Resolução de problemas matemáticos aditivos: possibilidades da ação docente

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo
Beatriz Vargas Dorneles

RESUMO

Este artigo descreve um estudo experimental que foi realizado nos anos iniciais do Ensino Fundamental de duas escolas, uma pública e outra privada. Com o objetivo de aprimorar o desempenho dos alunos dos anos iniciais na resolução de problemas matemáticos aditivos, implementou-se um programa de formação continuada junto a um grupo de professores das duas escolas para proporcionar a eles avanços no conhecimento do processo de ensino e aprendizagem do campo conceitual aditivo; e construir com eles um programa de ensino que levasse em conta a construção de significados das operações de adição e subtração, a compreensão das relações semânticas encontradas nos problemas matemáticos aditivos, o ensino de procedimentos, de representações e de habilidades metacognitivas. O estudo não comparou a escola pública e a privada. A pesquisa envolveu a avaliação do desempenho em problemas aditivos de um total de 320 estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Desses, 167 alunos também participaram de um programa de ensino dos problemas aditivos. No estudo desenvolvido, a maioria das turmas experimentais evidenciou um pico no desempenho em comparação às turmas controle. A taxa de acertos mais acentuada das turmas experimentais pôde ser explicada pelo programa de formação continuada de suas professoras e pelo programa de ensino proposto a esse grupo de estudantes por intermédio delas, indo ao encontro do que várias pesquisas na área da eficácia escolar atualmente estão apontando: o professor tem um efeito maior do que anteriormente se pensava no desempenho do aluno. Os resultados evidenciam a importância de políticas e de ações de formação *continuada* de professores em exercício no próprio âmbito escolar, em que o coletivo dos professores esteja envolvido. Considera-se que mudanças em algumas escolas possam ser um passo inicial para a ampliação de transformações que atinjam, com o tempo, mais escolas, qualificando o ensino e a aprendizagem e desmitificando a ideia de que o conhecimento matemático só é para alguns.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Processo Ensino-aprendizagem. Formação Continuada.

Resolution of Additive Mathematical Problems: Possibilities of the teachers action

ABSTRACT

An experimental study in the Elementary School was developed, and two schools were studied, a private and a public one. With the objective to improve the performance of the pupils

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo é Doutora em Educação (UFRGS), professora convidada do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, professora adjunta do curso de Pedagogia, ULBRA Canoas/RS. Endereço para correspondência: Av Farroupilha, 8001, Canoas/RS, 92425900. E-mail: jcrjusto@gmail.com
Beatriz Vargas Dorneles é Doutora pela Universidade de São Paulo e Pós-Doutora pela Universidade de Oxford. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Endereço para correspondência: Av. Paulo Gama, 110, Porto Alegre/RS, 90040060.
E-mail: bvdornel@terra.com.br

in the resolution of additive mathematical problems, a program of continued formation for a group of teachers from the two schools was implemented to provide advances in the knowledge of the teaching and learning processes related to the additive conceptual field; to construct with these teachers an educational program that took in consideration the construction of meanings of the operations of addition and subtraction, the understanding of the semantic relations found in the additive mathematical problems, the teaching process of procedures, representations and metacognitive abilities. The study did not compare the public school and the private one, but involved the evaluation of the performance in additive problems of a total of 320 students from the Elementary School. From these 320, 167 pupils had also joined a program on teaching process of the additive problems. In this study, the majority of the experimental groups evidenced a higher improvement in their performance in comparison to the control groups. The most relevant rate of accuracy on the experimental groups could be explained by the program of continued formation their teacher joined, as well as the program of education in which these students took part and was presented to them by their teachers. All these results are similar to other studies' results in the area, which are related to school effectiveness on how the teacher influences more than what was previously expected, in relation with the performance of their pupils. These results evidence the importance of politics and action of continued formation of teachers in their own school and where all the teachers are involved. Those changes in some schools can be an initial step considering the improvement of the transformations that will, after a period of time, happen in more schools, what will qualify the teaching and the learning processes, what will change the idea that the mathematical knowledge is only possible for some students.

Keywords: Solving Problems. Teaching-learning Process. Continuing Education.

Este artigo descreve parte de uma pesquisa de doutorado realizado pela primeira autora, cujo foco incidiu na formação continuada de professores e na aprendizagem de problemas matemáticos aditivos. Mais precisamente, o problema de pesquisa foi: *Que influência tem um programa de formação continuada dos professores em exercício na escola e um programa de ensino sobre o campo conceitual aditivo no desempenho dos alunos em resolver problemas matemáticos aditivos?*

Nossa experiência como educadoras e formadoras de professores revela que grande parte dos docentes que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental e na Educação Infantil, além de medo, possuem pouco conhecimento de conteúdo e de didática da matemática, especialmente sobre a variedade de problemas aditivos e de raciocínios mais sofisticados que alguns problemas exigem para serem solucionados. Aliás, é comum encontrar sujeitos que apresentaram dificuldades em Matemática durante o período em que eram alunos e optaram pelos cursos de Pedagogia ou Normal Superior por acreditarem que, desse modo, não teriam que estudá-la novamente. Ensinar bem Matemática exige um empenho complexo e não há receitas para isso. Não há um caminho único para ensinar e aprender Matemática, dizem Onuchic e Allevato (2005). Mas, entendemos que é necessário e possível que se encontrem caminhos mais eficazes, pois, na escola, a Matemática ainda continua sendo um dos componentes curriculares mais temidos pelos alunos.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a resolução de problemas matemáticos se destaca por ser uma das áreas mais evidentes das dificuldades das crianças. Os professores desse nível de ensino, quando solicitados a comentarem sobre as dificuldades de seus alunos, informam que estes não sabem interpretar tais problemas e que apresentam muita insegurança em reconhecer quais operações matemáticas precisam ser usadas para resolvê-los.

Quando a questão se refere ao ensino de problemas matemáticos, também é revelada outra dificuldade. Ao propormos que estudantes do curso de Pedagogia falem sobre as suas dificuldades para ensinar Matemática, a resolução de problemas surge como uma necessidade de estudo. Como fazer para ensinar a criança a interpretar e resolver os problemas matemáticos corretamente? Mesmo professores experientes apresentam essa dúvida ou dificuldade, sejam eles ainda estudantes de Pedagogia ou professores com graduação já concluída.

Na pesquisa que ora descrevemos, procuramos verificar se o conhecimento matemático do professor sobre o conteúdo que ele ensina, no caso específico a resolução de problemas matemáticos aditivos, e o conhecimento didático sobre como ensinar esse conteúdo contribuem para a melhoria da aprendizagem das crianças. Em nosso estudo o conceito de educação de qualidade ou a melhoria da qualidade na educação está diretamente identificado com a melhoria dos níveis de aprendizagem dos alunos, ou seja, a melhoria de seu desempenho escolar; apesar de reconhecermos que uma educação de qualidade não se restringe apenas a esse aspecto.

Entendemos que o conhecimento matemático do professor, ou melhor, a falta de um conhecimento mais aprofundado sobre o se vai ensinar, ainda é um dos fatores do insucesso dos estudantes na Matemática. Cremos ser essa uma justificativa importante para que estudos sobre o ensino continuem sendo feitos e que, manifestadamente, cheguem até as escolas e seus professores, alcançando a aprendizagem dos alunos.

PROBLEMAS MATEMÁTICOS ADITIVOS

Em nosso estudo consideramos resolução de problemas matemáticos escolares aquelas situações que favorecem a aprendizagem de conceitos e estratégias que podem ser usados para resolver os problemas da vida. Assim, os problemas matemáticos propostos pela escola deveriam ter alguns aspectos em comum com os problemas que surgem fora dela, para que os alunos mais facilmente estabeleçam relações entre eles, e façam uso de estratégias aprendidas na escola para resolver também os problemas da vida.

Chamamos de problemas matemáticos as formulações de questões, em linguagem oral ou escrita, ligadas a um contexto significativo para as crianças, que exijam delas um raciocínio matemático para encontrar uma resposta a determinada questão. Para que a questão seja realmente considerada um problema, deve ser desafiadora ao aluno, fazendo com que ele sinta necessidade ou desejo de solucioná-la, como propõe Medeiros (1994, p.25): "um problema só é problema quando o indivíduo se apropria dele e é apropriado por ele, deseja pensar a respeito dele, estabelece uma busca contínua para a compreensão e solução do mesmo." Nesse sentido, entendemos que o papel do professor, como aquele a quem cabe propor e desafiar, é fundamental para despertar o desejo e a necessidade no aluno de encontrar soluções para as questões que só assim passam a ter o *status* de problemas.

No entanto, nem sempre aquilo que é chamado de problema pelos professores pode ser considerado um problema para os alunos. Muitas vezes, os problemas são apenas exercícios em razão da forma como são propostos. A prática de resolução de problemas matemáticos na escola costuma ter o seguinte ritual: o professor escreve o problema no quadro e os alunos o copiam e resolvem individualmente; o professor circula pela sala entre as classes, atendendo aos alunos com dificuldade (quando não fica em sua mesa, esperando que os alunos o procurem); estes pedem a confirmação dos resultados obtidos para o professor; quando a maioria da turma está pronta, um aluno é chamado ao quadro para a correção coletiva; a turma acompanha a solução do colega: se alguém erra, apaga os cálculos de seu caderno e copia os do quadro, sem aparente reflexão sobre o erro. Essa prática transforma aquilo que deveria ser desafiador e instigante em uma tarefa cansativa, pouco produtiva e com poucos ganhos para a aprendizagem.

Ainda muito comum é a prática adotada por professores de ensinar os algoritmos das operações e, em seguida, propor alguns exercícios de aplicação desses cálculos, que costumam ser chamados de problemas ou histórias matemáticas. Dessa forma, o aluno logo aprende que não necessita pensar para encontrar uma solução, pois só precisa organizar os números dados no problema na forma algorítmica recentemente ensinada e encontrar a resposta à pergunta, desvirtuando a essência dessa tarefa que é pensar por si próprio. Assim, em consonância com Vergnaud (1990), consideramos que se trata de resolução de problemas quando as situações em jogo ainda não se tornaram familiares para os alunos.

Comungamos com a posição de Quaranta e Wolman (2006) de que a resolução de problemas é uma atividade indispensável para construir o sentido dos conhecimentos. Sendo assim, os problemas são um meio fundamental para o ensino de um conceito. Entretanto, a escola ainda usa a resolução de problemas matemáticos para determinar o saber do aluno, ou seja, ela aparece vinculada à avaliação e seria muito mais producente se os problemas fossem tratados como possibilidade de construção de conhecimentos matemáticos e de modelagem de situações, o que ajuda a compreender o mundo que nos rodeia (CHAMORRO; VECINO, 2003). Resolvendo problemas o estudante põe em prática os conhecimentos que já possui, adaptando-os a novas situações. Para resolver um problema matemático ele precisa escolher a operação que o resolve e efetuar o cálculo, o que exige, portanto, conhecimentos que vão além de realizar contas adequadamente. Para escolher uma operação que resolve um problema é necessário que se tenha uma rede de conceitos sobre as operações matemáticas, construindo significados ligados a diversas situações a que elas pertencem.

A teoria dos campos conceituais foi desenvolvida pelo professor e pesquisador francês Gerard Vergnaud. Segundo ele, um campo conceitual define-se pelo conjunto de situações cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes. O campo conceitual das estruturas aditivas é definido por Vergnaud (1990) como o conjunto de situações que pedem uma adição, uma subtração ou uma combinação das duas operações para serem resolvidas e, ao mesmo tempo, pelo conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

As crianças podem demonstrar dificuldades na resolução de problemas no campo aditivo. Nunes e Bryant (1997) garantem que essas têm uma ligação com questões de sentido dos números e também com questões relacionadas a diferentes situações de adição e de subtração. Fayol (1996) destaca que as dificuldades podem estar relacionadas aos aspectos semânticos ou ao impacto das formulações e formas de apresentação dos problemas. Reconhecemos que esses fatores reforçam a necessidade de se propor problemas específicos para desenvolver determinados conceitos, pois o campo conceitual aditivo possui uma complexidade que deve ser levada em conta para compreender a sua aprendizagem.

A aprendizagem desse campo conceitual envolve a resolução de situações experimentais de forma que os estudantes possam fazer abstrações necessárias, partindo de uma linguagem comum a eles, privilegiando a negociação e a coordenação de significados, conforme aponta Golbert (2002). Esse entendimento nos desafiou a propor um programa de ensino de resolução de problemas aditivos.

Em um trabalho recente, Nunes e Bryant (2009) afirmam que enfocar a estrutura do problema, e não as operações aritméticas utilizadas para resolvê-los, se tornou prática dominante na pesquisa em Educação Matemática nas últimas três décadas ou mais. Pesquisas na área têm aprofundado a resolução desses problemas que vêm sendo classificados por diversos autores em categorias semânticas (CARPENTER; HIEBERT; MOSER, 1983; FAYOL, 1996; NESHER; GREENO; RILEY, 1982; NUNES; BRYANT, 1997; RILEY; GREENO; HELLER, 1983) e não mais pelas operações matemáticas que os resolvem.

Considerando as categorias semânticas, foram discriminados 20 problemas aditivos classificados em situações de: transformação, combinação, comparação e igualação (BRANDÃO; SELVA, 1999; GARCÍA, JIMÉNEZ; HESS, 2006; JIMÉNEZ; GARCÍA, 2002; MIRANDA; GIL-LLARIO, 2001; ORRANTIA, 2006). Cada uma das quatro categorias pode identificar distintos tipos de problemas, dependendo de que quantidade é desconhecida, ou seja, qual é o lugar da incógnita. Essas variações são importantes, porque exigem da criança diferentes raciocínios e estratégias de solução. Vejamos essas categorias.

TRANSFORMAÇÃO (T) Expressam uma ação direta sobre uma quantidade que causa um aumento ou um decréscimo, quer dizer, uma situação inicial sofre uma mudança e transforma-se em uma situação final.	**T1.** ***Acrescentar. Resultado desconhecido.*** Antônio tinha 12 figurinhas. Ganhou de seu amigo Bruno mais 8 figurinhas. Quantas figurinhas Antônio tem agora?
	T2. ***Diminuir. Resultado desconhecido.*** Gláucia tinha 14 moedas. Ela deu 3 moedas para Mônica. Com quantas moedas ela ficou?
	T3. ***Acrescentar. Mudança desconhecida.*** Sara tinha 5 chaveiros. Então ganhou de Cristina mais alguns chaveiros. Agora Sara tem 12 chaveiros. Quantos chaveiros Sara ganhou de Cristina?
	T4. ***Diminuir. Mudança desconhecida.*** Janaína tinha 22 lápis de cor. Na escola, ela deu alguns para suas amigas. Janaína agora tem 8 lápis. Quantos lápis ela deu?
	T5. ***Acrescentar. Início desconhecido.*** No meu aquário, há alguns peixes. Então eu coloquei mais 4 peixes. Agora eu tenho 12 peixes. Quantos peixes eu tinha antes?
	T6. ***Diminuir. Início desconhecido.*** Em uma partida, perdi 12 bolinhas de gude, ficando com 21. Quantas bolinhas de gude eu tinha no início do jogo?
COMPARAÇÃO (CP) Comparam quantidades.	**CP1.** ***Mais que. Diferença desconhecida.*** Alice tinha 12 balas. Irene tinha 5 balas. Quantas balas Alice tinha a mais que Irene?
	CP2. ***Menos que. Diferença desconhecida.*** Meu tio tem 48 anos e minha tia tem 29. Quantos anos minha tia tem a menos que meu tio?
	CP3. ***Mais que. Quantidade menor desconhecida.*** Luciana colheu 34 laranjas, ela colheu 16 a mais do que sua irmã Lúcia. Quantas laranjas Lúcia colheu?
	CP4. ***Menos que. Quantidade menor desconhecida.*** Minha mãe tem 42 anos, e minha tia tem 14 anos a menos do que ela. Qual a idade da minha tia?
	CP5. ***Mais que. Quantidade maior desconhecida.*** Roberto comprou uma lapiseira por 12 reais e um caderno que custou 9 reais a mais que a lapiseira. Quanto custou o caderno?
	CP6. ***Menos que. Quantidade maior desconhecida.*** Joel ganhou em uma partida 43 bolinhas de gude. Ele ganhou 18 a menos do que André. Quantas bolinhas André ganhou?

IGUALAÇÃO (I) Acarretam a comparação entre quantidades e uma mudança de uma dessas quantidades para que uma igualdade seja estabelecida.	**I1.** ***Acréscimo. Valor de igualação desconhecido.*** Na casa de Adalberto existem 22 árvores e na de Roberto existem 14. Quantas árvores Roberto precisa plantar para ficar com a mesma quantidade de árvores que Adalberto?
	I2. ***Decréscimo. Valor de igualação desconhecido.*** Na 4ª série, há 35 cadeiras e 26 crianças. Quantas cadeiras eu preciso retirar da sala para ficar com a mesma quantidade do que de crianças?
	I3. ***Acréscimo. Fazer o valor conhecido igualar.*** Marcelo tem 15 reais. Se a sua mãe lhe der mais 9, ele terá a mesma quantia que Davi. Quantos reais tem Davi?
	I4. ***Decréscimo. Fazer o valor desconhecido igualar.*** No ônibus que vai para POA, há 17 pessoas; se 6 pessoas descerem do ônibus que vai a Feliz, haverá o mesmo número de pessoas nele como no ônibus que vai para POA. Quantas pessoas estão no ônibus que vai a Feliz?
	I5. ***Acréscimo. Fazer o valor desconhecido igualar.*** Meu vestido tem 12 botões. Se o vestido de minha irmã tivesse 5 botões a mais, ele teria o mesmo número de botões que o meu. Quantos botões tem o vestido de minha irmã?
	I6. ***Decréscimo. Fazer o valor conhecido igualar.*** Neco tem 13 carrinhos. Se ele der 9 dos seus carrinhos, ele terá o mesmo número de carrinhos que Zeca. Quantos carrinhos tem Zeca?
COMBINAÇÃO (CB) Implicam situações estáticas entre uma quantidade e suas partes.	**CB1.** ***Todo desconhecido.*** Alexandre tem 8 bombons e Leandro tem 14. Quantos bombons eles têm ao todo?
	CB2. ***Parte desconhecida.*** Patrícia e Gabriel colecionam chaveiros. Eles têm, juntos, 22 chaveiros. Gabriel tem 14. Quantos chaveiros Patrícia tem?

QUADRO 1 – Categorias Semânticas dos Problemas Aditivos .

Resolução de problemas matemáticos aditivos

Os processos cognitivos e metacognitivos são a base para a resolução de problemas. Portanto, torna-se necessário desenvolver estratégias e processos de metacognição, assim como uma disposição positiva para resolver problemas matemáticos (VAN DE WALLE, 2009; NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2001; BRASIL, 1997). A eficácia na resolução de problemas pode ser conseguida a partir do ensino. Nickerson, Perkins e Smith (1994) ressaltam a complementaridade do ensino de estratégias e do ensino do conhecimento metacognitivo referente a quando se devem aplicar as estratégias e a como se pode averiguar se estão funcionando.

Trazemos os princípios e métodos da resolução de problemas que levam em consideração os diferentes aspectos relativos ao campo conceitual aditivo e seus processos de aprendizagem com uma síntese de objetivos compilada por Van de Walle:

> - *Desenvolver habilidades de análise de problema* – para melhorar a habilidade dos alunos em analisar um problema pouco conhecido, identificar a informação desejada e necessária, ignorar informação dispensável e expressar claramente o objetivo ou meta do problema ou tarefa.
>
> - *Desenvolver e selecionar estratégias* – para ajudar os estudantes a construir uma coleção de estratégias de resolução de problemas úteis em uma variedade de contextos e selecionar e usar essas estratégias adequadamente.
>
> - *Justificar as soluções* – para melhorar a habilidade dos alunos em avaliar a validez das respostas.
>
> - *Estender ou generalizar problemas* – para ajudar os alunos a aprender a ir além da solução para os problemas, a considerar resultados ou processos aplicados em outras situações ou usados para formar regras ou procedimentos gerais. (VAN DE WALLE, 2009, p.77)

Atualmente, atribui-se um papel importante à representação na resolução de problemas aditivos. A elaboração de uma representação é concebida como o processo pelo qual se estabelecem vínculos entre a situação proposta no problema, a rede semântica da pessoa, seu conhecimento de procedimentos e seu conhecimento geral acerca das relações matemáticas e espaciais (RESNICK; FORD, 1998).

Nickerson, Perkins e Smith (1994) lembram que alguns estudiosos sobre o assunto observaram que uma forma de alguém que está encontrando muita dificuldade em resolver um problema conseguir solucioná-lo é procurar um modo radicalmente diferente de representá-lo. A isso podemos agregar a ideia de Resnick e Ford (1998) que sugerem àquele que encontra alguma dificuldade na resolução de um problema verbal que utilize uma forma de representação intermediária (física ou visual), não linguística, pois esta representação manteria a informação do problema em um formato que se supõe seja mais acessível, enquanto se executam os cálculos, reduzindo a carga da memória e, portanto, a probabilidade de erros.

Resnick e Ford (1998, p.257) afirmam que "o delineamento do problema, qualquer que seja a sua forma, proporciona os materiais brutos a partir dos quais o sistema de processamento da informação elabora uma representação do problema. Essa representação determina, por sua vez, que estratégia de solução se escolhe." Para as situações apresentadas nos problemas aditivos, alguns pesquisadores preocuparam-se em desenvolver representações que auxiliassem os alunos a resolvê-los. Um deles foi Vergnaud (1990), que elaborou uma representação para as relações de base encontradas nos problemas aditivos por ele classificados, dos quais exemplificamos três:

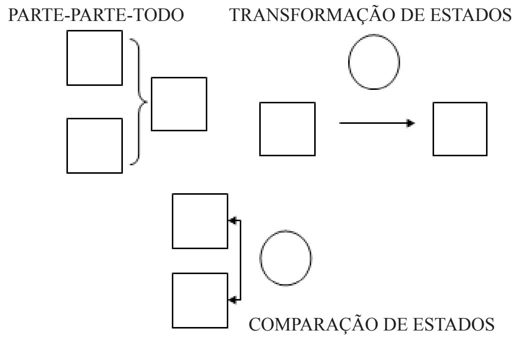

FIGURA 1 – Relações aditivas de base (VERGNAUD, 1990).

A partir de Vergnaud, outros pesquisadores trabalharam com a representação dos problemas aditivos. Destacamos os trabalhos de Damm (1992, 2003) que ensinou os alunos a usarem representações bidimensionais, em forma de gráfico, com o intuito de auxiliar na compreensão do enunciado do problema. Outro trabalho importante sobre a representação foi estudado por Nunes et al. (2005) no qual afirmam que o raciocínio aditivo baseia-se na coordenação de três esquemas de ação entre si: juntar, separar e colocar em correspondência; e precisa ser coordenado com o uso de dois sistemas de sinais: o sistema de numeração e os sinais + e -. Nesse trabalho os autores sugerem o uso de calculadoras, de diferentes representações gráficas e de retas numéricas como auxílio para representar o raciocínio matemático usado para resolver os problemas, a partir dos resultados de pesquisas anteriores por eles realizadas: Magina e Campos (2004) e Magina et al. (2001). A figura 2 mostra uma proposta de resolver um problema aditivo com o uso da reta numérica:

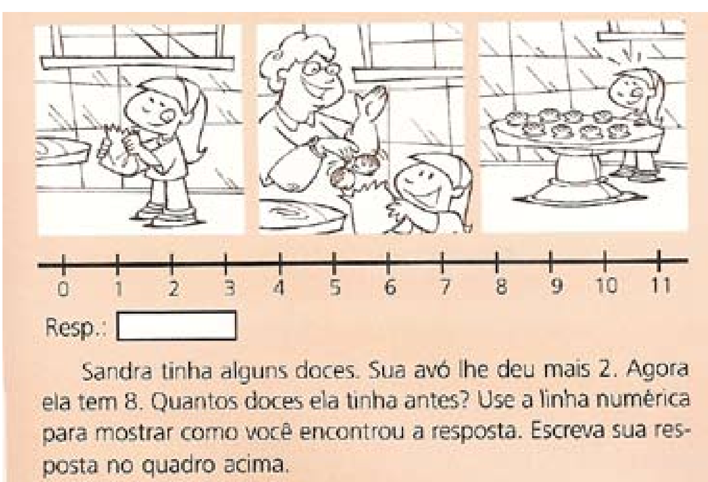

FIGURA 2 – O uso da reta numérica para a resolução de problema de transformação aditiva com início desconhecido. Fonte: Nunes et al. (2005).

Em um estudo realizado em escolas públicas da Bahia e São Paulo por Mendonça e colaboradoras (2007), as autoras destacam que ainda é difícil responder o quanto as questões de linguagem ou de ensino interferem no desempenho dos alunos, apesar de já existirem pesquisas demonstrando que esses dois fatores são intervenientes no desempenho. Também reforçam o valor da representação quando, ao verificarem que há uma estagnação nos grupos estudados na 3ª série em relação ao avanço no desempenho, explicam que a estagnação pode estar relacionada ao fato de que, nessa série, os professores costumam enfatizar a formalização das operações para resolver os problemas e proíbem o uso de recursos de representação (dedos, desenhos, etc.).

Lembramos o estudo de Orrantia (2003) no qual ele propôs que os problemas aditivos pudessem ser ensinados a partir do uso de representações figurativas ou gráficas (Figura 3). Nesse estudo, Orrantia (2003) usou as representações como ajudas para as crianças que apresentavam dificuldades em resolver os problemas aditivos. As representações usadas por ele foram inspiradas nas de Vergnaud (1990), mas adaptadas para a classificação de três categorias semânticas: transformação, combinação e comparação.

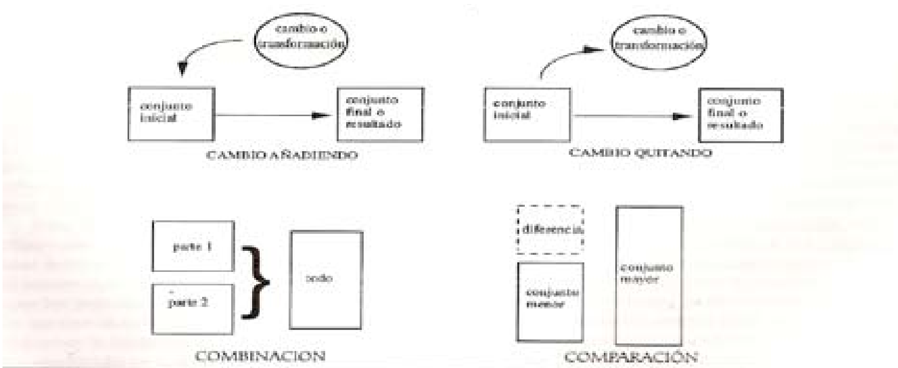

FIGURA 3 – Representações gráficas para os problemas aditivos.
Fonte: Orrantia (2003; 2006).

Para os problemas de igualação, Orrantia (2003; 2006) não apresentou uma representação. Como não encontramos em outro estudo uma representação para essa categoria de problemas, criamos, então, uma semelhante àquelas usadas por Orrantia para os problemas das outras categorias, nos quais usamos uma composição das representações para os problemas de comparação e de transformação:

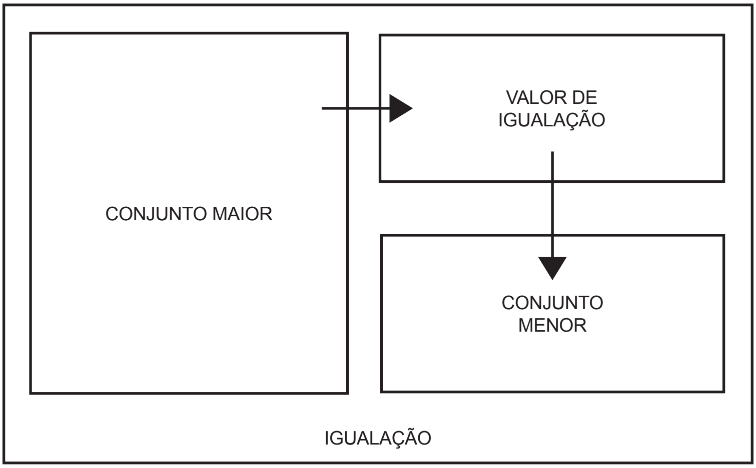

FIGURA 4 – Representação gráfica para os problemas de igualação.

O uso das representações nos problemas aditivos é uma das estratégias que abordamos em nossa pesquisa sobre o ensino desses problemas.

MÉTODO DA PESQUISA

A pesquisa empírica foi realizada durante o ano letivo de 2008 em uma escola pública e outra privada, localizadas no município de São Leopoldo (RS). A escolha por essas duas realidades se justifica pela composição de um número significativo de dados para avaliar a eficácia de um programa de formação continuada aliado a um programa de ensino. Esse maior número de dados se faz necessário, pois investigamos o processo de ensino e aprendizagem que ocorre em situações reais de sala de aula, focando a necessidade de conhecimento do professor sobre os conceitos relativos aos problemas aditivos e sobre o ensino destes aos seus alunos. Nosso enfoque, portanto, foi no professor: seu conhecimento sobre o objeto de ensino e sua didática de ensino, procurando verificar aquilo que está ao alcance do professor em situações reais de sala de aula. Os resultados das escolas foram analisados separadamente e estabeleceu-se a comparação entre os resultados das turmas controle e experimental da mesma série e da mesma escola.

As escolas pesquisadas situam-se em bairros vizinhos e há pouca distância entre elas. O bairro da escola privada é residencial e o da escola pública possui residências e estabelecimentos comerciais. Os dois bairros são próximos ao centro da cidade. A escola pública é uma das escolas municipais com melhores condições gerais e de desempenho. Os alunos pertencem à classe média baixa e são residentes no próprio bairro ou em bairros vizinhos. A escola está localizada em uma esquina com um terreno de aproximadamente 1.000m^2. Compõe-se por um prédio de dois andares com, aproximadamente, 825m^2. Todas as salas têm espaço adequado ao número de alunos que nela estudam. O pátio é pequeno. Percebe-se que existe cuidado e zelo por parte da direção, professores, funcionários e alunos com o espaço escolar. No ano da pesquisa, na escola pública estudavam 282 alunos nos dois turnos. O índice de evasão e repetência na escola, nesse ano, chegou a 8%. A escola privada ocupa um espaço nobre no bairro em que está situada, pois se encontra em meio a uma área verde. Os alunos que a frequentam pertencem às classes média alta e alta. O espaço escolar é amplo, apresenta uma área total de 41.598m^2 com uma vasta área verde. Possui quatro prédios grandes e dois ginásios de esportes, sendo a área construída de 7.620m^2.

As professoras participantes da pesquisa possuem curso superior na área da educação ou estão em curso. Algumas com vários anos de docência e outras com experiência de dois a cinco anos.

Alves e Franco (2008) e Franco et al. (2007) trazem cinco categorias de fatores encontradas na literatura brasileira ligados à eficácia escolar. Dentre elas, nosso foco de análise concentrou-se nas categorias *clima acadêmico* e *ênfase pedagógica*, para as quais conseguimos maior número de elementos através das intervenções da pesquisa, principalmente durante as observações de aula.

Para cada uma das séries dos anos iniciais do Ensino Fundamental foram escolhidas uma turma experimental e outra de controle, a partir do aceite de participação voluntária dos professores. As turmas cujas professoras aceitaram, voluntariamente, participar da formação continuada compuseram o grupo experimental. Nessas turmas as professoras aplicaram um programa de ensino que foi planejado conjuntamente com a pesquisadora.

Para verificar a eficácia do trabalho desenvolvido nas turmas experimentais, avaliou-se, através da aplicação de testes, o desempenho em problemas aditivos de um total de 320 estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Desses, 167 alunos faziam parte das turmas que participaram do programa de ensino dos problemas aditivos.

Os testes foram realizados em três momentos – pré-teste (aplicado antes do trabalho realizado com os professores), pós-teste 1 (logo após a aplicação do programa de ensino) e pós-teste 2 (no início do ano letivo seguinte para verificar a estabilidade da aprendizagem). Os testes propunham a resolução de vinte problemas aditivos pelos alunos das turmas controle e experimentais. Cada momento de aplicação dos testes foi proposto em blocos de dez problemas cada, sempre em dias diferentes para não sobrecarregar as crianças.

O programa de formação continuada se constituiu pela realização de quatro oficinas sobre ensino e aprendizagem de problemas aditivos e, também, pelo acompanhamento de planejamentos e observações de aulas durante a implementação do programa de ensino, que foi elaborado pelas professoras em colaboração com a pesquisadora.

A análise e a interpretação dos dados foram quantitativas e qualitativas, pois entendemos que os resultados encontrados somente têm sua significação ao serem discutidos e pensados por essas duas vias, visto que buscamos verificar se as intervenções da pesquisa auxiliaram na melhoria da aprendizagem dos alunos. A eficácia do programa de ensino e do programa de formação continuada para o melhor desempenho dos alunos somente pode ser avaliada após exaustiva reflexão e interpretação que buscaram dar sentido aos resultados encontrados. A figura 5 ilustra os caminhos e relações que estabelecemos para analisar e interpretar os resultados da pesquisa:

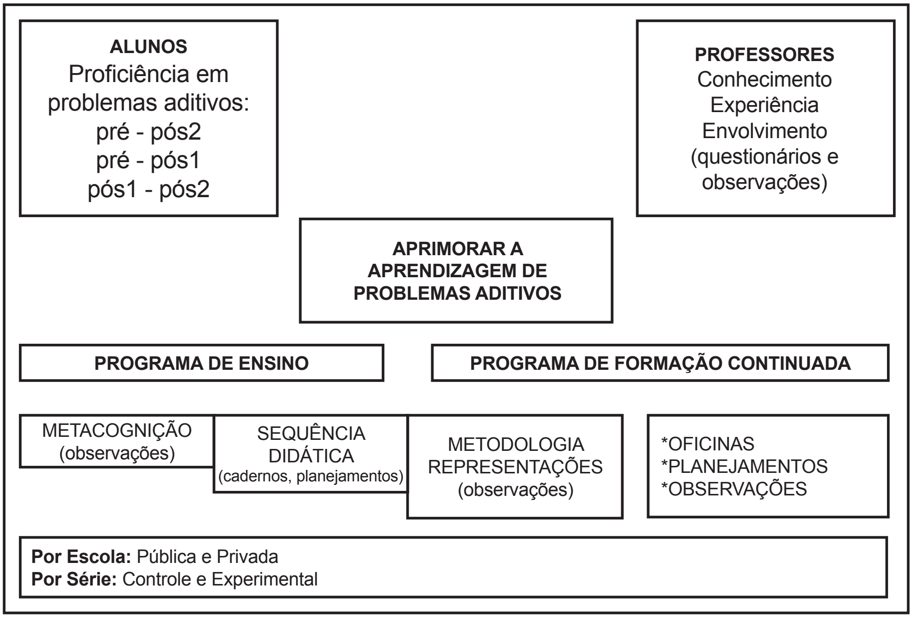

FIGURA 5 – Quadro de relações estabelecidas para análise.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os estudantes da escola pública e da escola privada mostraram uma melhora de desempenho na resolução de problemas aditivos, de uma forma geral, tanto as turmas controle quanto as turmas experimentais. Os gráficos 1 e 2 mostram o desempenho dos grupos controle e experimental das duas escolas em cada um dos períodos.

Na escola pública verificou-se um aumento gradual no grupo controle e um aumento mais acentuado no grupo experimental no período Pós1. Os estudantes da escola privada mostraram um desempenho semelhante nos dois grupos, onde ficou visualmente evidente que o grupo controle parte (Pré) e chega (Pós2) em um desempenho superior ao grupo experimental. No entanto, o grupo experimental teve um desempenho superior no Pós1, o que sugere que o programa de ensino influenciou positivamente esse grupo de alunos no período em que fora desenvolvido.

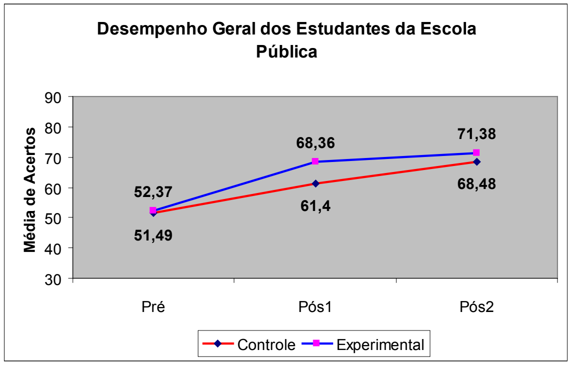

GRÁFICO 1 – Desempenho Geral dos Estudantes da Escola Pública.

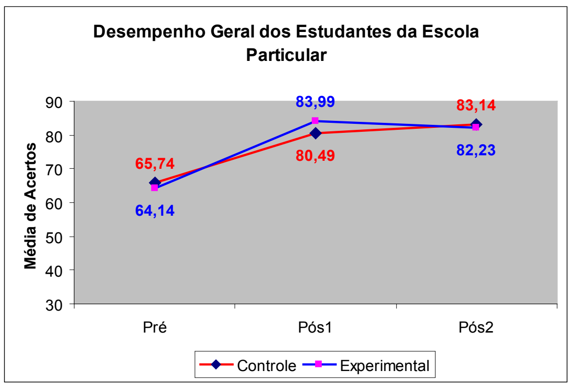

GRÁFICO 2 – Desempenho Geral dos Estudantes da Escola Privada.

Os problemas aditivos mais difíceis nas duas escolas foram os não-canônicos de igualação I4 e o de comparação CP6. Mesmo na 4ª série, esses problemas ainda apresentaram um índice baixo de acertos: média de 23% (I4) e 46% (CP6) na escola pública, e 56% (I4) e 67,5% (CP6) na escola privada. Esse fato corrobora os achados de outras pesquisas, em que os problemas não-canônicos são considerados os mais difíceis por alunos de mesma faixa etária (GARCÍA; JIMÉNEZ; HESS, 2006; JIMÉNEZ; GARCÍA, 2002; MIRANDA; GIL-LLARIO, 2001; ORRANTIA, 2006; PESSOA, 2002; SÁ, 2002). São considerados não-canônicos os problemas que apresentam uma situação aditiva que requer uma subtração ou, ainda, uma situação subtrativa que requer uma adição para encontrar a resposta (ORRANTIA, 2003; 2006).

Nosso estudo mostrou que há uma tendência linear crescente ao longo das séries nas duas escolas em relação à taxa de acertos nos problemas aditivos, evidenciada principalmente nas turmas controle. Mendonça e colaboradoras (2007) também verificaram isso em um estudo realizado em escolas públicas da Bahia e São Paulo. Elas justificam que esse é um resultado já esperado, pelo menos em parte, devido ao grau de maturidade inerente a cada faixa etária das séries estudadas. Lembramos que, para Vergnaud (1990), um campo conceitual é construído normalmente pela criança através da experiência na vida diária e na escola, sendo um conhecimento desenvolvido dentro de um longo período de tempo por meio da experiência, maturação e aprendizagem. Como é grande a diversidade dos conceitos envolvidos nas estruturas aditivas, a sua aprendizagem se dá "a médio e longo prazo, devendo [o trabalho nesse campo conceitual] ser proposto ao longo das quatro séries iniciais." (MENDONÇA et al., 2007, p.225).

A taxa de acertos mais acentuada das turmas experimentais pode ser explicada pelo programa de formação continuada de suas professoras e pelo programa de ensino proposto a esse grupo de estudantes por intermédio delas. Essa afirmação vai ao encontro do que vários pesquisadores da área da eficácia escolar atualmente estão apontando: que o professor tem um efeito maior do que anteriormente se pensava no desempenho do aluno (BROOKE; SOARES, 2008; MARZANO; PICKERING; POLLOCK, 2008).

Algumas professoras das turmas experimentais souberam integrar as experiências novas e conhecimentos adquiridos ao longo do programa de formação ao seu saber-fazer remodelando a sua prática. Para exemplificar, lembramos a professora da 3ª série da escola pública que fez uma adaptação das representações de Orrantia (2003; 2006), usando cores diferentes para cada forma que comporta os dados do problema – o que surtiu um efeito positivo no desempenho das crianças.

Os resultados por nós encontrados acenam para aspectos específicos do pensamento que são passíveis de ensino. Há muito que ser feito em relação ao "aprender a ensinar" para que os professores possam assumir a tarefa de "ensinar a aprender e a pensar" com maior conhecimento de conteúdo e didático de conteúdo, de maneira mais consciente, autônoma e eficaz.

O que encontramos não pode ser visto como uma receita simplista para a eficácia. A nossa interpretação do ocorrido é uma de várias possíveis e tem a intenção de chamar a atenção sobre a relevância do professor para a melhoria do ensino e da aprendizagem de problemas matemáticos aditivos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sob a perspectiva de que a pesquisa em educação escolar geralmente revela o já esperado, trazemos as nossas conclusões sobre o estudo realizado com a expectativa de ajudar a mostrar aspectos positivos do trabalho docente que levam à melhoria da aprendizagem.

Verificamos que as turmas experimentais tiveram uma taxa de acertos mais elevada que as turmas controle em ambas as escolas, pública e privada. Mesmo que tenha havido exceções, estas puderam ser explicadas e não comprometeram a nossa interpretação de que o programa de formação e o programa de ensino foram relevantes para a qualificação da aprendizagem das crianças.

Percebemos que os professores aprenderam a ensinar com maior conhecimento de conteúdo, pois eles passaram a conhecer a variedade semântica dos problemas aditivos e também a identificar a sua diferença em termos daqueles que exigem raciocínios mais sofisticados do que outros para serem resolvidos. Isso aprimorou a escolha dos problemas matemáticos que eram propostos nas aulas, qualificando as situações de aprendizagem. Para isso, o conjunto das ações do programa de formação continuada como as oficinas, os planejamentos e as observações foram fundamentais.

Apesar das constatações que fizemos, não podemos afirmar que exista uma *relação determinista* entre o conhecimento do campo aditivo pelo professor e o melhor desempenho de seus alunos, pois também encontramos evidências de melhora na aprendizagem em grupos da escola pública na qual os professores não tinham conhecimento sobre os diferentes problemas do campo aditivo e de sua complexidade de ensino. O que verificamos foram evidências de vantagens na aprendizagem das crianças cujos professores tinham mais conhecimento de conteúdo e didático de conteúdo.

O desempenho foi analisado por turma e escola, lembrando que os sujeitos da pesquisa foram o coletivo de cada uma das turmas, assim como seus professores regentes, com características de complexidade que cada sujeito agrega, composta pela diversidade dos sujeitos, pelas conexões ou relações com diferentes graus de importância e pela sua integralidade ou totalidade como um sistema. O que queríamos ver eram as características que levam a uma aprendizagem eficaz dos problemas aditivos em situações escolares reais, em que nenhuma seleção de alunos foi realizada e nem momentos extras de ensino foram criados. Os resultados não apresentaram avanços surpreendentes como encontrados em pesquisas de intervenções com um reduzido grupo pré-selecionado de alunos e realizadas em momentos especiais de interação.

O estudo mostrou que os resultados dos testes, apesar de apresentarem vantagens nas turmas experimentais, não foram acentuadamente contrastantes se comparados com as turmas controle. Essa questão não surpreende, já que são vários os fatores intervenientes para a aprendizagem. As diferenças de desempenho das turmas não apresentaram uma regularidade para que pudéssemos alcançar uma explicação ou resposta simples e única. Pelo contrário, evidenciaram a complexidade que encontramos em situações reais de sala de aula: características individuais dos estudantes, composição das turmas, características individuais e profissionais dos professores, entre tantos outros fatores. Isso revigora a premissa de que em educação não existem receitas prontas e únicas e nem resultados imediatos. É preciso tempo, persistência, conhecimento, trabalho conjunto, projeto pedagógico.

A diversidade e a dinâmica das relações impõem a sua força, marcando sua imponência, definindo cada sala de aula, cada escola, como um espaço de reflexão e formação, original e sempre novo, mesmo que antigo, estagnado, repetitivo. A mudança, a renovação, o jeito novo de olhar e entender esse espaço e tempo escolar precisam compreendê-lo como um lugar de individualidades e de coletividades, de diversidades e de igualdades, de diferentes aprendizagens, de existência própria e independente do querer de uma única pessoa (o professor ou o aluno); é um espaço de relações, por isso dinâmico.

O espaço e tempo escolar exigem uma ação planejada, intencionada pelo professor, prevendo uma reação dos estudantes que nem sempre será a esperada por ele – o que solicita uma nova ação planejada e intencional por parte do professor. Ação e reação previsível, mas incerta.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. T. G.; FRANCO, C. A pesquisa em eficácia escolar no Brasil: evidências sobre o efeito das escolas e fatores associados à eficácia escolar. In: BROOKE, N.; SOARES, J. F. (Org.). *Pesquisa em eficácia escolar:* origem e trajetórias. Tradução: Viamundi Idiomas e Traduções; Cleusa Aguiar Brooke; Rômulo Monte-Alto. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

BRANDÃO, A. C.; SELVA, A. C. V. O livro didático na Educação Infantil: reflexão versus repetição na resolução de problemas matemáticos. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v.25, n.2, p.69-83, jul./dez. 1999.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática*. Vol. 3. Brasília, 1997.

BROOKE, N.; SOARES, J. F. (Org.). *Pesquisa em eficácia escolar:* origem e trajetórias. Tradução: Viamundi Idiomas e Traduções; Cleusa Aguiar Brooke; Rômulo Monte-Alto. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008.

CARPENTER, T. P.; HIEBERT, J.; MOSER, J. M. The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, Boston, v.14, n.1, p.55-72, 1983.

CHAMORRO, M. D. C.; VECINO, F. El tratamiento y la resolución de problemas. In: CHAMORRO, M. D. C. (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación, 2003.

DAMM, R. F. *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. Tese de Doutorado. Estrasburgo, ULP, 1992.

DAMM, R. F. Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

FAYOL, M. *A criança e o número:* da contagem à resolução de problemas. Tradução: Rosana Severino Di Leone. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FRANCO, C. et al. Qualidade e equidade em educação: reconsiderando o significado de "fatores intraescolares". *Ensaio: aval. pol. públ. Educ.*, Rio de Janeiro, v.15, n. 55, jun. 2007, p.277-298. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php? Acesso em 30/10/09.

GARCÍA, A. I.; JIMÉNEZ, J. E.; HESS, S. Solving Arithmetic Word Problems: An analysis of classification as a function of difficulty in children with and without arithmetic LD. *Journal of Learning Disabilities*, vol. 39(3), p.270-281, May/June 2006.

GOLBERT, C. S. Percepção, representação e operação na aprendizagem da matemática. In: BECKER, F. (Coord). *Função Simbólica e Aprendizagem.* Coleção Epistemologia Genética e Educação. Porto Alegre, 2002.

JIMÉNEZ, J. E.; GARCÍA, A. I. Strategy choice in solving arithmetic word problems: are there differences between students with learning disabilities, G-V poor performance and typical achievement students? *Learning Disability Quarterly*, 25, p.113-122, Spring 2002.
MAGINA, Sandra et al. *Repensando Adição e Subtração:* contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM Editora, 2001.
MAGINA, S.; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. *Educação Matemática em Pesquisa*. Educ. São Paulo, v.6 n.1, 2004. pp.53-71.
MARZANO, R. J.; PICKERING, D. J.; POLLOCK, J.E. *O ensino que funciona:* estratégias baseadas em evidências para melhorar o desempenho dos alunos. Tradução: Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.
MEDEIROS, C. F. de. Por uma Educação Matemática como intersubjetividade. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). *Educação Matemática*. São Paulo: Moraes, 1994.
MENDONÇA, T. M. et al. As estruturas aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2007, vol.10, n.2. pp.219-239.
MIRANDA, A.; GIL-LLARIO, M. D. Las Dificultades de Aprendizaje en las Matemáticas: concepto, manifestaciones y procedimientos de manejo. *Revista de Neurologia Clínica*, 2(1), p.55-71, 2001.
NATIONAL RESEARCH COUNCIL. *Adding It Up:* Helping Children Learn Mathematics. KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. (Ed.). Washington, DC, USA: National Academy Press, 2001.
NESHER, P.; GREENO, J. G.; RILEY, M. S. The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, Boston, v. 13, n.4, pp.373-394, nov./dec. 1982.
NICKERSON, R.S.; PERKINS, D.N.; SMITH, E.E. *Enseñar a pensar*: aspectos de la aptitud intelectual. 3.ed. Tradução: Luis Romano y Catalina Ginard. Barcelona, España: Paidós/M.E.C., 1994.
NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artmed, 1997.
______. *Paper 4: Understanding relations and their graphical representation*. Key understandings in mathematics learning. Nuffield Foundation, London, 2009. Disponível em: www.nuffieldfoundation.org. Acesso em: 04 ago. 2010
NUNES, T. et al. *Educação Matemática*: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.
ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. 2.ed. rev. São Paulo: Cortez, 2005. pp.213-231.
ORRANTIA, Josetxu. *Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas:* una perspectiva evolutiva. Revista de Psicopedagogia, vol 23(71), 2006. pp.158-180.
ORRANTIA, Josetxu. *El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas*

aritméticos com estructura aditiva. Infancia y Aprendizaje, v.26(4), p.451-468, 2003.
PESSOA, C. A. S. Interação Social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. In: *Anais da 25ª ANPED*, set/out, 2002. Disponível em: http://www.anped.org.br/25 Acesso em 09 jan. 2004.
QUARANTA, M. E.; WOLMAN, S. Discussões nas aulas de matemática: o que, para que e como se discute. In: PANIZZA, M. e colaboradores. *Ensinar matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais:* análise e propostas. Tradução: Antonio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006.
RESNICK, L. B.; FORD, W. W. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Tradução: Alejandro Pareja. Barcelona, España: Paidós, M.E.C., 1998.
RILEY, M. S., GREENO, J. G.; HELLER, J. I. Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In: GINSBURG, H. (Ed.). *The Development of Mathematical Thinkin.* New York: Academic Press, 1983.
SÁ, Pedro F. Porque alguns problemas aditivos são mais difíceis que outros? In: *Anais do V Encontro Pernambucano de Educação Matemática*, out. 2002. Disponível em: http://www.dmat.ufpe.br/~mro/extensao/v_epem/anais. Acesso em 09 jan. 2004.
VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactiques des Mathématiques*, 10 (23), p.133-170, 1990.

Recebido em: set. 2010 **Aceito em**: nov. 2010