A formação dos professores de matemática: problema pedagógico, didático e cultural

Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla

Tradução: Lucino Strim

RESUMO

O problema científico que se esconde atrás da atividade de formação dos professores de matemática possui proporções enormes que envolvem não somente aspectos de conhecimento matemático, mas também a pedagogia, a didática disciplinar e a competência cultural em geral. Neste artigo, coloca-se o problema geral em uma ótica pragmatística e algumas de suas possíveis interpretações.

Palavras-chave: Formação de Professores de Matemática. Didática da Matemática. Epistemologia e História da Matemática. Avaliação em Matemática. Competências em Matemática.

The mathematics teachers education: A pedagogic, didactic and cultural problem

ABSTRACT

The scientific problem hidden behind the activity of teachers education is really enormous, and it deals both with mathematical knowledge and with pedagogical issues, disciplinary didactics and, more generally, cultural ability. In this paper we put forward the general problem according to a pragmatist viewpoint and we consider some possible generalizations.

Keywords: Mathematics Teachers Education. Didactic of Mathematics. Epistemology and History of Mathematics. Assessment in Mathematics. Competence in Mathematics.

CULTURAS PARA A FORMAÇÃO

A problemática da formação cultural inicial dos professores de matemática tem, ao menos, dois desdobramentos de grande interesse preliminar para quem se dedica à didática da matemática:

Bruno D'Amore é professor do departamento de Matemática da Universidade de Bologna, Itália. Faculdade de Ciência da Formação, Universidade de Bolzano, Itália. Università di Bologna.Via Zamboni, 33 – 40126 Bologna – Partita IVA: 01131710376. E-mail: damore@dm.unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla é professora de Didática da Matemática, Universidade de Bologna, Itália. Faculdade de Ciência da Formação, Universidade de Bolzano, Itália, e da Alta Escuela Pedagógica de Locarno, na Suíça. Università di Bologna. Via Zamboni, 33 – 40126 Bologna – Partita IVA: 01131710376. E-mail: damore@dm.unibo.it

Lucino Strim é licenciado em Estudos Sociais e Pedagogia. Professor de Italiano junto à ACIRS. Rua Santa Helena, nº 40, apto. 101 – 92310-110 – Canoas – RS. E-mail: strim@terra.com.br

- estabelecer de que cultura *matemática* precisam realmente os professores de matemática;
- estabelecer de que cultura *didática* precisam realmente os professores de matemática.

Esses temas se entrelaçam de maneira complexa com:

- as expectativas da sociedade, em relação a competências matemáticas por parte dos estudantes concluintes de cada curso de estudos (escola primária e escolas secundárias, organizadas de modo bastante diferente nos vários países do mundo);
- as convicções dos professores “a montante”, pelo que diz respeito à matemática, sua didática, sua aprendizagem, suas finalidades, seus usos, suas aplicações.

É muito diferente falar de professores em função ou de professores em formação:

- os primeiros geralmente já elaboraram suas próprias epistemologias, frequentemente baseadas, acima de tudo, na experiência pessoal (BROUSSEAU, 2008a, 2008b);
- os segundos, por falta de uma formação específica cuidadosa, nada mais podem fazer do que criar expectativas e modelos baseados em sua experiência anterior enquanto alunos, tomando como modelos (positiva ou negativamente) seus professores anteriores, conforme afirma o mesmo Felix Klein (LORIA, 1993).

UM QUADRO: REFERENCIAL TEÓRICO

Em relação aos temas mais ou menos explicitamente destacados na seção **“Culturas para a formação”**, há uma ampla bibliografia. Nós nos limitaremos a citar somente os trabalhos que julgamos essenciais para esclarecer nossa perspectiva.

Lembramos os trabalhos de Furinghetti (2001) e de Carrillo e Contreras (1995) sobre as convicções e o de Porlàn et al. (1999) no que diz respeito às expectativas da sociedade. As convicções dos professores determinam profundamente sua ação, às vezes inconscientemente; enquanto as expectativas da sociedade influenciam, mais ou menos abertamente, as convicções.

Sobre as diferentes expectativas dos estudantes e dos professores, a respeito da relação entre a matemática ensinada e aprendida em sala de aula e suas aplicações “externas”, veja-se D’Amore e Fandiño Pinilla (2001); este tipo de problemática estupidamente banalizada e, portanto, ignorada, insere-se muito bem no vasto campo da reflexão *etnomatemática*, à qual ainda faremos referência a seguir (D’AMBROSIO, 2002).

Quanto à complexa problemática da preparação dos professores e à sua relação com vários quadros referenciais teóricos, remetemos para Fandiño Pinilla (2001, 2002) para um panorama vasto, porém (necessariamente) não exaustivo, estritamente ligado também com as problemáticas do currículo e da avaliação; e para Blanco (1991) por sua especificidade *ante litteram*. Nesses trabalhos, demonstra-se como o tema que estamos aqui tratando seja objeto de estudo no mundo inteiro, assumindo hoje um destaque até mesmo de pesquisa específica por parte dos didatas da matemática, conforme destaca também Portugais (1995). De fato, por ser esta mesma formação entendida do ponto de vista legislativo como um conjunto de ensinamentos, não pode ser pensada como um processo isento dos bem conhecidos "fenômenos didáticos" descritos na "didática fundamental (contrato didático, teoria das situações, teoria dos obstáculos, etc.) (veja-se D'AMORE, 1999b). Nasce disso uma epistemologia complexa que poderia levar a uma real "perda de sentido". Refletir sobre este ponto é *essencial* para quem atua na formação inicial dos professores de matemática, fato que comporta uma séria preparação em didática da matemática daqueles que se ocupam na formação inicial dos professores de matemática, embora as disciplinas ensinadas possam ser diferentes da específica didática da matemática.

Ainda, o estudo de Houdement e Kunzniak (1996) põe em evidência as estratégias de que se pode/deve lançar mão na formação inicial dos professores de matemática:

- estratégias culturais que têm o objetivo de aumentar os conhecimentos do professor em formação;
- estratégias baseadas no *demonstrar como se faz,* nas quais se convida para observar o que acontece numa aula real, sugerindo a imitação de práticas bem sucedidas ou tidas como tais;
- estratégias baseadas na repetição de modalidades, nas quais o mesmo formador se comporta de acordo com o que entende sugerir ao formando;
- estratégias baseadas na transposição, nas quais se tem uma espécie de reflexão crítica sobre cada comportamento. Essencialmente: destaque para a transposição didática (CHEVALLARD, 1985, como texto histórico inicial; D'AMORE (1999b), para uma apresentação resumida) na ação do formador sobre o formando; a mesma coisa na passagem formativa, na ação do formando como futuro docente em sua futura sala de aula.

Exatamente esta análise sugere que o modelo "tripolar": aulas, laboratórios,estágio, escolhido em muitos países do mundo, poderia funcionar caso houvesse realmente uma integração entre os três "polos" e em especial uma intensa interação entre os dois "polos" tipicamente praxiológicos.

Nunca se pode perder a oportunidade de destacar o fato de que o professor (em função ou em formação) recorrerá a si mesmo e a suas convicções, sociais, didáticas e filosóficas. Refletindo sobre a apresentação de convicções de caráter epistemológico, Francesco Speranza (1997) havia feito uso, talvez por primeiro, da locução "filosofias implícitas" referindo-se às daqueles professores de matemática que, por nunca terem sido induzidos a refletir sobre a epistemologia da matemática, apressadamente concluíam que não precisariam dela, ou, ingenuamente, que não a usariam em absoluto.

Transversal a todos os âmbitos precedentes é o estudo de D'Ambrosio (2002) que lança a ideia de etnomatemática como conjunto de instrumentos capazes de interagir com um certo ambiente, com um objetivo determinado, internamente a um grupo ou a uma sociedade; portanto, muitas das problemáticas didáticas se enquadram como caso particular nas da etnomatemática; tal disciplina permite enxergar vários problemas transversalmente, conforme óticas mais amplas.

MATEMÁTICA E DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Considerado isso tudo, cremos que se possa restringir nosso campo de reflexões somente ao primeiro par de problemáticas, voltando a:

1. estabelecer de que tipo de cultura *matemática* realmente precisam os professores de matemática;
2. estabelecer de que tipo de cultura *didática* realmente precisam os professores de matemática;

   - incluindo, pelo menos em uma delas, embora fosse talvez mais produtivo em ambas, a cultura *histórica* e *epistemológica*, seja em perspectiva matemática, seja em perspectiva didática;

   - e inserindo na segunda a preparação profissional (o *o que fazer em sala de aula*) embora em contexto não teórico, mas praxiológico (na forma de, por exemplo, atividade de laboratório, estágio, reflexões sobre as duas práticas e reflexões sobre as relações entre as duas práticas).

1. Julgamos oportuno, com base na nossa (longa) experiência, eliminar qualquer debate sobre o primeiro ponto, asseverando que um professor de matemática tem extrema necessidade de firme competência matemática e que, portanto, nossa primeira tarefa é a de fornecê-la e exigi-la. Isso não representa, porém, "cultura" obtida por mero acúmulo, e sim por aprofundamento também, e sobretudo, pessoal. Pediríamos, então, ao professor de matemática saber a matemática não somente pelos cursos frequentados e pelos exames superados na Universidade, mas por reflexão pessoal, por reconstrução crítica, por análise. Para um professor, pediríamos não tanto poder dominar amplos campos da matemática ou de ser dono de muitas técnicas refinadas, mas dominar as bases em si, saber e *querer* aprender diariamente a matemática, outra matemática, sempre mais matemática, e sentir-se seguro e forte no seu domínio.

É por este motivo que gostaríamos de incluir na cultura matemática tanto sua história como sua visão epistemológica, não exatamente enquanto ulteriores conhecimentos agregados, mas enquanto ocasiões para refletir, para comparar, para dar-se conta, para analisar.

Cremos que seria conveniente que um professor conhecesse não só a matemática, e que a conhecesse bem, mas que soubesse organizar o pensamento matemático dos pontos de vista epistemológico e histórico.

Esta posição é extremamente compartilhada, como fica evidente pela literatura internacional, de tal forma que não insistimos mais do que isso, pois nos interessa passar logo ao ponto 2.

Mas teremos que voltar sobre o que foi apenas apontado.

2. Estabelecer de que cultura *didática* precisam os professores de matemática.

Até há pouco tempo, digamos 20 anos, pela ausência de uma disciplina de pesquisa e de ensino superior oficial com a denominação didática da matemática, a necessidade dessa cultura não era percebida. O professor recém-formado (realizada a preparação disciplinar em matemática) precisava tão-somente ter ou adquirir experiência, bom senso, disponibilidade humana, fazer uso de exemplos positivos propostos pela práxis e pela experiência de colegas antigos. Quando muito, em muitos países do mundo (FANDIÑO PANILLA, 2001), mandava-se frequentar, ao professor em formação ou no primeiro ano de função, cursos rapidíssimos de pedagogia, sociologia e/ou psicologia. Geralmente, esta mistura dava resultados negativos, conforme os mesmos professores, e a imputação mais difusa no mundo era relativa à indefinição e ao caráter abstrato das noções aprendidas nesses cursos rapidíssimos.

Agora, porém, a disciplina didática da matemática existe; é possível dispensá-la?

Por se tratar de uma disciplina nova, ainda entre os Colegas (não só universitários) ela é pouco conhecida e é confundida com a pedagogia, com a didática geral, com as ciências da educação, etc.

Tem que se dizer, em poucas palavras, que a didática da matemática, enquanto disciplina de pesquisa, estuda as condições da aprendizagem em situações *reais* de aula, em qualquer nível escolar ou Superior, quando a meta cognitiva em questão é específica da matemática (ARZARELLO; BARTOLINI BUSSI, 1998; D'AMORE, 1999b; ARTIGUE, 2000; SCHOENFELD, 2000).

Aquele *reais* que decidimos colocar em evidência significa que:

- a didática da matemática NÃO é tout court a matemática, embora específica para a matemática;
- a didática da matemática NÃO é a pedagogia, nem a didática geral, nem a psicologia, embora desfrute de alguns resultados concretos e teóricos dessas disciplinas;
- a didática da matemática NÃO é a divulgação da matemática; e essa deletéria confusão é entre as mais difundidas (a respeito dessas distinções veja-se EUGENI,1999);
- a didática da matemática teoriza sobre fatos reais que caracterizam a ação em sala de aula, dos dois pontos de vista, o ensinar e o aprender; portanto não é

por nada abstrata ou genérica, mas absolutamente concreta e circunstanciada; trata-se portanto de uma ciência empírica;

- a prática em didática da matemática pressupõe em definitivo uma (forte) competência em matemática, exatamente porque quem age deve fazê-lo de forma construtiva, analítica e crítica; isso traz em consequência que o didata da matemática (quem faz pesquisa nessa disciplina) é necessariamente um matemático.

Cremos que se deva chegar, mais cedo ou mais tarde, a poder dar como certo de que os cursos superiores preparem em matemática (fato que é considerado duvidoso por muitos, demasiadamente muitos Colegas docentes); a esta meta, poder-se-ia chegar realizando *verdadeiramente* cursos de licenciatura para futuros professores, cursos de fato específicos; com efeito, não basta a denominação “endereço didático” para garantir a preparação específica necessária (estamos falando somente da preparação específica em matemática). As coisas são análogas em vários países do mundo, enquanto em outros existem cursos de licenciatura *especificamente* pensados para futuros professores de matemática; é possível formar-se, portanto, em “matemática para o ensino” (e depois, geralmente, há cursos de especialização ou mestrado para a didática da matemática). Nesses cursos específicos de licenciatura, normalmente há uma maior preocupação com a preparação em matemática, uma vez que as disciplinas de tipo didática da matemática são colocadas no mestrado. Contudo, parecem mais bem organizados aqueles países nos quais ao menos os primeiros elementos de didática da matemática já são oferecidos ao longo do curso de licenciatura também em confirmação da escolha.

Nós, porém, não queremos aqui entrar em conversas relativas à engenharia da organização dos cursos de formação, assunto sobre o qual nos manifestamos repetidamente nos artigos sob o nosso nome citados em bibliografia. Queremos reforçar os aspectos mais culturais e significativos.

A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Cremos que, atualmente, uma das tarefas principais da didática da matemática no âmbito que aqui estamos discutindo, seja a de preparar profissionalmente o futuro professor, fornecer-lhe as chaves de leitura para interpretar aquilo que acontece na sala de aula quando os “polos” da tríade “professor–aluno–conhecimento” interagem entre si em formas tão complexas que nenhuma competência puramente matemática (nem, é evidente, puramente pedagógica), e ainda menos a experiência e o bom senso, podem explicar.

Tais chaves de leitura são hoje claríssimas e bem conhecidas por quem se ocupa de didática da matemática, e possuem nomes compartilhados que, no contexto dos estudos específicos, se identificam, só para citar alguns exemplos: com contrato didático, teoria das situações, obstáculos à aprendizagem, imagens e modelos, conceitos figurativos, engenharia didática, transposição didática (para especificar os mesmos remetemos a D'AMORE, 1999b).

Quem não possui familiaridade com tais termos ou quem crê que se trate de palavras de sentido comum e não específicas, ou quem crê que não precisa fazer o esforço de estudá-las, ou quem crê que "é tudo bobagem" e que "é mais do que suficiente uma sólida preparação matemática", a nosso ver não pode atribuir-se o direito de se declarar perito de uma disciplina cujo vocabulário é difundido e compartilhado internacionalmente e que já alcançou resultados concretos e tangíveis de grande eficácia. O uso dessas frases banais e ingênuas demonstra tão-somente uma profunda e arrogante incompetência.

Em outras palavras, para a preparação dos futuros docentes não é suficiente predispor cursos pós-licenciatura que possuam a *denominação* "didática da matemática", e sim cursos cujos *conteúdos* sejam específicos e realmente significativos para a preparação profissional.

Dois aspectos julgamos frequentemente esquecidos, apesar de sua grande importância: a engenharia didática e a observação.

Em Douady (1993) encontramos: "O termo engenharia didática indica um conjunto de sequências de classe concebidas, organizadas e articuladas. ao longo do tempo, de forma coerente por parte do professor, com a finalidade de realizar um projeto de aprendizagem para uma determinada população de alunos" (veja-se também D'AMORE, 1999b, com ampla bibliografia). Fato que comporta distintas fases metodológicas em engenharia didática (ARTIGUE, 1990): uma análise prévia; uma concepção e análise a priori que coloque em relação as situações didáticas com a mesma engenharia; a experimentação das situações didáticas em sala de aula; a análise a posteriori que inclui obviamente a avaliação. Somente para dar a ideia da complexidade e da profundidade daquilo com o qual nos defrontamos, basta dizer que a simples análise prévia consta de muitos pontos: fixar o objeto de aprendizagem que se torna objeto de engenharia; fazer a análise epistemológica do mesmo a fim de conhecê-lo; fazer a análise das modalidades habituais de ensino daquele objeto, com discussão dos resultados de aprendizagem naquelas modalidades; fazer a análise das ideias dos alunos, as dificuldades e os obstáculos ligados a sua evolução; fazer a análise dos limites e condicionamentos do âmbito no qual vai se realizar de forma concreta a ação didática, fazendo referência à dimensão epistemológica daquele saber, à dimensão cognitiva (típica dos destinatários da ação), à dimensão didática (relativa ao funcionamento do sistema); à determinação dos objetivos da ação.

A engenharia é necessária, porém complexa; ela, ainda, não é absolutamente resultado banal da experiência; enquanto tal, ela deve fazer parte do currículo do futuro professor de "matemática" como ensinamento específico, provavelmente com maior oportunidade, no âmbito que fica entre atividade de laboratório e de estágio, mas com óbvias e explícitas referências à didática da matemática.

Muito ligada à pratica da sala de aula, e portanto à engenharia, é a observação da sala de aula. Muitos pretensos didatas subestimam esse aspecto, cuja complexidade, ao contrário, já foi adequadamente evidenciada há décadas por Droz (1980). Observar a sala de aula e o comportamento dos alunos é considerado essencial, por vários Autores para uma significativa ação didática; portanto se torna fundamental formar os futuros professores nessa prática (DOUADY; ROBERT, 1992). Insiste-se sempre na análise dos protocolos, mas esta atividade faz parte, se integra e precisa da observação em sala de aula [numa de suas classificações, Brun, Conne (1990) misturam e integram as duas ações].

Também esse aspecto, em nossa opinião, deve ser considerado entre as competências que se quer que venham a ser construídas nos futuros docentes: deve, portanto, tornar-se parte explícita das atividades de formação inicial dos professores de matemática; também por isso cremos que a localização mais conveniente seja internamente ao binário laboratório - estágio, com evidentes e fortes ligações com a didática da matemática.

A COMPETÊNCIA EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA MODIFICA A ATITUDE DOS PROFESSORES

Nem todos os resultados da atividade de pesquisa, em qualquer campo, têm direta e concreta repercussão na vida cotidiana: isto às vezes torna distante, para o cidadão comum, a atividade dos pesquisadores.

Por exemplo, no campo da medicina, é oficialmente reconhecido que só uma mínima parte da pesquisa tem repercussões consideráveis concretamente no imediato.

É só pensar, ainda como exemplo, à pilha, hoje tão difundida; Alessandro Volta (1745-1927) concebeu-a entre o ano de 1796 e o 1800, mas somente após 1865 encontrou-se o modo de tornar aplicável, concreta, conveniente na prática cotidiana essa ideia genial.

O mesmo acontece, evidentemente, na pesquisa em didática da matemática. Nela podem ser identificadas três tendências, três veios (GODINO; BATANERO, 1998; BARTOLINI BUSSI, 1994):

- ação prática reflexiva sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática;
- tecnologia didática: o objetivo é pôr em ordem materiais para uma instrução matemática mais eficaz, aproveitando os conhecimentos adquiridos;
- pesquisa científica: seu objetivo é entender o funcionamento do complexo sistêmico: professor - aluno - saber, o "triângulo da didática" (D'AMORE; FANDIÑHO PINILLA, 2002).

Trata-se de uma análise de cunho epistemológico a nível global (podendo-se dizer: de ecologia dos saberes institucionais (GODINO, BATANERO, FONT, 2008)). Segundo Godino e Batanero, embora esses três campos se interessem por um mesmo objeto, eles são intrinsecamente distintos:

- no primeiro, parece destacada a problemática “prática”, “cotidiana”, “profissional” do professor diante de alunos aos quais deve fazer aprender alguma coisa de forma eficaz (há quem a chame de *microdidática*, mas não em sentido restritivo);
- no segundo, parece destacar-se o campo de ação de quem elabora currículos e de quem escreve manuais ou materiais didáticos vários;
- no terceiro parece focalizada a atenção de quem elabora teorias didáticas, sobretudo internamente às instituições universitárias, de real pesquisa *para o Saber.*

Seguindo as sugestões de Bartolini Bussi (1994), Godino e Batanero (1998) acabam por concluir que os primeiros dois componentes da educação matemática poderiam “ser entre si ligados como “busca para a ação”, enquanto o terceiro componente é equivalente à “busca pelo conhecimento”.

Na qualidade de pesquisadores, é necessário preliminarmente fazer uma escolha de campo para decidir *para que se faz a pesquisa*; se essa escolha prevê um *retorno* à sala de aula, uma vez obtidos os resultados, fica importante dar-se conta e aceitar que somente uma parte desses resultados da pesquisa *podem* realmente ser transformados em objetos de estudo por parte da engenharia didática ou, pelo menos, ter influência na prática docente.

A disciplina didática da matemática já tem pelo menos três decênios de história, muitos pesquisadores ativos no mundo inteiro, uma linguagem amplamente compartilhada, revistas próprias (seja de pesquisa, seja de divulgação dos resultados, seja “mistas”), seminários próprios, congressos, etc.; portanto sua divulgação real é cada vez mais maciça.

O que acontece, do ponto de vista profissional, ao docente que faz pesquisa ou ao docente que, mais simplesmente, passa a conhecer os resultados da pesquisa?

Graças à chamada difusão, a comunidade dos estudiosos de didática da matemática tem afinal a possibilidade de responder à pergunta anterior; aqui faremos isso da maneira menos complicada possível: o docente-pesquisador e o docente, uma vez conhecidos os resultados da pesquisa, *mudam*. Mudam radicalmente sua própria atitude que se torna mais atenta, mais crítica, menos disposta a dar por certo que haja atividades vencedoras somente porque sugeridas por alguém de alto nível acadêmico ou por haver uma prática já tradicional de tais atividades. Por exemplo, veja-se como a assim chamada “teoria dos conjuntos,” colocada em crise por muitos estudos sérios no âmbito da pesquisa em epistemologia da aprendizagem, tenha sido lentamente abandonada na prática didática até por seus mais convictos defensores; no mínimo, foi revista a cega confiança colocada nela nos anos 70 e 80: de disciplina - panaceia onívora, tornou-se linguagem prática a ser usada somente quando convém de verdade (PELLEREY, 1989).

Por exemplo, veja-se como o uso de instrumentos didáticos pré-confeccionados, cuja utilidade didática era incondicionalmente aceita por muitos professores, hoje é menos acrítico (D'AMORE, 2000a). Por exemplo, veja-se como se modificou a expectativa dos professores do ensino médio no mundo inteiro, após os estudos sobre a aprendizagem das demonstrações; enquanto até alguns decênios atrás era tranquilamente reconhecida a competência linguístico-lógica dos estudantes de 14 anos em tomar posse da ideia de demonstração, pelo menos em geometria, hoje considera-se que tal ideia precisa de uma prática didática explícita (certamente não mais aos 14 anos, mas bem além) (DUVAL, 1991, 1992; HOYLES, 1997).

Mudam, dizíamos, as atitudes: fatalmente, o professor que entra em contato com certos resultados de pesquisa não pode, em seguida, ignorá-los; vê, reconhece no comportamento de seus próprios estudantes em aula e no seu próprio agir profissional, a confirmação daqueles resultados e, por consequência, a mesma interpretação das condutas sofre uma modificação.

Examinaremos em detalhes essas "modificações" de atitude.

Essa modificação diz respeito ao currículo.

O professor torna-se mais atento para a congruidade de suas próprias escolhas didáticas; consciente de que existem, por exemplo, obstáculos ontogenéticos, obstáculos didáticos e obstáculos epistemológicos, ou que existe, por exemplo, o contrato didático; não se contenta mais em aceitar a aparente congruidade, no sentido de consecutividade, dos argumentos, que antes o satisfazia e o tranquilizava, mas começa a colocar-se problemas de análise do currículo em base aos resultados cognitivos de seus estudantes, em base aos resultados de sua própria ação didática, aceitando, portanto, ao mesmo tempo, uma revisão crítica e metodológica (FANDIÑO PINILLA, 2002).

Essa modificação diz respeito à definição dos campos do docente e do aluno.

O professor que entra em contato com os resultados da pesquisa põe em discussão, de maneira eficaz e significativa:

- os próprios deveres, as próprias expectativas;
- os deveres do estudante, suas expectativas, suas imagens da disciplina e de seu ensino.

De qualquer forma, torna-se em geral mais atento àquilo que acontece na frente de ação daquele que poderíamos definir o ator engajado na ação de construir conhecimento, seu próprio aluno (antes muito frequentemente ignorado como ator).

Essa modificação diz respeito às novas exigências que o professor cobre de sua própria preparação profissional.

Temos a prova dos fatos que:

- o professor em função requer da Universidade cada vez menos atividades assim chamadas de atualização, textos, seminários congressos... sobre os conteúdos matemáticos e, ao contrário, dirige-se aos especialistas da didática, consciente do fato de que quanto mais resultados de pesquisa didática conhecer, maior será primeiramente a capacidade crítica de análise da situação em aula e, em segundo lugar, seu próprio profissionalismo;

- o professor em formação inicial, exatamente por estar nessa formação inicial, não sabe que a escolha vencedora da sociedade contemporânea de todos os países do mundo é centralizar a formação dos docentes de matemática sobre a didática da matemática, evidentemente após uma preliminar e sólida preparação disciplinar que permanece fundamental.

Essa modificação diz respeito às expectativas que a prática docente tem sobre a sociedade e vice-versa.

Parece inútil que a sociedade expresse uma própria expectativa geral em relação à escola, se esta expectativa não for de acordo com os resultados da pesquisa didática. O profissionalismo novo e mais atento do professor informado o leva a redefinir também essa relação e, principalmente, a redesenhar seu papel como executor eficaz dos planos educacionais que a sociedade lhe confiou (BROUSSEAU, 2008a, 2008b).

Essa modificação diz respeito à avaliação (e esse é o ponto sobre o qual queremos aqui refletir mais):

- a avaliação do trabalho realizado pelo estudante: o professor informado dos resultados da pesquisa olha com olhar diferente, mais analítico, crítico, observador, para o trabalho de construção do conhecimento de cada um de seus alunos; até mesmo a avaliação mais banal, entendida como medição de conhecimento, como "nota" a ser dada ao estudante na base de resultado e aplicação, é atingida profundamente;
- a avaliação do próprio trabalho feito em aula: de acordo com os resultados de aprendizagem obtidos pelos próprios alunos, o professor informado dos resultados da pesquisa em didática tem condições de analisar criticamente suas próprias ações dentro da aula, redesenhando suas estratégias metodológicas e suas próprias escolhas;
- a avaliação do currículo: o professor informado da pesquisa em didática tem condições de voltar a rever o desenvolvimento curricular em cada um de seus aspectos, assumindo diretamente a tarefa de uma crítica a esse desenvolvimento e criando condições construtivas oportunas para uma séria e até profunda mudança.

Mas nem todos os professores de matemática estão informados dos resultados da pesquisa em didática da matemática: alguns preferem não ver, não saber, não sentir... Para esse exíguo grupo de profissionais recalcitrantes, a Sociedade toma medidas diferentes:

- passa-se de países que os aceitam sem reservas, por não existirem leis adequadas;
- até países nos quais são previstas suspensões parciais ou definitivas para aqueles professores que não demonstram um profissionalismo adequado à natureza da tarefa.

O que fazer, que decisões tomar? É preciso primeiramente entender bem o problema, ao menos de um ponto de vista social.

O exemplo que surge mais espontâneo é, mais uma vez, o do médico. Hoje em dia se faz uma intervenção para remover uma hérnia do disco na região lombo sacral, através de cirurgia por nada invasiva, com efeitos por nada devastadores, permitindo ao paciente de levantar sobre suas próprias pernas poucas horas após a intervenção e de voltar para casa. Até 20 anos atrás, ou mesmo menos, a intervenção tinha efeitos terríveis, longas hospitalizações, gesso por dezenas de dias com consequentes atividades terapêuticas de reabilitação fisioterápica.

Exemplos análogos podem ser feitos no campo da oftalmologia: é só pensar o que é hoje e o que era 20 anos atrás a remoção da assim chamada catarata.

Ninguém pode proibir a um paciente de se entregar nas mãos de um cirurgião que prefere práticas ultrapassadas e desabituadas, devastadoras, a práticas modernas seguras e não devastadoras. Mas: quem entregaria o próprio filho para quem usa essas técnicas superadas, sabendo o que a cirurgia atual está oferecendo como alternativa?

Por analogia: por que confiar seus próprios filhos (do ponto de vista familiar) ou os futuros cidadãos (do ponto de vista social) a mãos não cultas, mas somente experientes, que certamente não provocarão danos, resolverão afinal o problema, mas de um modo complicado, perigoso e, a esta altura, desumano?

Voltamos, portanto, ao começo: se estes são os efeitos profissionais benéficos de mudança que uma adquirida competência em didática da matemática provoca nos professores de matemática já em função, por que não aproveitar para formar desde o começo os futuros professores? Seria no mínimo ridículo encaminhá-los ao mundo do trabalho, competentes em matemática, na esperança de que, mais cedo ou mais tarde, sejam formados, ou melhor, sejam informados em didática: vale a pena aproveitar a ocasião, a presença de peritos, a circunstância legal, e formá-los de uma vez.

O PROBLEMA DE "CURRÍCULO E AVALIAÇÃO"

Internamente ao curso de didática da matemática ou de laboratório de didática da matemática, devem encontrar espaço temáticas que parecem secundárias e que, ao contrário, constituem a mesma ossatura da competência. Se é verdade, como é verdade, que um professor escolhe ou segue um currículo e que passa a maior parte de seu tempo a observar a vida de aula para avaliar (FANDIÑO PINILLA, 2002), então ele deve ser colocado em condições de apreciar e conhecer as problemáticas teóricas e as consequências práticas de sua escolha e de sua ação.

Esta reflexão abre uma ferida profunda, típica de nosso país, bem menos dolorosa em outros países que há tempo tomaram providências perante os estragos gerados pela indiferença em relação a esses temas. Dificilmente os matemáticos antes e os especialistas em didática da matemática depois dedicaram tempo ao estudo e à teorização nesse campo; ela foi delegada a estudiosos mais genéricos, quase sempre em âmbito pedagógico antes e de didática geral depois. Portanto, atualmente, as competências nesse campo específico são muito reduzidas. Auspiciamos, assim, no interesse de uma qualidade significativa no âmbito da formação inicial dos professores, que mais de um colega decida de se dedicar a esse gênero de estudos teóricos, pensando naturalmente que o interesse preciso esteja na criação de um curso específico de didática da matemática, como já ocorre em outros países do mundo.

Tanto o estudo do currículo quanto aquele ligado à avaliação bem se prestam para outro exemplo a cargo da ação abstrata e cultural (no curso de didática da matemática) seja da ação concreta e crítica, seja de observação e análise (nos laboratórios e na reflexão sobre a atividade de estágio).

Nesse mesmo parágrafo, já que estamos tratando do currículo, encontra espaço um convite a todos os colegas para que procurem encontrar não tanto uma lista única de conteúdos para os cursos de didática da matemática para os diferentes níveis, mas tal que ao menos sobressaia um único espírito, o mais possível compartilhado.

O PAPEL DA EPISTEMOLOGIA NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Há duas motivações irrenunciáveis para a necessidade de uma preparação cultural forte em epistemologia da matemática para os futuros docentes de matemática. São eles:

fatores culturais (**a** e **b**);

fatores didáticos ou profissionais (**c** e **d**).

a. Fatores culturais

O desenvolvimento de nossa disciplina não é feito somente de progresso técnico e formal; aliás, bem pelo contrário: esses dois são o resultado de uma contínua revisão de sentido e significado que a matemática procura dentro de si mesma. O rigor, por exemplo, que é um dos aspectos que mais atinge o profano ou o estudante, não é um fato intrínseco ou um hábito do professor, e sim necessidade linguística e filosófica (D’AMORE; PLAZZI, 1990), um filtro (às vezes penoso) que o matemático fornece ao próprio instrumento linguístico para evitar equívocos (portanto pluralidade de sentidos) e para dar uma univocidade de significado na comunicação. É por isso que o rigor não é fato absoluto, mas relativo à época e ao lugar, em constante evolução.

O desenvolvimento da matemática, por outro lado, procede em várias direções, mas é inegável que, em primeira instância e com grande alcance, ele é direcionado para a criação de conceitos[1]; ora, não se pode produzir um conceito sem delineá-lo espistemologicamente; portanto, querendo ou não, quem reflete sobre o desenvolvimento da matemática deve necessariamente colocar-se o problema da natureza dos conceitos (aqueles mesmos que, em matemática, frequentemente são denominados *objetos*) (D'AMORE, 2001a, 2001b).

Fica manifesto que, deixando de lado o matemático profissional que poderia até produzir e que às vezes produz teoremas e/ou teorias internamente a um determinado domínio sem dele sair, e estudar seu sentido geral epistemológico, *qualquer outro* que se ocupe de matemática e de seu desenvolvimento *deve* necessariamente colocar-se o problema epistemológico como fato cultural.

O professor de matemática não é criador de teoremas e/ou teorias, mas um profissional, perito em matemática, para o qual a sociedade propõe de fazer com que os jovens cidadãos construam e aprendam a usar competências matemáticas.[2]

Primeiramente, ele deve conhecer a matemática; apesar de que a este respeito tenham surgido várias tomadas de posição, nós o reafirmamos como irrenunciável ponto de partida (D'AMORE, 1999a).

Mas o professor tem dois deveres principais, que consistem em:

- realizar a *transposição didática*; o professor não pode se limitar banalmente a repetir a matemática aprendida na Universidade (seu lugar de formação cultural, no que diz respeito à matemática); ele *deve* transformar a matemática (o saber matemático elaborado pela academia) em um saber adequado aos alunos entregues aos seus cuidados; isto é, ele deve transformar o Saber em um "saber a ser ensinado" (D'AMORE, 1999b); essa transformação não é um fato banal, aliás, bem ao contrário, é largamente criativa e faz parte, estritamente, do profissionalismo docente, condicionando-o (FANDIÑO PINILLA, 2002).
- *comunicar a matemática*; todos nós sabemos que, numa situação de aula, o caráter mediador do professor é muito forte e que o estudante quase nunca tem acesso direto ao Saber, restringindo seu próprio desempenho à relação pessoal com o professor e à aprendizagem da matemática que o professor escolheu (de forma mais ou menos consciente, mais ou menos vinculada) para ele; portanto, a passagem do docente ao discente da matemática ensinada acontece em situação comunicativa bastante forte, submetida às complexas tramas da pragmática da comunicação humana (WATZLAWICK; BEAVIN; JACKSON, 1976).

[1] Evitamos cuidadosamente dizer *descoberta* e preferimos dizer *criação*; a escolha epistemológica a montante é evidente (D'AMORE, 2003); contudo, a mesma não é mais debatida asperamente como em passado.
[2] Usamos o termo *competência* em lugar de *conhecimento* não por acaso (D'AMORE et al., 2003).

Em base a esses dois pontos, vê-se claramente como o professor não possa ignorar o *sentido* que tem o desenvolvimento da matemática:

- não poderia de outra forma realizar aquele ato criativo que é a *transposição*; pode fazê-lo se e somente se tem condições de escolher critica e internamente a um corpus sobre o qual tem alguma legitimidade e capacidade de decisão; se ele julga que a matemática não oferece alternativas epistemológicas, que o corpus dos conhecimentos é o que é, imutável, eterno, indiscutível, aquilo que ele aprendeu (eventualmente antes do parêntese universitário), então não realizará a transposição e portanto falirá como professor;

- não poderia de outra forma *comunicar* a matemática; pode-se comunicar aquilo que é construído internamente, aquilo que faz parte da experiência pessoal, vivida, isto é personalizada; se a matemática é vista como algo de impessoal, de atemporal, uma simples sucessão de resultados interligados, obtidos por seres humanos que, enquanto produzem, somente pensam internamente à teoria na qual criam, então não se fala mais em comunicação mas em repetição de resultados; na pragmática da comunicação humana é implícito o sentido de propriedade crítica, de capacidade e disponibilidade para a escolha pessoal; por outro lato, um dos limites da matemática transmitida na escola, mais vezes denunciada por Brousseau (1986, por exemplo), é exatamente esse seu caráter de impersonalidade e atemporalidade, esse querer esconder a rica história dos esforços e das dificuldades que os seres humanos encontraram em construir a matemática como é hoje; o estudante que vê da matemática somente os resultados finais, puros e cristalinos, limpos de toda fadiga e discussão, ordenados, aparentemente deduzidos de uma axiomática que parece ser baixada do alto, é induzido a crer que a matemática *deva* ser assim por sua natureza; se esse estudante for um futuro professor de matemática, levará consigo, em sua história profissional, essa concepção errada da matemática.

Temos a nossa disposição muitos Autores a serem citados em defesa dessa visão que atribui importância à cultura em epistemologia da matemática por parte de futuros docentes.

Citamos Speranza (1997), que se comprometeu inteiramente para colocar esse ensinamento, de modo oficial e explícito, nos programas da escola de especialização (pós-licenciatura) para o ensino na escola secundária. Naquele mesmo texto, particularmente, Speranza (1997, p. 124-127), nos dá a possibilidade de considerar também Federigo Henriques alinhado nessa ótica com uma multiplicidade de citações que aqui não refiro. Ulterior apoio nos chaga de Giovanni Vailati, por exemplo, quando demonstra o quanto é importante refletir sobre atitudes, até as que se revelaram errôneas no passado, para a construção de conceitos matemáticos, bem como em atividade didáticas (VAILATI, 1896). Da mesma forma, de Gaston Bachelard, que aliás é considerado por muitos o defensor da revisão da forma de conceber o erro nas ciências, como algo de valorizável intrinsecamente

(BACHELARD, 1951), a tal ponto de chegar a condicionar, nesse campo, o pensamento de Brousseau (1983, 1989), o criador da moderna didática da matemática.

b. Consequências diretas dos fatores culturais em campo didático, metadidático e como fatores transversais

As escolhas traçadas no seção "**a**" possuem consequências diretas no campo didático; examinaremos só alguns exemplos, o primeiro em forma mais aprofundada em **b.1**, enquanto dos outros faremos somente referência em **b.2** Passaremos em seguida para **b.3** para tratar dos aspectos metadidáticos e em **b.4** para os "transversais".

b.1 O problema dos "elementos primitivos"

Conforme já examinamos longamente em outra ocasião (D'AMORE, 2000a), no século XVIII difundiu-se a paixão para a pergunta: o que quer dizer "simples a ser entendido"? O "simples" é um fato absoluto ou relativo? O "simples" é tal indiferentemente, tanto para o cientista como para o estudante principiante? Ou há diferenças? Em caso positivo, quais?

Essas perguntas encontram tentativas de respostas até mesmo na *Encyclopédie* de Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert [1717-1783] e Denis Diderot [1713-17884], e principalmente nos verbetes *Análise, Síntese, Método, Elementos de Ciências*. [Já se trata, a nosso juízo, de um estudo específico de didática que se distingue dos interesses gerais da pedagogia].

Poderia ser interessante, só para ter uma visão da coisa, verificar como d'Alambert, autor do verbete *Elementos de ciências*, procura extrair ideias didáticas da hipótese cartesiana de síntese, do simples ao complexo, e como, porém, seja obrigado ele mesmo a reconhecer que a coisa vá se complicando imediatamente.

Temos consciência de que estamos exagerando um pouco, mas é como se se começasse a aceitar algo de muito atual, de que há uma profunda diferença entre:

- a disciplina em si pelo que é conhecida e praticada pelos especialistas, pelos cientistas;
- a didática em geral em si, pelo modo como consta de asserções gerais críveis e garantidas por reflexões significativas realizadas por peritos no setor;
- a didática disciplinar em si, que tem parâmetros completamente diferentes, bem como paradigmas e finalidades.

O verdadeiro ponto de discussão é evidenciado quando d'Alambert procura definir o que significa que um conceito *precede* outro: de onde partir, de qual dos dois começar, quais são os *conceitos primitivos*?

Por exemplo, em matemática o cientista costuma começar a partir de ideias como espaço, plano, reta, ponto, número, e algumas “ligações” entre os mesmos; temos realmente certeza de que na didática da matemática isto seja conveniente? Os elementos primitivos do cientista são ou devem ser necessariamente os elementos primitivos do aluno?

Mais do que aceitar os elementos primitivos do cientista, talvez não valeria a pena refazer o caminho da geração das ideias que levaram a escolher aqueles objetos como objetos primitivos?

Não é o caso agora de aprofundar, mas é notável o fato de como exatamente esse debate de cunho didático conduza d’Alambert de uma posição totalmente cartesiana a uma lokiana e em seguida como tente conciliar as duas: as ideias simples podem reduzir-se a duas espécies: uma faz parte das ideias abstratas (...) a segunda espécie de ideias simples é contida nas ideias primitivas que nós adquirimos através de nossas sensações.

Porém: os elementos que os estudantes que se aproximam pela primeira vez ao estudo das ciências têm condições de compreender, são ou não os elementos da ciência? Ou: são pelo menos da mesma natureza?

Ao responder afirmativamente, então o método didático é uma reestruturação, um arranjo, uma apresentação progressiva dos elementos das ciências, do saber dos cientistas (KINTZLER, 1989).

Ao responder negativamente, como se passa das competências infantis, dos elementos cognitivos pertencentes a um estudante principiante, para o saber cientificamente entendido?

Em qualquer caso, que relação há entre os elementos primitivos que podem ser adquiridos pelo estudante e os elementos primitivos das ciências academicamente entendidas (Saber ou *Savoir savant)??*

No nosso parecer, partindo desse debate, começa-se finalmente a esboçar uma tríade de conteúdos:

- os conteúdos da disciplina *d*, fixados por ela mesma, por sua história;
- os conteúdos da didática daquela disciplina: D_d; ela tem como objeto de estudo a sistematização (na ótica: ensinamento –> aprendizagem eficaz) dos elementos da disciplina *d*, mas os conteúdos específicos de D_d não são mais simplesmente conteúdos da disciplina *d*, são novos em relação a *d*;
- os conteúdos de outra teoria, mais geral, que se poderia identificar naquela que coloca o problema de como realizar a passagem, além do caso específico, dos conteúdos de *d* para os conteúdos de D_d, não importando qual seja a disciplina *d*; poder-se-ia então começar a pensar numa espécie de didática geral, entendida nesse sentido.

É graças a uma relação entre reflexões epistemológicas e didáticas sobre a matemática que se chega ao debate sobre os *elementos primitivos*, para entender como não vai haver coincidência entre elementos primitivos para um estudante principiante e termos primitivos em matemática. Sem essa possibilidade de reflexão crítica, o professor seria levado a pensar que houvesse coincidência.

b.2 As "frações", os racionais, a passagem para os reais, a densidade, a continuidade

Sem uma firme preparação em epistemologia da matemática, todos os temas citados no título desse parágrafo poderiam ser fonte de equívoco: o professor transmite um saber aos alunos, após uma transposição didática que ele julga adequada. Mas, em caso de insucesso, ao não construir conhecimento (nem, é óbvio, muito menos competência) por parte dos estudantes, não tem outras alternativas a não ser de pensar que os estudantes não sejam idôneos para esse gênero de questões, não estejam à altura. Ou, pior, pensa de não ser ele adequado à profissão docente.

São as competências epistemológicas que revelam, ao contrário, as incríveis armadilhas que se escondem atrás desses temas. Em Fandiño Pinilla (2002), por exemplo, estuda-se exatamente o caso exemplar do debate didático/epistemológico entre "frações" (objeto escolar) e "racionais" (objeto do saber).

As incríveis convicções que até estudantes maduros conservam (final do ensino médio, também após cursos de analise) em relação a continuidade e densidade, propostos em aula como puros objetos matemáticos a serem aprendidos, sem qualquer cuidado epistemológico acautelatório, são colocadas em evidência por inúmeros autores em pesquisas didáticas de campo.

b.3 Fatores "meta", determinantes para a didática

Além do problema esboçado em **b.1**. sobre o que sejam os termos primitivos, há outro fatores que denomino matemáticos; por exemplo: o que são as definições, o que são as demonstrações.

Sobre a interpretação desses dois termos, muito haveria a dizer; sem uma profunda competência epistemológica, corre-se o risco de equivocar grosseiramente o *sentido* dessas duas componentes fundamentais da matemática. Quantas vezes ouvimos estudantes, até maduros, confundir entre si esses dois termos, confirmando a ausência de *sentido*. Infelizmente, em muitas ocasiões, ouvimos professores corrigindo o enunciado de uma definição, pronunciado por um estudante, com frases do tipo: "Não se diz assim, tens que dizer assim"; e dizer que, exatamente a respeito das definições, ouvimos pela primeira vez Francesco Speranza falar em "liberdade da matemática" (D'AMORE, 1986). E o que dizer das demonstrações declamadas de cor? Quantos entre nós, docentes universitários, ouviram um estudante pronunciar a mortífera frase: "Esta demonstração eu não lembro"?

Isso também é sinal de um equívoco de base sobre o *sentido* da demonstração (e, portanto, mais em geral, da matemática e do conhecimento matemático).

Como se criam essas deletérias convicções junto aos estudantes? Certamente não por geração espontânea: elas são fruto ou de ensinamentos diretos falaciosos ou de interpretações induzidas por comportamentos repetidos ou talvez provocados pelo contrato didático.

Somente uma profunda preparação dos docentes em epistemologia da matemática (e em didática da matemática) pode, por um lado, fortalecer as convicções positivas dos professores sobre esses temas e, por outro, torná-los didaticamente vigilantes.

Tanto nas definições como nas demonstrações, é preciso que haja um amplo "grau de liberdade", favorecido pelo docente, conquistado pelo estudante; é isso que a epistemologia nos ensina.

b.4 Fatores "transversais"

Entre as numerosas outras conquistas culturais notáveis que são permitidas e favorecidas pela cultura epistemológica, colocaríamos em destaque as três seguintes reflexões:

- como é constituída a linguagem da matemática;
- como se aprende matemática e os profundos vínculos que existem entre semiótica e noética.

Vamos nos limitar a breves considerações.

Há muitos equívocos sobre a linguagem que usamos em matemática; e muitas convicções que geram falsos conceitos. Trabalhamos longamente nesse tema (D'AMORE, 1993, 1996, 2000b; por exemplo). Se a convicção (fraca) do professor é que a linguagem que se usa em matemática seja univocamente e eternamente determinada a priori pela comunidade científica, somente poderá exigir do aluno um uso cego da mesma, sem caminhos pessoais; isso leva frequentemente a uma espécie de tentativa de imitação acrítica por parte do estudante, uma espécie de rascunho da linguagem que se constitui para a turma uma miragem inalcançável; em D'Amore, (1993) chamamos de "matematiquês" esta língua de aula, apresentando várias provas de sua existência e de seus aspectos negativos.

"Como" se aprende a matemática não é somente um problema psicológico, pedagógico ou didático, como ingenuamente poderia parecer; por ser o "como" estritamente ligado ao "o que", a aprendizagem matemática é também fato concernente à epistemologia; por exemplo, há quem creia que a aprendizagem da nossa disciplina possa reduzir-se a mero cálculo (em vários níveis), como se esse pudesse ser o *sentido* da matemática; tal característica profundamente instrumental intrínseca é muito mais difundida do que se possa crer: como se pode pensar que um jovem chegue a *construir para si* conhecimentos matemáticos? Numa visão epistemológica *realista*, essa postura poderia até encontrar lugar, uma vez que os conceitos matemáticos são ponto de chegada ideal; enquanto que numa visão *pragmatista* o conceito é aquela construção pessoal progressivamente alcançada (D'AMORE; FANDIÑO PINILLA, 2001; D'AMORE, 2003a), na passagem de uma relação pessoal com o saber, para uma relação institucional, dentro de uma visão antropológica (CHEVALLARD, 1992).

Que a aprendizagem matemática esteja estritamente ligada à noética, entendida como aprendizagem conceitual, não há nenhuma dúvida; está à vista de todos e confirmado por vários Autores (DUVAL, 1993; 1995). Precisamente sob o incentivo de Duval, nos últimos anos dedicamos muitas de nossas energias de pesquisa para esse tema; limitamo-nos a indicar D'Amore (2003a, 2003b). Que a matemática seja obrigada a fazer uso de representações internamente a registros semióticos é também fato já aceito, aliás considerado óbvio, após os estudos pioneirísticos de Duval. Que haja um paradoxo cognitivo no fato de que o estudante tenha que construir conhecimento conceitual através de representações semióticas (o "paradoxo de Duval") (em suas três características essenciais: representação, transformação de tratamento, transformação de conversão) (DUVAL,1993, 1995; D'AMORE, 2003a, 2003b) é também ideia amplamente compartilhada, tanto que em D'Amore (2003a) iniciou-se uma operação de costura entre as teorias didáticas de Brousseau e as observações de Duval, demonstrando como elementos de uma sejam explicáveis através daqueles da outra; em especial, foi demonstrado como às vezes não tenha sucesso uma ação a-didática por causa da falência da devolução, exatamente pela incapacidade do estudante de chegar à noética graças à ação da semiótica. Disso tudo se deduz, com a máxima evidência, que um professor não pode fingir de ignorar a questão, confundindo, como frequentemente acontece, noética com semiótica: ele, adulto, culto, perito, *professor*, justamente, crê de estar operando didaticamente sobre os conceitos, enquanto o estudante, jovem, não culto, está operando sobre representações semióticas (no máximo, sobre sistemas de representações semióticas). Ignorar este *fato* comporta um hiato entre as duas ações (a do ensinar e a do aprender) que não pode deixar de produzir falência.

Existem, a nosso ver, muitos outros fatores que são do tipo "transversal" e que têm em comum a necessidade do estudo da epistemologia da matemática; só quisemos aqui apresentar alguns a título de exemplo.

OS FATORES DIDÁTICOS (OU PROFISSIONAIS)

Pomos em evidência a razão pela qual seja necessária a competência em epistemologia da matemática para preparar futuros docentes de matemática, fazendo alusão seja a motivos culturais, seja a motivos didáticos (ou profissionais). Aqui enfrentaremos com mais detalhes exatamente esta última explicação.

Obstáculos epistemológicos

Todos os pesquisadores em didática da matemática conhecem a fundamental "teoria dos obstáculos" de Guy Brousseau (1983, 1986, 1989; veja-se também D'AMORE, 1999a, para uma exposição internamente a uma teoria complexa que envolve toda a didática da matemática). Embora haja a possibilidade de múltiplas distinções, permanece fundamental, para a gestão da vida de aula e para a análise dos erros (com tudo aquilo que envolve no campo da avaliação), a distinção de três tipologias de obstáculos: ontogenéticos, didáticos e epistemológicos (D'AMORE et al., 2008).

Se tomarmos o "triângulo da didática" (CHEVALLARD, 1985) como modelo da situação de aula (sobretudo para evidenciar sua complexidade sistêmica) (D'AMORE; FANDIÑO PINILLA, 2002), então se pode arriscar, como primeira aproximação, que os obstáculos:

- ontogenéticos são registráveis ao vértice "aluno";
- didáticos são registráveis ao vértice "professor";
- epistemológicos são registráveis ao vértice "Saber".

Esse modo de ver as coisas dá homogeneidade à didática como teoria que clarifica vínculos de outra forma equívocos. Em tal caso, porém, fica evidente que este instrumento potencialmente excepcional produz resultados positivos nas mãos do professor se e somente se tem consciência disso (alcançada graças aos estudos de didática); porém no que diz respeito ao terceiro ponto, ele precisa de um conhecimento a mais, o da epistemologia, exatamente, para poder ao menos reconhecer, entre as falências inevitáveis de seus alunos, as que podem ser atribuídas exatamente a obstáculos epistemológicos. Nesse caso, a didática por si não tem sucesso e solicita ajuda às competências epistemológicas.

Mudanças de convicções

Sabemos hoje muito bem que as competências amadurecidas pelos professores de matemática em formação produzem neles mudanças de convicções e até mesmo de concepções[3]. Por ser vastíssima a bibliografia sobre este tema, remetemos só a D'Amore e Fandiño Pinilla (2004), onde a bibliografia é rigorosamente selecionada. Nesse trabalho, fala-se de uma pesquisa orientada a colocar em evidência exatamente as mudanças de convicções e de concepções sobre matemática, didática da matemática e papel do docente de matemática, por parte de professores de ensino médio em formação inicial, após 4

[3] A distinção entre estes dois termos, à primeira vista sinônimos, é hoje bastante compartilhada em ambiente de pesquisa; costuma-se estabelecer uma diferença mais ou menos esclarecedora, como segue (D'AMORE; FANDIÑO PINILLA, 2004): ***** *convicção* (*belief*) (ou crença): opinião, junto com juízos/expectativas, o que se pensa a respeito de alguma coisa; * o conjunto de convicções de alguém (A) a respeito de algo (T) dá a *concepção* (K) de A em relação a T; se A pertence a um grupo social (S) e compartilha com os outros participantes de S aquele conjunto de convicções relativas a T, então K é a concepção de S relativamente a T. Com frequência, em vez de "concepção de A relativamente a T", fala-se de "imagem que A tem de T".

semestres de SSIS em Bolonha. O fato tem interesse particular, aqui, porque, embora haja em Bolonha 2 cursos específicos de epistemologia/história da matemática, os 2 cursos de didática da matemática caracterizam-se pelo intenso conteúdo problemático e epistemológico, seguem a assim chamada “escola francesa” e colocam muitas questões relativas à busca de fundamentos (os cursos contemplam o estudo de variado material, como D’Amore (1999a), que é discutido oralmente em trabalhos de grupo, durante 2 semestres). Remetemos ainda ao texto D’Amore e Fandiño Pinilla (2004) para os detalhes, mas fica interessante aquilo que os mesmos especializandos declaram a respeito de suas próprias mudanças notáveis: sempre há uma mistura de motivações didáticas com motivações epistemológicas, sinal de que os estudantes, exatamente porque futuros profissionais da escola, tendem a avaliar as próprias novas competências no seio da ação didática.

Entre as mudanças de convicção que mais deixam admirados os mesmos professores em formação emerge uma diferença entre uma precedente indisponibilidade para um uso impróprio da linguagem matemática e uma nova disponibilidade a ouvir o aluno engajado numa comunicação de assunto matemático. A respeito disso, exercem grande influência as provas de estágio realizadas concretamente nas aulas; os especializandos mudam radicalmente de convicção em relação ao *sentido* a ser dado ao conteúdo matemático expresso pelos estudantes em base principalmente a dois fatores que aprenderam a reconhecer nos cursos SSIS:

- embora a comunicação do estudante A para o estudante B seja (do ponto de vista adulto) incorreta, B entende o sentido da mesma;
- frequentemente o uso da linguagem é impróprio (em relação às expectativas adultas), não por lacunas matemáticas, mas por problemas de compreensão a montante.

Um exemplo desse segundo ponto é dado pelo comportamento de um estudante que, diante da solicitação de definir o paralelogramo, responde: “o paralelogramo é um quadrilátero com os lados dois a dois”. Tem-se um descolamento total das expectativas: por um lado, o professor percebe a ausência de um adjetivo que “feche” a frase que desse jeito não tem sentido; por outro lado, o estudante julga que o fato de ter dito 12 palavras exatas sobre 13 represente uma boa performance. É verdade que conta muito o contrato didático e a diferente concepção de matemática que os dois atores dessa história têm, mas é também verdade que há expectativas epistemológicas diferente no que diz respeito ao uso da linguagem em matemática. (Sobre os diversos componentes da aprendizagem da matemática e sobretudo dos aspectos comunicativos, veja-se FANDIÑO PINILLA, 2008).

Currículo e centralidade do aluno

As observações anteriores não podem deixar de ter notáveis repercussões sobre o sentido do currículo; de pesado fardo a ser respeitado, o currículo se torna instrumento a ser plasmado e a ser desfrutado na situação real da aula, motivo condutor da história de classe. De listagem mais ou menos comentada que é baixada em aula e condiciona tudo, o currículo se transforma em arma adequada para que todo estudante seja colocado, também em base a suas capacidades, nas melhores condições para construir competências matemáticas; de um currículo normativo, passa-se realmente a um currículo que reflete pontos de vista epistemológicos (FANDIÑO PINILLA, 2002, p. 36 e assim “o ponto de vista epistemológico na construção do currículo”).

Isto dá centralidade à figura do aluno, em vez da sequência curricular e dos meros conteúdos. E isso significa interpretar ao contrário aquela que em D’Amore (1999b) se chama “epistemologia da aprendizagem da matemática”: o problema real de quem se ocupa de didática da matemática, como pesquisa e como profissão, é de entender os processos de aprendizagem da matemática, não limitando-se a criar ensinamentos ideais.

Influências na avaliação

Particularmente dos últimos parágrafos, emerge aqui uma visão complexa da avaliação como processo e não como fim, portanto como instrumento didático. Em Fandiño Pinilla (2002, p.75) propõe-se uma avaliação com vários objetivos: avaliação do currículo, autoavaliação da eficácia do processo de ensino, avaliação para fornecer informações daquilo que é importante, avaliação para tomar decisões, avaliação para julgar um aluno... Quanto aos objetivos e às técnicas de cada um desses aspectos, a coisa é complicada exatamente porque frequentemente, para se tomar decisões, é preciso fazer anteriormente escolhas de caráter epistemológico (veja-se a evolução histórico-social da ideia de avaliação nos últimos 100 anos, nas p.94-96 do texto citado (FANDIÑO PINILHA, 2002) poucas linhas acima; e a lista das funções e das características da avaliação junto aos vários autores, de acordo com as escolhas epistemológicas, nas p.97-98). Uma inovação na avaliação comporta escolha de critérios e é por isso que se chama “avaliação criterial”. Para frear esses específicos impulsos inovadores (que, em outros países já se tornaram normas de lei na escola), certamente estão as convicções dos professores e muitas de suas concepções sobre escola, sentido da instrução, etc., em geral, e sobre matemática, sentido da aprendizagem matemática, etc., em modo mais específico.

Porém, vimos como as convicções epistemológicas, até quando faltam ou parecem faltar (SPERANZA, 1997, as chama de *implícitas*), influenciam todas as outras, fechando o cerco...

Entre as escolhas, nem sempre implícitas, emergem em certa porcentagem aquelas atitudes que, mais ou menos fielmente, refletem modos de interpretar a matemática e que se relacionam com escolas epistemológicas: formalismo, platonismo, logicismo, empirismo, intuicionismo à Poincaré, intuicionismo como construção de atos do pensamento... E hoje, mais em geral, relacionáveis com dois grandes grupos (SPERANZA, 1997; D’AMORE, 1987): realismo, pragmatismo que os resume (D’AMORE, 2003b).

Mas o uso das convicções amadurecidas com os estudos epistemológicos deve fazer par com a competência firme em didática da matemática, porque somente desse modo contribui para formar aquela *ferramenta*, aqueles instrumentos práticos e teóricos tão úteis na profissão docente, para entender a evolução das situações da aula. Para isso certamente serve a enorme contribuição de Guy Brousseau que, longe de ser somente pioneirístico e limitado aos primeiros passos da didática da matemática, fornece ainda hoje, no meu modo de ver, material sobre o qual refletir, em constante evolução e aprofundamento. Ideias como o contrato didático, a teoria dos obstáculos, a teoria das situações,... mas também as ferozes análises que levaram ao desaparecimento de anteriores modos de interpretar a didática, todas elas ainda devem ser analisadas e, apesar de tudo isso, permanecem ainda mistérios a serem esclarecidos.

EPISTEMOLOGIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA; A HISTÓRIA COMO CHAVE DE ABÓBADA PARA ENTENDER A EPISTEMOLOGIA; USO DA HISTÓRIA NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Epistemologia e história da matemática

“A filosofia sem a história é vazia, a história sem a filosofia é cega”, afirmava com razão Kant (por exemplo: SPERANZA, 1997, p.145). Circunstanciava Lakatos: “A filosofia da ciência sem a história é vazia, a história sem a filosofia da ciência é cega” (1971, p.102). Aceita a tomada de posição desses gigantes, qualquer comentário é supérfluo. Se várias vezes dissemos que a epistemologia estuda a evolução dos conceitos, é evidente que não é possível pensar em cindir os estudos da matemática dos de história da matemática.

A história para entender a epistemologia

Assim, parece óbvio pensar na história como a referência paradigmática por excelência para entender a evolução das ideias e as necessidades de adequação do pensamento. Por exemplo, se não se soubesse das origens aristotélicas da geometria euclidiana, nem das geometrias não euclidianas com seu alcance de revolução no conceito de verdade matemática, nem da necessidade de um novo rigor capaz de dar aos termos primitivos e aos axiomas um *sentido* moderno, não se poderia entender a razão pela qual David Hilbert tenha precisado escrever sobre os novos elementos de geometria 22 séculos após os de Euclides. Vejamos, portanto, a história da matemática como a confrontação objetiva para entender a epistemologia.

Uso da história na didática

Embora ambos os pontos precedentes sejam de excepcional relevância, capazes de dar razão para quem impõe cursos de epistemologia aos professores em formação, há um ponto que emerge com grande vigor nos últimos 30 anos, um ponto ao qual Francesco Speranza e Bruno D'Amore deram forma, curando as edições de 3 livros que colecionam experiências verdadeiras de professores em diferentes níveis de ensino, quando isso não era ainda difundido (D'AMORE; SPERANZA, 1989, 1992, 1995); trata-se do uso da história da matemática como instrumento didático sob várias formas, nos cursos de matemática.

Já que este ponto está estritamente entrelaçado com as questões epistemológicas, parece-nos correto falar dele aqui. Por outro lado, se a intenção é de usar a história da matemática em aula, é preciso conhecer a história da matemática; portanto faz sentido o problema de se colocar também a questão da preparação em história dos docentes em formação.

A história da matemática na formação dos futuros professores de matemática

Segundo Freudenthal, aprender a matemática significa "reinventá-la" (descreve-se um processo denominado "mathematising") (FREUDENTHAL, 1973): portanto, o papel da componente histórica no ensino merece um aprofundamento específico. O exame de um conceito matemático através de sua evolução histórica requer, porém, a tomada de posições epistemológicas trabalhosas: a mesma seleção dos dados históricos não é neutra (RADFORD, 1997) e ainda problemas notáveis estão ligados a sua interpretação, inevitavelmente conduzida à luz de nossos atuais paradigmas culturais, através dos quais colocam-se em contato culturas "diferentes mas não incomensuráveis" (RADFORD; BOERO; VASCO, 2000, p.165).

Já insistimos muito sobre o fato que o ensino seja influenciado pelas concepções dos docentes a propósito da natureza do conhecimento científico e de sua evolução. Parece, portanto, fundamental que um professor se confronte diretamente com a história da disciplina e que chegue a saber utilizar as referências históricas consciente e coerentemente com suas próprias concepções epistemológicas (THOMPSON, 1992; MORENO; WALDEGG, 1993; SPERANZA; GRUGNETTI, 1996).

Em geral, a história da matemática oferece à didática algumas importantes possibilidades (FURINGHETTI; SOMAGLIA, 1997):

primeiramente uma aproximação anedótica, que, embora às vezes possa ser considerada superficial, pode reforçar de maneira notável a motivação dos discentes (D'AMORE; SPERANZA, 1989, 1992, 1995; RADFORD, 1997; D'AMORE, 1999a);

- a possibilidade de uma reflexão metacognitiva;
- a possibilidade de um conhecimento orgânico de um período histórico e da compreensão das situações culturais que influenciaram o nascimento ou a difusão de uma ideia matemática.

Referindo-nos àquele vértice do triângulo da didática que nomeamos Saber (CHEVALLARD, 1985), chamaremos de "conhecimento institucionalizado" a última versão, do ponto de vista cronológico, do saber em questão, portanto sua mais recente forma aceita pela comunidade científica: disso resulta que a institucionalização à qual nos referimos chega a ser profundamente contextualizada do ponto de vista histórico; e essa contextualização está conectada aos diferentes ambientes socioculturais (BAGNI, 2004). Nesse ponto, porém, entra em jogo a componente histórica: de fato, é raríssimo (ou talvez impossível) que um conhecimento matemático possa nascer de uma ideia absolutamente nova, desprovida de relações com a experiência do passado: de muitas formas um conhecimento incorpora em si mesmo as próprias raízes históricas. Que relação interliga o conhecimento institucionalizado à própria história?

Tal problemática nos impele para uma indagação mais profunda da estrutura histórica de um conhecimento matemático que, como veremos, poderá influir notavelmente na didática. Seguindo D'Amore, (2001a), poderíamos, por exemplo, nos perguntar: o progressivo aumento do saber pode ser comparado a um processo de aproximação (acumulação quantitativa) ou de sobreposição (qualitativa)? Quer dizer: a reorganização de um objeto matemático se põe ao lado das velhas versões, ou as substitui? (D'AMORE, 2001b).

A adoção de modelos de (pura) aproximação ou de (pura) sobreposição traria problemas teóricos: tais modelos sofreriam de uma organização desprovida de contexto. A concepção da evolução do saber K que prevê a aproximação de um conhecimento K(m+1) ao K(m) não leva em consideração que o K(m) possuía sentido no seu contexto original C(m), enquanto K(m+1) sofre influência do novo contexto sociocultural C(m+1) que veio a se formar (BAGNI, 2005) (examina-se, a título de exemplo, o caso dos procedimentos infinitesimais). Por outro lado, a sobreposição de conceitos levaria a uma contínua reedificação ex novo, enquanto a (progressiva) variação do ambiente sociocultural faz pensar a progressivas novas inserções.

Em um momento histórico (por exemplo, no momento atual) e em um contexto sociocultural C(n) determinado, podemos pensar em processos nos quais as versões "históricas" do conhecimento em questão participam do saber em relação aos contextos socioculturais nos quais se desenvolveram; por este motivo, o processo deve ser entendido como uma contínua evolução cronológica, em contínuo devir.

Voltamos agora ao aspecto didático: descrito o saber específico do conhecimento K, é preciso proceder à transposição didática, isto é, transformá-lo em saber ensinado. Já vimos a importância que a epistemologia assume nesta transformação; agora nos perguntamos: que papel se atribui, nesta fase, à história de K? Em especial, como se diferenciam as modalidades de transposição do conhecimento K(n) (institucionalizado no momento em que se considera o processo de ensino-aprendizagem) daquelas da transposição das referências que constituem a "história de K"? O ponto crucial é constituído pela transposição da "história de K" (GADAMER, 1975).

Indicamos duas escolhas possíveis:

- a transposição de K(1), K(2), ..., K(n-1) com referência ao contexto C(n) (*atualização*);
- a transposição de K(1), ..., K(n-1) com referência aos respectivos contextos C(1), C(2), ..., C(n-1) (*contextualização histórica das referências*).

Cada uma das opções baseia-se, evidentemente, em engajamentos epistemológicos sérios e apresenta, do ponto de vista didático, aspectos delicados:

- uma evolução histórica *proposta didaticamente* do único ponto de vista moderno talvez não seria radicalmente inaceitável (enquanto uma interpretação platônica da história em sentido absoluto deixa hoje céticos e perplexos); esse tipo de concepção permite, por exemplo, apresentar aos alunos os principais obstáculos epistemológicos e esclarecer algumas posições históricas cuja fraqueza foi se revelando em seguida (SFARD, 1991);
- mas um encaminhamento que proponha, em sequência ao desenvolvimento cognitivo, um percurso modelado na evolução histórica (PIAGET; GARCIA, 1983) encontraria dificuldades teóricas e algumas dúvidas relativas a fundamentos.

A apresentação de elementos históricos com referência ao próprio contexto sociocultural (RADFORD, 2003) oferece a possibilidade de um aprofundamento orgânico e induz reflexões fundamentais sobre a gênese de um conceito (RADFORS; BOERO; VASCO, 2000). A escolha de uma história "interna", de um desenvolvimento isolado da matemática, aparece problemática (GRUGNETTI; ROGERS, 2000, p. 40) e dificilmente sustentável do ponto de vista epistemológico.

Isto só para traçar um panorama reduzido da complexidade da história para uso didático; pode-se também tentar uma aproximação anedótica, para motivar, mas não é este o verdadeiro desafio cognitivo vencedor.

Logo que se tenta algo de mais significativo, eis que surgem problemas e desafios de grande interesse que podem e devem ser enfrentados pelo docente de matemática com profunda consciência.

Em qualquer caso, história e epistemologia estão estritamente entrelaçadas entre si e seu sistema está entrelaçado com a didática da matemática. De tal forma que se poderia seguir o caminho aberto por Kant e apoiado por Lakatos, cunhando um novo dizer:

A didática da matemática sem relações com a epistemologia e com a história é como um instrumento ágil e poderoso que ninguém sabe usar por completo; a epistemologia e a história são meios culturais fortes, abstratos e profundos que a didática da matemática torna concretos e úteis para o progresso da humanidade, para a construção de competências, para a consciência do próprio saber.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Ingégnerie didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. v.9, n.3, p.281-307,1990.

ARTIGUE, M. L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario. *La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell'U.M.I.* S. VIII, III-A, p.81-103, 2000.

ARZARELLO, F.; BARTOLINI BUSSI, M. Italian trends in research in Mathematics Education: a national case study in the international perspective. In: KILPATRICK, J.; SIERPINSKA, A. (Ed.). *Education as research domain: a search far identity.* London: Kluwer Ac. Publ. v.2, 1998, p.243-262.

BACHELARD, G. *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. Paris: PUF, 1951.

BAGNI, G. T. Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. v.3, p.51-70, 2004.

BAGNI, G. T. Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. v.21, n.2, p.124-138, 2005.

BARTOLINI BUSSI, M. Theoretical and empirical approaches to classroom interation. In: BIEHLER, R. et al. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Kluwer, 1994, p.121-132.

BLANCO, L. Interacciòn didàctica en la enseñanza de las maternàticas con estudiantes de magisterio. *Revista Jnteruniversitaria de Formaciàn del Profesorado.* p.57-68, 1991.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v.4, n.2, p.165-198, 1983.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v.7, n.2, p.33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: BEDNARZ, N., GARNIER, C. (Ed.) *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. Montreal: Agence d'Arc, 1989, p.41-64.

BROUSSEAU, G. *Ingegneria didattica e epistemologia dell'insegnante*. Bologna: Pitagora, 2008a.

BROUSSEAU, G. L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici. *La matematica e la sua didattica*. v.23, n.2, p.165-183, 2008b.

BRUN, J.; CONNE, F. Analyses didactiques des protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche*. v.3, p.261-285, 1990.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. Un modelo de categorias e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática* v.7, n.3, p.79-92, 1995.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. v.12, n.1, p.73-112, 1992.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora, 2002.
D'AMORE, B. Il ruolo della definizione nella didattica della matematica. *Insegnare*. v.6, p.9-13, 1986.
D'AMORE, B. Motivações epistemológicas que estão à base das escolhas didáticas realizadas nas atividades educativas em Itália pela escola da infância no biênio superior. II CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE INVESTIGACIÓN EN LA DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LA MATEMÁTICA. Valencia, 1987. *Anais*... Valencia, p.323-324, 1987.
D'AMORE, B. Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*. v.3, p.289-301, 1993.
D'AMORE, B. Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, v.2, p.81-97, 1996.
D'AMORE, B. Venti anni, o poco più, di didattica matematica nella scuola dell'infanzia. Che cosa è cambiato? *Infanzia*. v.1, p.7-11, 1998.
D'AMORE, B. Il ruolo essenziale ed insostituibile delle didattiche disciplinari nella costruzione della conoscenza nell'educazione. *Pitagora Notizie*. v.4, n.2, 1999a.
D'AMORE, B. *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora, 1999b.
D'AMORE, B. La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matematica*. México D. F., México. v.12, n.1, p.239-250, 2000a.
D'AMORE, B. Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. v.1, p.28-47, 2000b.
D'AMORE, B. La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. v.4, p.35-40, 2000c.
D'AMORE, B. Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. v.1, p.4-30, 2001a.
D'AMORE, B. Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, v.1, p.17-46, 2001b.
D'AMORE, B. Basta. *La Vita Scolastica*. v.8, 1° gennaio 2002, p.14-18, 2002a.
D'AMORE, B. Il problema della formazione degli insegnanti di matematica. In: LUCCHINI, G.; MERCANTI, F.; TALLINI, L. (Ed.) *Per una nuova scuola: programmi, formazione e tecnologie innovative per l'insegnamento della matematica*, 2002b, p.71-76.
D'AMORE, B. La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. v.23, n.1, p.47-51, 2003a.
D'AMORE, B. *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora, 2003b.
D'AMORE, B. Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. v.4, p.4-30, 2004.
D'AMORE, B. Basi epistemologiche della Didattica della Matematica. In: D'AMORE, B. (editor). *Matematica: l'emergere della didattica nella formazione*. *Rassegna*. XIV, v.29, p.8-14, 2006.
D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. La "matematica del quotidiano". *La matematica e la sua didattica*. 3, p.256-263, 2001.

D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. Concepts et objects mathématiques. In: GAGATSIS A. (Ed.) *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press. p.111-130, 2001.
D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática* (México DF). v.1,n. 4, p.48-62, 2002.
D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. La formazione iniziale degli insegnanti di matematica in Italia. In: FANDIÑO PINILLA, M. I. (Ed) *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora, 2003. p.75-104.
D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. v.3, p.27-50, 2004.
D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I. *Le didattiche disciplinari*. Trento: Erickson, 2007.
D'AMORE, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I.; MARAZZANI, I.; SBARAGLI, S. *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson, 2008.
D'AMORE, B. et al. *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora, 2003.
D'AMORE, B.; PLAZZI, P. Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. v.3,p.18-24, 1990.
D'AMORE, B.; SPERANZA, F. (Ed.). *Lo sviluppo storico della matematica – Spunti didattici*. Volume primo. Roma: A. Armando, 1989.
D'AMORE, B.; SPERANZA, F. (Ed.). *Lo sviluppo storico della matematica – Spunti didattici*. Volume secondo. Roma: A. Armando, 1992.
D'AMORE, B.; SPERANZA, F. (Ed.). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli, 1995.
DOUADY, R. *L'ingégnerie didactique*. Cahier de DIDIREM, 19. Paris: Université Paris VII, 1993.
DOUADY, R.; ROBERT, A. Quelques réflexions sur l'observation en classe en formation professionelle initiale des futures enseignants. In : COPIRELEM. Pau-Nice. *Anais*... Pau-Nice, 1992.
DROZ, R. *Observations sur l'observation*. Avignon: Groupe Dupont, 1980.
DUVAL, R. Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*. n.22, p.233-261, 1991.
DUVAL, R. Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. n.31, p.37-61, 1992.
DUVAL, R. Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. n.5, p.37-65, 1993.
DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, 1995.
EUGENI, F. Divulgazione e didattica della Matematica. Texto de uma palestra realizada em 4 de maio de 1999 junto ao Politecnico de Milano, sede de Mantova, no âmbito do Congresso nacional: *«Ricerca, divulgazione e didattica in Matematica»*, aos cuidados de F. Mercanti. As Attas, non pubblicadas, são todavia disponíveis junto à sede do Congresso via e-mail, 1999.
FANDIÑO PINILLA, M. I. La formazione degli insegnanti di matematica. Algumas

referências a um quadro teórico. *La Matematica e la sua didattica*. n.4, p.352-373, 2001.
FANDIÑO PINILLA, M. I. *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora, 2002.
FANDIÑO PINILLA, M. I. (Ed.). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora, 2003.
FANDIÑO PINILLA, M. I. *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson, 2008.
FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task*. Dodrecht: Riedel, 1973.
FURINGHETTI, F. Credenze/convinzioni in classe su matematica e dintorni. In: D'AMORE, B. (Ed.). *Didattica della Matematica e rinnovamento curricolare*. Bologna: Pitagora. p.59-70, 2001.
FURINGHETTI, F.; RADFORD, L. Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In: ENGLISH L. (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum. p.631-654, 2002.
FURINGHETTI, F., SOMAGLIA, A. Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica*. XVIII, n.2, p.1, 1997.
GADAMER, H. G. *Truth and Method*. New York: Crossroad, 1975.
GODINO, J. D.; BATANERO, C. The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta analysis of three investigations. In: MALARA N. (Ed.) *Proceedings of Working Group 25 – ICME 8, Sevilla*. Modena: CNR. p.13-22, 1998.
GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. v.10, n.2, p.7-37, 2008.
GRUGNETTI, L.; ROGERS, L. Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In: FAUVEL, J., VAN MAANEN, J. (Ed.). *History in Mathematics Education*. Dodrecht: Kluwer. p.39-62, 2000.
HOUDEMENT, C. ; KUZNIAK, A. Autour des strategies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v.16.n.3, p.23-34, 1996.
HOYLES, C. The curricolar shaping of student's approaches to proof. *For the learning of mathematics*. v.17, n.1, p.7-15, 1997
LAKATOS, I. *History of science and its rational reconstructions*. Cambridge: Cambridge U.P, 1971.
LORIA, G. Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. Rapport général. L'enseignement mathématique. XXXII, p.5-20, 1933.
KINTZLER, C. Éléments. In: AA. VV. (Ed.) *Écrits de Condorcet*. Paris, Edilig, 1989.
MORENO, L.; WALDEGG, G. Costructivism and mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. v.24, n.5, p.653-661, 1993.

PELLEREY, M. *Oltre gli insiemi*. Napoli: Tecnodid, 1989.
PIAGET, J. ; GARCIA, R. *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion, 1983.
PORLÀN, R.; ALTRI, E. Conocimiento profesional deseable y profesores inovadores. *Investigación en la Escuela*. v.29, p.23-37, 1996.
PORTUGAIS, J. *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne: Peter Lang, 1995.
RADFORD, L. On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. v.17, n.1, p.26-33, 1997.
RADFORD, L. On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: ANDERSON, M. et al. (Ed.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas. p.49-79, 2003.
RADFORD, L.; BOERO, P.; VASCO, C. Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In: FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Ed.) *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. p.162-167, 2000.
SCHOENFELD, H. Obiettivi e metodi di ricerca in Didattica della Matematica. *La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell'U.M.I.* S. VIII, III-A, n.2, p.81-103, 2000.
SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. n.22, p.1-36, 1991.
SPERANZA, F. *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora, 1997.
SPERANZA, F.; GRUGNETTI, L. History and epistemology in didactics of mathematics. In: MALARA, N. A.; MENGHINI, M.; REGGIANI, M. (Ed.). *Italian research in mathematics education*, Roma: CNR. p.126-135, 1996.
THOMPSON, A.G. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. London: D.A.N.Y. McMillan, p.127-208, 1992.
VAILATI, G. Sull'importanza delle ricerche relative alla storia della scienza. In: VAILATI, G. *Scritti*. Firenze – Leipzig: Seeber-Barth, 1896.
WATZLAWICK, W.; BEAVIN, J. H.; JACKSON, D. D. *Pragmatic of the human communication*. New York: W.W. Norton & C., 1967.

Recebido em: jun. 09 **Aceito em:** set. 09