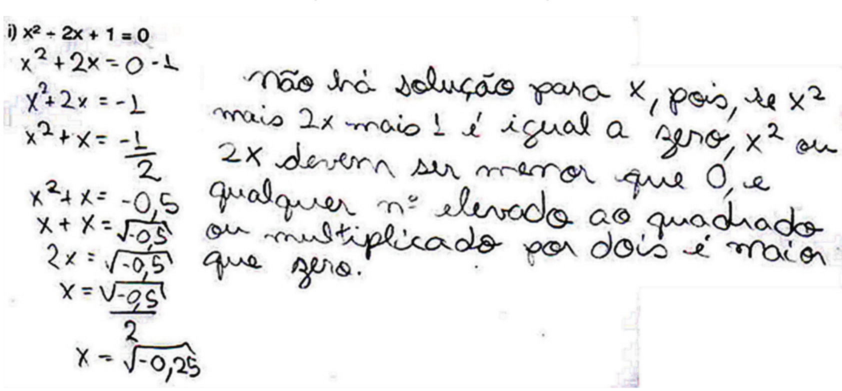
FIGURA 7 – Resolução do Grupo D para a equação $x^2 + 4x +2 = 0$.



Fonte: Koch (2011, p.128).

Já os componentes do Grupo C tentaram resolver a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ por meio do que chamaram de “regras”, isto é, manipulação algébrica característica do mundo simbólico, como apresentado na Figura 8, e detalhado no trecho de entrevista. Para resolvê-la, eles poderiam utilizar os *já-encontrados* de produtos notáveis vistos (de acordo com o currículo) no ano escolar anterior, e transformá-la em $(x + 1)^2 = 0$, obtendo 1 como raiz. Porém, eles usaram manipulações que conhecem para resolver equações lineares, e não foram bem-sucedidos. Parece-nos que a principal utilidade do ensino de produtos notáveis seria justamente para a resolução de equações, mas esse ensino não é feito em parceria.

FIGURA 8 – Resolução do Grupo C para a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$.



Fonte: Koch (2011, p.126).

No trecho de entrevista, eles explicaram como fizeram cada uma das passagens, e também que tentaram encontrar um valor que satisfizesse a equação, mas não lhes foi possível.

> Cris: Primeiro passamos o um pra lá... [Mostra a transposição de termo na equação]
> Cris: Depois eu passei o dois para o outro lado... [O coeficiente de x]
> Cris: Então a gente encontrou o valor $-\frac{1}{2}$...
> Cris: Aí depois eu passei para número decimal...
> Cris: Depois eu passei a raiz, e ficou $2x$ e passei o dois pra lá...
> Pesquisadora: Como você fez a raiz?
> Cris: Eu peguei o dois que estava no x e passei para a raiz [a potência de x^2 foi transposta para ou outro membro como raiz quadrada]. Aí ficou $x + x$ então ficou $2x$.
> Pesquisadora: Ok.
> Cris: Aqui é raiz de negativo... [refere-se a $\sqrt{-0{,}5}$], mas [o x] não é negativo porque negativo vezes negativo... um número negativo ao quadrado é positivo, e vai ser maior que zero...
> Carlos: Tá, então continua...
> Cris: Não dá pra fazer...
> Carlos: Mas fica mais próximo.
> Cris: Dá para passar o dois, fica raiz de –0,25, não ajuda muito...
> Carlos: Então não dá.
> Cris: Acho que tem que ter dois valores
> Carlos: Mas a raiz é negativa e negativo com negativo dá positivo, e a conta dá zero.
> Pesquisadora: Vocês acham que existe outra forma de fazer a letra i [$x^2 + 2x + 1 = 0$] sem ser por regras?
> Cris: Pensamos em outra forma... mas acho que não dá certo...
> Pesquisadora: E qual forma foi essa?
> Carlos: Procuramos números que dariam certo, mas não encontramos.
> (Trecho da entrevista do Grupo C para a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$)

Observa-se uma característica formal na explicação desses alunos sobre o porquê de não terem encontrado raízes para a equação dada. Por outro lado, os *já-encontrados* utilizados estavam relacionados a números positivos, já que eles afirmam que "qualquer número … multiplicado por dois é maior que zero", talvez, influenciados pelo *já-encontrado* "qualquer número (real) elevado ao quadrado é positivo", o que os impediu de continuar nessa linha de raciocínio. Novamente, as manipulações algébricas foram na direção de tornar a equação mais familiar, isto é, uma equação linear. Além disso, conjecturamos que os *já-encontrado* associados a produtos notáveis para a resolução de equações não foram evocados nesse contexto, talvez por não terem sido estudados no contexto de resolução de equações, e, para essa evocação, talvez seja necessária uma intervenção didática, isto é, ter um *já-encontrado* não significa que o aluno perceberá a possibilidade de utilização dele em uma situação diferente daquela na qual foi originalmente encontrado.

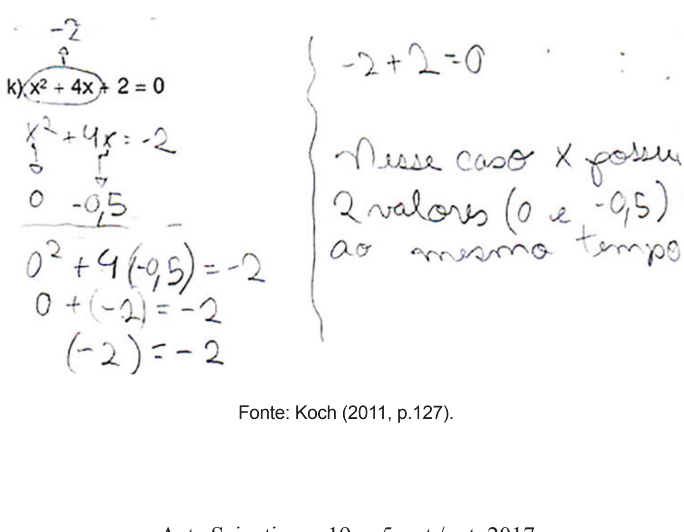
Observamos, na fala desses alunos, a ideia de corporificação procedimental muito presente na resolução dessa equação de manipulação. Eles “passaram” um termo para o outro membro da equação e transformaram um expoente em raiz quadrada sem compreender os princípios algébricos subjacentes a essa transformação. Além disso, não lhes foi possível avaliar esta equação de manipulação. Eles tiveram que tratá-la como manipulação, mas não foram bem-sucedidos ao utilizar, para o caso das quadráticas, procedimentos algébricos conhecidos (*já-encontrados*).

Sendo estes alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, gostaríamos de observar se eles utilizariam, por exemplo, o completamento de quadrados, procedimento estudado nesse ano escolar, o que não foi evidenciado. Conjecturamos que também esse conteúdo não é espontaneamente relacionado pelo aluno a equações quadráticas e à resolução delas. Dessa forma, talvez uma intervenção didática evocando esse método seja necessária, para que se possa usufruir dessa ideia para a resolução de equações.

Para as outras equações de manipulação apresentadas, os integrantes deste mesmo Grupo C tentaram novamente encontrar valores que as satisfizesse, isto é, fizeram tentativas de resolver equações de manipulação por avaliação, mas só obtiveram o valor zero na equação $8x^2 + 6x = 0$. Em especial, para a equação $x^2 + 4x + 2 = 0$, os alunos do Grupo C, diferentemente do Grupo D, apresentaram a solução da Figura 9, em que buscam valores, e acabam por obter dois valores que devem ser substituídos em x em cada termo e simultaneamente, como na pesquisa de Vaiyavutjamai, Ellerton e Clements (2005).

Não sendo possível a eles encontrar um valor que satisfizesse a equação (e talvez motivados pelo fato de terem anteriormente achado dois valores para as raízes de uma equação quadrática), esses alunos decidiram por tomar dois valores simultaneamente para x, substituindo um deles na incógnita ao quadrado e o outro na incógnita linear. Falta a eles, nesse exemplo, características formais de que se deve usar somente um valor de x para qualquer termo.

FIGURA 9 – Resolução do Grupo C para a equação $x^2 + 4x + 2 = 0$.



Fonte: Koch (2011, p.127).

Observando que esses alunos circularam $x^2 + 4x$ na equação e indicaram –2 com uma seta, entendemos que eles perceberam que, para que o primeiro membro seja igual a zero, essa expressão deve ser igual a –2. A expressão "$-2 + 2 = 0$" do lado direito na figura parece corroborar essa conjectura. Isso nos faz conjecturar que esses alunos utilizaram princípios algébricos ao invés de corporificações procedimentais de "passar" o termo 2 para o segundo membro, isto é, se uma expressão adicionada a 2 resulta em zero, significa que essa expressão é igual a –2. A tentativa dos alunos foi, então, de encontrar valores para x^2 e para $4x$ de forma que, somados, resultariam em –2.

CONCLUSÕES

Neste artigo, buscamos identificar os desafios de natureza cognitiva associados ao trabalho com equações quadráticas, em especial, quais *já-encontrados* evocados na transição entre equações quadráticas de avaliação e equações de manipulação. Para isso, elaboramos algumas equações quadráticas para serem resolvidas por alunos que ainda não haviam tido contato com tais equações, e fizemos entrevistas reflexivas com 10 alunos, divididos em duplas ou trios, que buscaram seus próprios conhecimentos para resolver as equações apresentadas.

Os dados coletados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013) e das ideias de equação de avaliação e de manipulação (LIMA, 2007), desenvolvidas a partir desse mesmo quadro teórico. Buscamos analisar como os estudantes trabalhariam com equações de avaliação, qual diferença desse trabalho para aquele com equações de manipulação, e quais características de cada mundo matemático estaria presente nas resoluções apresentadas.

Ao analisar o trabalho desses estudantes com equações de *avaliação*, evidenciamos que eles fizeram tentativas de resolução por algum tipo de avaliação, seja encontrando um valor que satisfizesse a equação, seja desfazendo as operações efetuadas sobre a incógnita. Houve, também, algumas manipulações simbólicas, de forma a transformar uma equação em outra mais simples. Essas transformações permitiram que esses alunos gerassem um *a-encontrar*, ao perceberem que uma equação na forma $x^2 = k$, com $k \geq 0$, tem raízes do tipo $\sqrt{k}$ e $-\sqrt{k}$. Alguns dos participantes dessa pesquisa apresentaram, ainda, dificuldades em lidar com números negativos, o que influenciou a decisão de quais e quantas raízes a equação em jogo teria. Essas estratégias foram bem-sucedidas, pois foi possível obter uma raiz para algumas equações, e ambas as raízes para outras.

No que se refere a equações de *manipulação*, as estratégias usadas anteriormente, de buscar um número que satisfizesse a sentença matemática, ou de desfazer as operações, não trouxeram sucesso para esses estudantes. Não lhes foi possível encontrar valores, mesmo quando as raízes eram inteiras, e, quando possível, somente uma raiz foi encontrada. Houve tentativas de transformar essas equações quadráticas em equações lineares, como ocorreu em Lima (2007). Entretanto, em nossa pesquisa, os alunos tinham a percepção, em vários momentos, de que a estratégia não parecia adequada para a situação, o que os fazia recuar, talvez por perceberem que os *já-encontrados* utilizados seriam dificultadores, e não como colaboradores, como por exemplo, quando os alunos recuaram ao tentar trabalhar com a propriedade distributiva. Justamente nesses momentos de recuo dos alunos parece-nos que os *já-encontrados* eram corporificações procedimentais, e não relacionados a princípios algébricos.

Entendemos que, sem terem um procedimento algébrico específico para resolver as equações, estes estudantes lançaram mão de características de todos os mundos matemáticos. Corporificado, ao lidar com números naturais, buscando valores para a incógnita; simbólico, ao tentarem utilizar procedimentos algébricos para a resolução; formal, por entenderem que a raiz de uma equação é um número que a satisfaz. Juntas, essas características possibilitaram que eles tivessem algum sucesso ao resolver equações quadráticas, mas não permitiram que eles extrapolassem os conhecimentos que tinham para essa resolução.

Sendo esta a primeira vez que esses alunos se depararam com equações quadráticas, percebemos que a transição entre o pensamento aritmético e o algébrico nesse tipo de atividade precisa ser feita. Nossa conjectura é a de que, para dar aos alunos subsídios para superar a lacuna cognitiva criada nessa transição, no caso de equações quadráticas, é preciso que haja intervenções didáticas a partir das quais eles possam compreender melhor como mobilizar seus *já-encontrados* de maneiras colaboradoras. Em particular, notamos que eles não utilizaram *já-encontrados* em situações diferentes das que foram originados, sugerindo que uma intervenção didática poderia destacá-los explicitamente.

Dados de nossa pesquisa, além de outras pesquisas relatadas neste artigo, mostram que características do mundo corporificado não são suficientes para que aconteça uma transição entre equações de avaliação e equações de manipulação no caso das quadráticas, por causa da manifestação de corporificações procedimentais, que são desconectadas de características formais. As ideias de manipulação algébrica pertencentes ao mundo simbólico, juntamente com as características formais que as regem, são fundamentais para que o aluno compreenda as manipulações simbólicas.

Os resultados mostram uma tendência forte entre os alunos para utilizar *já-encontrados* associados à situação em mão, a resolução de equações, e não evocar aqueles *já-encontrados* em outras situações – produtos notáveis ou completamento de quadrados por exemplo. De acordo com o currículo, os alunos já teriam trabalhado com esta ideia, assim uma intervenção visando ajudar no tratamento de equações quadráticas de manipulação pode envolver o destaque de *já-encontrados* potencialmente colaboradores. Quando tais ideias não pertenciam ao repertório de *já-encontrados* dos alunos, atividades que permitem o desenvolvimento desses *a-encontrar* representam uma outra intervenção possível.

A nossa conjetura é que a tendência de não evocar procedimentos algébricos em contextos diferentes daqueles em que eles foram originalmente encontrados remete o aprendiz ao uso de *já-encontrados* inadequados. Também acreditamos que esta tendência não se limita ao caso de resolução de equações. Uma implicação é que, frente a um novo conteúdo, ao invés de se apresentar um novo procedimento para efetuar sua resolução, pode ser interessante relacionar conteúdos novos àqueles *já-encontrados*, de forma que seja possível conectar também procedimentos novos e antigos, evitando assim a predominância do uso de corporificações procedimentais e privilegiando a relação entre os Três Mundos da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. R.; BRANDINI, R. C. A. R.; SZYMANSKI, H. *Entrevista na Pesquisa em Educação*. 4.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2011.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, Montreal, v.9, n.2, p.19-25, jun. 1989.

FILLOY, E.; ROJANO, T.; SOLARES, A. Problems Dealing with Unknown Quantities and two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.41, n.1, 2010.

GRAY, E.; TALL, D. O. Duality, Ambiguity and Flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, v.26, n.2, p.115-141, 1994.

GRAY, R.; THOMAS, M. Quadratic Equation Representations and Graphic Calculators: Procedural and Conceptual Interactions. In: 24TH ANNUAL MERGA CONFERENCE. *Proceedings*... p.274-282. Sydney: [s.n.]. 2001.

HERSCOVICS, N.; LINCHEVSKI, L. A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, The Netherlands, v.27, p.59-78, 1994.

KOCH, R. M. *Uma Introdução ao Estudo de Equações Quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática*. São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011.

LIMA, R. N. D. *Equações Algébricas no Ensino Médio:* uma jornada por diferentes mundos da matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p.358p. 2007.

LIMA, R. N. D.; HEALY, L. Revisitando o corte didático em álgebra: uma questão de conexão entre os mundos corporificado e simbólico? *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, v.57, p.15-34, jul./dez. 2010.

LIMA, R. N. D.; TALL, D. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, v.67, n.1, p.3-18, 2008.

SKEMP, R. Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, v.77, p.20-26, Dec. 1976.

TALL, D. *How Humans Learn to Think Mathematically:* Exploring the Three Worlds of Mathematics. New York: Cambridge University Press, 2013. 457p.

THOMAS, M. O. J.; TALL, D. O. The long-term cognitive development of symbolic algebra. *International Congress of Mathematical Instruction Working Group*. *Proceedings*... p.590-597. Melbourne: ICMI. 2001.

VAIYAVUTJAMAI, P.; CLEMENTS, M. A. Effects of Classroom Instruction on Students Understanding of Quadratic Equations. *Mathematics Education Research Journal*, v.18, n.1, p.47-77, 2006.

VAIYAVUTJAMAI, P.; ELLERTON, N. F.; CLEMENTS, M. A. *Students' Attempts to Solve Two Elementary Quadratic Equations*: A Study in Three Nations, 2005.