Um contexto de trabalho colaborativo possibilitando a emergência dos processos de argumentação e validação em geometria

Adair Mendes Nacarato
Regina Célia Grando
Jorge Luís Costa

RESUMO

O presente texto analisa os processos de argumentação e validação em geometria, mobilizados por um grupo de trabalho colaborativo constituído por professores acadêmicos e da escola básica, alunos da graduação e pós-graduação. Esse grupo, durante quatro anos, dedicou-se a estudos e pesquisas sobre geometria. Sua constituição foi decorrente da constatação de o quanto essa área de conhecimento ainda continua ausente da prática pedagógica e da formação docente. Um dos focos de discussão do grupo, presente neste artigo, refere-se a algumas concepções do que sejam provas na matemática escolar, principalmente com a utilização de ambientes computacionais. Defende-se que, para chegar a uma prova formal, os alunos necessitam vivenciar contextos de aprendizagem marcados por processos de argumentação e validação na escola básica. Essa discussão é complementada com a apresentação de uma experiência do grupo resolvendo um problema sobre sólidos geométricos truncados, decorrente de um ambiente marcado por verdades provisórias. Busca-se evidenciar o quanto o trabalho colaborativo possibilita a circulação, a negociação e a apropriação de significados geométricos e contribui para a produção de saberes docentes.

Palavras-chave: Argumentações e validações em geometria. Provas. Grupo colaborativo.

A collaborative work context facilitating argumentation and validation processes in geometry

ABSTRACT

This text brings an analysis of the argumentation and validation processes in geometry, worked out by a collaborative work group constituted of academic and elementary school teachers, graduation students and post-graduation students who spent four years on studies and research on geometry. The group was formed after verifying how pedagogical practice and teacher education have been lacking geometry knowledge. One of the group's discussion topics, contained in this article, refers to some conceptions of proofs in mathematics at school, especially in computing

Adair Mendes Nacarato é Doutora em Educação (Educação Matemática) e docente do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco-USF. Rua Alexandre Rodrigues Barbosa, 45 – Centro, Itatiba (SP) – CEP 13251-900. E-mail: adamn@terra.com.br

Regina Célia Grando é Doutora em Educação (Educação Matemática) e docente do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco-USF. Rua Alexandre Rodrigues Barbosa, 45 – Centro, Itatiba/SP – CEP 13251-900. E-mail: regrando@yahoo.com.br

Jorge Luís Costa é Mestre em Educação (Matemática, cultura e práticas pedagógicas) e docente da Universidade Federal de Ouro Preto. Rua Bernardo Guimarães, 1322 – Lourdes – Belo Horizonte/MG – CEP 30140-081. E-mail: jorge@jlcosta.pro.br

environments. It is argued that students need to experiment learning contexts characterized by argumentation and validation processes in elementary school before they come to face a formal proof. The text also presents a problem-solving experience with truncated geometric solids shared by the group, in an environment marked by temporary truth. This is an attempt to clearly show how effective collaborative work can be for circulation, negotiation and assumption of geometric meanings, contributing to the production of teaching knowledge.

Keywords: Argumentation and Validation in Geometry. Proofs. Collaborative Group.

INTRODUÇÃO

Nossa experiência como docentes e formadores em cursos de licenciatura em Matemática e Pedagogia tem revelado que o ensino de geometria no ensino fundamental ainda merece uma atenção maior. Apesar de todo o movimento de reforma curricular da década de 1980 apontar para a necessidade da inserção dessa disciplina na sala de aula, constata-se que, na prática, isso pouco ocorre e, quando acontece, percebe-se uma visão bastante reducionista do que seja a formação do pensamento geométrico.

Quais as causas que têm provocado essa ausência em sala de aula? Por que a resistência por parte de alguns professores em inserir a geometria no currículo, embora esta se faça presente nos livros didáticos?

Discutir essas questões requer pensar no próprio movimento de resgate do ensino da geometria, ocorrido nas duas últimas décadas do século XX e início do século XXI, visto que ela, em decorrência do Movimento da Matemática Moderna nas décadas anteriores, foi relegada a um plano secundário. Requer também pensar em alternativas de formação docente que sejam promissoras, no sentido de preencher as lacunas existentes na formação dos professores que atuam na educação básica ou dos futuros professores – a maioria deles oriunda de uma educação básica marcada pela ausência do ensino de geometria.

Essas reflexões mobilizaram-nos para a constituição de um grupo para estudos e pesquisas nesse campo, voltado à formação docente. Trazemos aqui parte de nossas reflexões e experiências. Assim, desenvolvemos o presente texto em dois momentos: primeiro destacamos algumas perspectivas emergentes para a geometria escolar; em seguida, analisamos uma experiência de formação docente no contexto de um grupo de estudos em geometria. Nosso objetivo é focar a importância de um trabalho compartilhado, para possibilitar ao professor em formação – inicial ou continuada – a vivência de contextos em que os processos de argumentação e validação estejam presentes.

TENDÊNCIAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS EMERGENTES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

No final dos anos de 1970, os pesquisadores em educação matemática começaram a mobilizar-se com vistas a pensar no resgate do ensino da geometria. As reformas curriculares estaduais no Brasil – em especial, a Proposta do Estado de São Paulo –, na década de 1980, explicitaram essas preocupações e buscaram propor situações passíveis de serem trabalhadas em sala de aula, numa perspectiva bastante construtivista na época. Os PCN, na década de 1990, reforçaram essas preocupações e ampliaram a concepção de formação do pensamento geométrico, propondo o campo "Espaço e Forma", revelando uma aproximação com aquela defendida por Bishop (1983, apud NACARATO, 2000) de que a geometria é a ciência do espaço.

Paralelamente a esse movimento, aumentou significativamente o número de pesquisas produzidas nessa temática. Andrade (2004), em sua dissertação de mestrado, realizou um estado da arte sobre a produção brasileira em geometria, tomando como objeto de estudo os anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (Enem), com vistas a identificar as tendências didático-pedagógicas presentes nos trabalhos[1] apresentados. O *corpus*[2] da pesquisa foi composto por 363 trabalhos, e a análise centrou-se em duas grandes categorias: geometria experimental – entendida como aquela baseada na experiência e na ação humanas – e geometria em ambientes computacionais. Enquanto a primeira concentrou 48% dos trabalhos, a segunda reuniu 23%. É provável que o percentual da segunda categoria tenha se alterado bastante nos últimos anos, em decorrência da expansão das abordagens tecnológicas em educação matemática, principalmente da geometria dinâmica.

Uma constatação do autor diz respeito à abordagem fortemente empírica que marcou os primeiros trabalhos sobre o ensino desse campo de conhecimento. Uma explicação possível para esse fato pode ser a preocupação dos educadores matemáticos em apresentar contextos mais práticos de sala de aula, que pudessem motivar o professor para esse conteúdo. Foram muitos os trabalhos que envolveram o uso de geoplanos, tangram, dobraduras ou outros recursos didáticos.

Numa concepção empirista de geometria:

> A experiência é considerada a única fonte legítima do conhecimento e sobre a qual a razão não tem nenhuma prioridade. Segundo essa visão também radical, a consciência tira exclusivamente da experiência os conteúdos para a razão. O ser humano seria, a princípio, uma tábua rasa que deveria ser pouco a pouco preenchida pelas atividades experimentais. Dessa forma, todos os conceitos teriam origem nesse tipo de atividade. (PAIS, 2000, p.10)

Não se trata de questionar a importância dessa concepção e do uso de recursos didáticos para o desenvolvimento do pensamento geométrico; no entanto, como afirma Pais (2000), o problema está no fato de que muitas dessas atividades não transcendem os aspectos puramente empíricos. Nesse sentido, o trabalho de Andrade (2004) corrobora a hipótese de Pais (2000) de que, após o Movimento da Matemática Moderna, a ênfase deslocou-se da geometria racional para a empírica. O grande desafio, segundo Pais, consiste em encontrar um ponto de equilíbrio entre as duas abordagens.

---

[1] Em todas as modalidades: pôster, comunicação científica, relato de experiência, palestra.
[2] Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (Enem) de 1987 a 2001.

A concepção racionalista tem a geometria euclidiana como melhor exemplo. Segundo Pais (2000, p.9), a

> [...] visão racionalista não se fundamenta em nenhum tipo de experiência sensitiva. Seriam conhecimentos evidentes por si mesmo obtidos unicamente pelo esforço da razão. A evidência exigida na compreensão dos axiomas mostra que se trata de conhecimentos necessariamente verdadeiros e universais.

Essa concepção predominou nos currículos escolares até a década de 1960, quando foi, de certa forma, abandonada pelos ideais renovadores e pela pretensão de incluir nos currículos escolares uma abordagem mais atualizada – a geometria das transformações[3]. No entanto, como se sabe, essa proposta não foi colocada em prática, quer pela sua abstração, quer pela falta de formação dos professores para trabalhá-la. O que se observou nas décadas de 1960 e 1970 foi o total abandono do seu ensino.

O autor ainda identifica o que ele denomina de tendências moderadas – aquelas que oscilam entre o racionalismo e o empirismo. Entendemos que essas tendências moderadas pouca influência exerceram na educação matemática brasileira. As duas concepções antagônicas – racionalista e empirista – foram as que predominaram nas atividades escolares.

Pais (2000) propõe a "busca de um ponto de equilíbrio na construção de um *racionalismo aplicado*", ou seja, "um racionalismo aberto para receber tanto as influências da razão como da experiência e assim captar todos os sinais indicadores da necessidade de mudança para a construção de um saber escolar mais significativo" (PAIS, 2000, p.14, grifo do autor).

O estudo de Andrade (2004) identificou, principalmente no Enem de 1998 e de 2001, um movimento didático-pedagógico nesse sentido proposto por Pais: não uma geometria escolar racionalista radical, mas uma geometria escolar mais exploratória, buscando aportes socioculturais, contextos de problematização e de produção/negociação de significados. Emergiram também trabalhos que buscavam resgatar os processos de provas e argumentações nesse campo do saber matemático. Evidentemente, trabalhos na perspectiva empirista ainda se faziam presentes.

Mas o que estamos entendendo por uma abordagem sociocultural ou de produção e negociação de significados? Apoiamo-nos em teóricos que discutem os processos de significação. Para Pino (1994, p.6-7), os processos de significação envolvem os modos de

> [...] circulação/(re)elaboração/produção de significação, tomado esse termo como um conceito que engloba tanto os significados já instituídos quanto os possíveis sentidos que as coisas (palavras, eventos, ações etc.) podem ter para as pessoas e que emergem nas relações interativas, em particular as discursivas. Os processos de

[3] Como propunha o Movimento da Matemática Moderna.

significação concretizam-se na vida quotidiana das pessoas nas diferentes formas de comunicação, uma vez que toda significação é uma produção social.

Outro teórico que discute esses processos é Bruner (1997, p.23), o qual considera que "nosso meio de vida culturalmente adaptado depende da partilha de significados e conceitos. Depende igualmente de modos compartilhados de discursos para negociar diferenças de significado e interpretação". Para este autor, os significados são elaborados e reelaborados no domínio público: "nós vivemos publicamente através de significados públicos, compartilhados por procedimentos públicos de interpretação e negociação".

A pesquisa de Andrade (2004) trouxe, ainda, indícios de que uma nova abordagem para o ensino da geometria emergia no início deste século. Vários trabalhos sinalizavam a necessidade de retomar os processos de validação dos procedimentos geométricos, mas numa nova concepção de validação e provas. Destacaram-se nesse movimento os trabalhos do Projeto Fundão, da UFRJ, principalmente aqueles ligados aos processos de provas e argumentações.

Mas qual o sentido de falar em provas na educação básica? Evidentemente, um novo olhar vem sendo lançado para essa questão, e a literatura já indica uma série de pesquisas desenvolvidas nessa perspectiva.

Nasser e Tinoco (2001) apresentam uma boa revisão sobre os tipos de provas em matemática. Segundo elas, após o abandono da Matemática Moderna, com o movimento de retorno às bases da matemática, o que se viu foi o abandono total do raciocínio dedutivo, das argumentações e das demonstrações.

Apesar das mudanças que os livros didáticos vêm sofrendo, aproximando-os das discussões da área de Educação Matemática, a prática de sala de aula ainda está presa à cultura do exercício, com pouco espaço para discussão, trocas e negociações de significados, levantamento de conjecturas e validação destas. No que diz respeito às provas e às argumentações, muitos pesquisadores vêm se debruçando sobre essa temática. Nasser e Tinoco (2001) destacam os trabalhos de Hanna e Jahnke (1996), que analisam pesquisas que discutem as funções da prova, os tipos de provas aceitas por matemáticos e por educadores matemáticos, além de estudos investigando os progressos dos alunos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Para elas, a prova ou demonstração tem várias funções, mas a mais usada é a de validação de um resultado ou conjectura. No entanto, para a maioria dos alunos da escola básica, a prova não se faz necessária, porque o resultado é óbvio para eles; prendem-se, muitas vezes, às evidências e/ou aos aspectos visuais. Isso constitui, para o professor, o grande desafio, que consiste em ajudar seus alunos a compreender a necessidade de validação de um processo.

Outra função da prova, bastante aplicável à educação básica, é a de explicar ou elucidar, isto é, mostrar por que o resultado é verdadeiro. Talvez essa seja a função mais exequível em termos de ensino fundamental – ajudar o aluno a explicar, de forma plausível, a validade de um procedimento utilizado.

Hanna (1995, apud PIETROPAOLO, 2005, p.80) distingue as funções da prova matemática na prática profissional e na educação matemática. Segundo ela, “enquanto na prática matemática a função da prova é a justificação e a verificação, a sua função principal na educação matemática é seguramente a de explicação”. Nesse aspecto, a autora considera que uma boa prova na matemática escolar é aquela que possibilita a compreensão ao aluno, ou seja, a demonstração realizada deve incentivar a compreensão. Segundo ela, o maior desafio consiste em encontrar meios efetivos de usar a prova como promoção de compreensão. Na concepção de prova como explicação ou clarificação, a autora entende que a clarificação é distinta de uma mera justificação (p.87): “quando os estudantes estão estudando proposições que eles sabem ser verdadeiras, a principal função da prova é, obviamente, aquela da explicação. Para os professores, então, há mais vantagens a serem obtidas por usar provas explicativas.” (HANNA, 2000, p.90).

De Villiers (2001) partilha dessa posição de Hanna, pois também defende a demonstração[4] como um processo de explicação, até mesmo para os matemáticos:

> Assim, na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase-empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação. (DE VILLIERS, 2001, p.33)

Nasser e Tinoco (2001) destacam que a prova tem a função de sistematizar o conhecimento, preparando o terreno para o processo dedutivo. Nessa modalidade, os processos de argumentação e comunicação são fundamentais para que o aluno compreenda o que é uma validação e, futuramente, possa fazer suas próprias demonstrações.

De Villiers (2001, p.34) também analisa essa função da demonstração como processo de sistematização:

> A demonstração revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que nenhum número de testes quase-empíricos ou a intuição pura seriam capazes de realizar. A demonstração é assim uma ferramenta indispensável para transformar num sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, em um conjunto de resultados conhecidos.

É possível, pois, constatarmos a diversidade de concepções e funções que existem para as provas ou demonstrações. Entretanto, há certo consenso entre os pesquisadores de que os alunos necessitam ser preparados para dominar o processo dedutivo, e um dos caminhos apontados para isso é o da argumentação. Uma argumentação satisfatória tem que ser construída gradativamente pelos alunos, o que exige instrução adequada, a ser

[4] O autor utiliza o termo “demonstração”, e não “prova”.

ministrada pela escola básica. Cabe a esta, portanto, encaminhar os alunos para o domínio do processo dedutivo.

Como contribuir para que o aluno avance nos processos de argumentação? Nasser e Tinoco (2001), por exemplo, defendem que a prova empírica pode ser uma ferramenta importante ao processo.

> O aluno mostra uma figura porque o resultado é verdadeiro. [...] Dependendo da faixa etária e do nível de raciocínio dos alunos, o professor deve aceitar, e até mesmo estimular justificativas desses tipos. Haja vista que existem pessoas que são mais visuais, ou seja, tornam os conceitos abstratos e imagens reais ou mentalmente visíveis. (NASSER; TINOCO, 2001, p.4)

No entanto, entendemos que, com o avanço da escolarização, o aluno precisa ser incentivado a apresentar argumentações e validações mais consistentes, aproximando-se, de alguma forma, da prova matemática. Como essas discussões se aplicam à escola básica? Para Garnica (2002), fazem-se necessárias novas compreensões do que seja uma prova. Para ele, "o modo de argumentação por excelência é a prova rigorosa ou demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações Matemáticas." (p.97). Portanto, tal prática profissional deve ser relativizada para utilização em sala de aula. Nesse sentido, entendemos que na educação básica não faz sentido falar em demonstração formal, mas, sim, em processos de validação.

Sem dúvida, a discussão é ampla e, como mostra o trabalho de Andrade e Nacarato (2004), vem ganhando cada vez mais espaço, principalmente com o uso de ambientes computacionais, o que, com certeza, exigirá novas discussões sobre os processos de validação e prova em geometria.

A introdução de ambientes computacionais e o uso de *softwares* de geometria dinâmica vêm impondo a necessidade de repensar outros tipos de prova. Hanna (2000), por exemplo, discute o uso de provas de visualização ou visuais e afirma que "representações visuais podem ser usadas, não apenas como evidências de afirmações matemáticas, mas também em suas justificações." (p.91). Diferentes pesquisadores, além desta autora, estão envolvidos em estudos sobre as potencialidades das representações visuais para as provas matemáticas e defendem que o uso de diagramas ou de outros recursos visuais pode facilitar a compreensão de uma proposição. No entanto, uma das controvérsias que essa discussão tem gerado diz respeito ao fato de que essas representações visuais não podem substituir a prova. A autora aponta trabalhos que vêm propondo o uso de provas com raciocínios visuais e sentenciais, com a crença de que a prova vai além da estrutura sintática das sentenças. Assim, informação visual e informação sentencial não são exclusivas no desenvolvimento de uma prova.

Outra perspectiva bastante interessante tem sido apontada por De Villiers (1997, p.23 apud PIETROPAOLO, 2005, p.89), a qual defende que o uso de atividades de investigação pode contribuir para a compreensão da necessidade de uma prova.

> Essas atividades, além de favorecerem o convencimento do aluno de determinados resultados, poderão servir de alavanca para diversas indagações, tais como a do "por que" das coisas funcionarem de uma determinada maneira e não de outra. Segundo esse pesquisador, os alunos rapidamente admitem que a verificação indutiva/experimental pode confirmar um resultado já conhecido, mas não esclarece nem contribui para uma compreensão satisfatória: "eles parecem achar necessário então procurar mais por argumentos dedutivos como uma tentativa de explicação, mais do que uma verificação.

Nessa perspectiva, Costa (2008) teve como um dos objetivos de sua pesquisa analisar os processos de provas e validações em atividades de natureza investigativa, em diferentes mídias, mais especificamente, na utilização de *softwares* de geometria dinâmica. Para tanto, buscou tecer uma relação entre a Matemática Profissional e a Matemática Escolar, com vistas a significar um trabalho com provas e validações no ambiente escolar e/ou na formação docente. Nesse sentido, o autor aponta que:

> Em determinado momento nos aproximamos do matemático, buscando trazer o seu "fazer matemático" para nossa sala de aula enquanto flexibilizamos a concepção de prova e nos afastamos da forma específica do seu trabalho com ela. Nosso interesse é tentar entender como trazer a prova para o contexto escolar, seja diretamente relacionado ao aluno ou relacionado à formação do professor, aproveitando o que a matemática tem de mais atraente: sua capacidade criativa. (COSTA, 2008, p.45)

A análise realizada na pesquisa de Costa (2008, p.147) indica a potencialidade das atividades investigativas para colocar o aprendiz (aluno) em movimento de pensamento matemático, em que ele "poderá confrontar-se com tarefas que o envolvam, estimulando-o a explorar, experimentar, fazer conjecturas e testá-las, estruturar seu raciocínio de forma lógica e comunicá-lo a seus pares". Nesse sentido, o autor conclui:

> Ao serem feitas [as atividades] em grupos e/ou subgrupos, aquele que participa reconhece nos integrantes do grupo, os pares a quem deve convencer de seu ponto de vista, por meio de uma argumentação estruturada e lógica, e também se coloca na outra condição quando ouve e analisa as argumentações dos outros membros. Dessa forma, a Matemática Escolar aproxima-se da Matemática Profissional quebrando a sensação de que os conteúdos apresentados na Matemática Escolar foram concebidos de forma "milagrosa" por mentes privilegiadas e não por trabalho exaustivo e sistemático. (COSTA, 2008, p.148)

Todos esses estudos e pesquisas relacionados aos processos de argumentações e provas evidenciam o quanto o campo da pesquisa vem avançando nos últimos anos. No entanto, a geometria escolar continua muito distante de todas essas discussões.

Para que o professor possa contribuir para os avanços do aluno nos processos de argumentação, validação e provas em geometria, ele precisa, mais do que tudo, ter o domínio conceitual e epistemológico sobre ela. Mas como garantir tais avanços com as lacunas que o professor traz em sua formação geométrica? Como proceder, se o próprio professor não acredita na necessidade de colocar o aluno em situações que requerem argumentações mais apuradas? Nossa experiência tem evidenciado que os alunos chegam aos cursos de licenciatura em Matemática sem nunca terem desenvolvido provas matemáticas de qualquer natureza; que a tentativa de trabalhar em uma prática diferenciada, como as atividades investigativas na disciplina de geometria euclidiana, exige muitos esforços do docente, uma vez que este necessita romper com uma cultura de aula de matemática, principalmente no Ensino Superior, vinculada à aula expositiva e à resolução de exercícios de fixação (GRANDO, 2009).

Cientes das lacunas existentes na formação geométrica dos professores, constituímos, na Universidade São Francisco, um grupo de estudos e pesquisas sobre o ensino de geometria. A seguir, apresentamos o grupo e alguns pressupostos que têm norteado o trabalho.

O TRABALHO COMPARTILHADO COMO FACILITADOR DE ARGUMENTAÇÕES E APROPRIAÇÕES CONCEITUAIS EM GEOMETRIA

O grupo existe desde 2003 e é formado por professores, graduandos, pós-graduandos e professoras formadoras que estudam e pesquisam sobre o ensino de geometria[5]. Em decorrência da dimensão colaborativa que existe no grupo, este passou a denominar-se Grucogeo[6] e, no período de julho de 2005 a julho de 2007, contou com apoio financeiro do CNPq[7] para o desenvolvimento de uma pesquisa sobre o ensino de geometria em diferentes mídias. As reuniões do grupo ocorrem semanalmente, às segundas-feiras, das 17 às 19 horas, no espaço da universidade.

O grupo é "aberto", possibilitando a entrada e a saída de seus participantes – aproximadamente 15 em cada semestre letivo –, e tem participação voluntária. Tais características possibilitam que não haja compromissos formais com o cumprimento de um programa, por exemplo, e que cada temática possa ser discutida com profundidade.

Há uma dinâmica de trabalho no grupo, desde o seu início, que consiste na elaboração coletiva, na aplicação, na avaliação e na análise de atividades de geometria para a sala de aula na educação básica. Para a elaboração das atividades, são constituídos subgrupos nos quais pelo menos um participante precisa ser professor da escola básica, para que este possa desenvolver a atividade na sua sala de aula. Na fase de desenvolvimento, esse professor é acompanhado pelos graduandos, que o auxiliam também com os registros do

[5] A partir de 2009, o grupo mudou a temática de estudo para Estocástica.
[6] Grucogeo é a sigla para Grupo Colaborativo em Geometria.
[7] Processo MCT/CNPq nº 473697/04-1.

desenvolvimento da atividade, do envolvimento dos alunos, das dúvidas e dos conflitos surgidos na aula. Todo esse material é apresentado ao grupo para análise e discussão, com sistematizações posteriores.

Nesse sentido, entendemos que o Grucogeo tem favorecido tanto a produção de saberes em geometria para, na e da sala de aula, como também tem possibilitado às professoras formadoras a compreensão e a ampliação de pesquisas relativas aos processos formativos docentes.

O fato de o grupo contar com professores e futuros professores dá a ele uma dimensão colaborativa muito interessante, na qual cada um contribui com o que pode: os professores escolares apresentam suas experiências profissionais e suas dúvidas quanto ao ensino de geometria; os licenciandos, embora sem a experiência docente, possuem um conhecimento acadêmico de produção do conhecimento matemático, além de poderem contribuir com as questões relacionadas à tecnologia. Tal dimensão possibilita a produção de saberes *da* e *sobre a* docência, decorrente das atividades desenvolvidas a partir de várias temáticas.

Dentre as atividades que o grupo desenvolve, prevalecem as de natureza investigativa em diferentes mídias. Para ilustrar essa dinâmica interativa do Grucogeo, faremos um recorte de um dos movimentos ocorridos no grupo, que envolveu uma tarefa com sólidos truncados, realizada durante o primeiro semestre de 2007.

UMA EXPERIÊNCIA... UM AMBIENTE DE VERDADES PROVISÓRIAS

A tarefa aqui relatada e desenvolvida no Grucogeo foi adaptada do Projeto Matemática para todos, da Associação de Professores de Matemática[8] de Portugal (APM, 1998, p.103). A partir dos sólidos platônicos, devem-se fazer cortes nos seus vértices “de modo que as faces obtidas sejam polígonos regulares”.

Inicialmente, a tarefa foi executada em dois subgrupos, em que os professores e os graduandos tentaram produzir imagens mentais para a resolução dos sólidos truncados e anotaram suas conclusões.

O primeiro subgrupo levantou algumas hipóteses que foram se modificando aos poucos, por meio de discussões entre seus participantes: inicialmente afirmou-se que um dos cortes deveria ser em um ponto que representasse menos da metade da aresta do cubo. Esta hipótese assumiu posteriormente outra redação, que afirmava que deveria haver dois cortes, dividindo a aresta em três partes; com isso, conseguir-se-iam, nas secções, triângulos equiláteros e, na face cortada, um octógono. Porém, um dos graduandos desse subgrupo percebeu que dessa forma não se teria, na face, um polígono regular (octógono), conforme o solicitado pela tarefa. Para isso, o corte deveria ser feito de forma que o octógono tivesse, como medida dos lados, valores múltiplos de $\sqrt{2}$ (Figura 1).

[8] http://www.apm.pt.

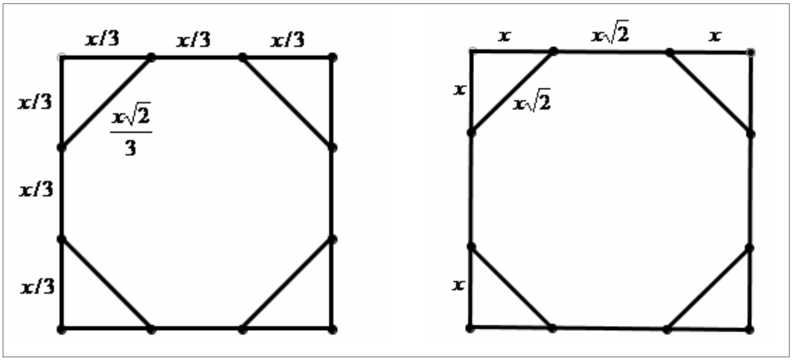

FIGURA 1 – Ilustração dos cortes da face do cubo.

A partir deste ponto, o interesse do subgrupo voltou se para a definição de valores para efetuar o corte, ou seja: como construir um octógono a partir de um quadrado?

O segundo subgrupo, partindo também do cubo, levantou duas hipóteses: (1) assim como o subgrupo anterior, achou que se conseguiria um octaedro, fazendo-se os cortes em um terço da aresta; e (2) julgou que, se o corte fosse feito no ponto médio da aresta, obter-se-ia um outro cubo.

Quando o primeiro subgrupo socializou suas observações quanto ao octaedro, o segundo subgrupo percebeu que sua hipótese estava errada. A dúvida sobre como obter o corte com medida múltipla de $\sqrt{2}$ não foi resolvida. Isso tudo mostra o movimento do grupo, em que as hipóteses vão emergindo, a partir das tentativas de resolução do problema, e o processo compartilhado de resolução e socialização possibilita aos participantes "derrubar", confirmar suas hipóteses ou mesmo fornecer argumentos para elas.

Após uma primeira rodada de conjecturas e validações, usando principalmente desenhos e superfícies poliédricas construídas em papel, houve a socialização das produções dos diferentes grupos e produziu-se uma síntese organizada numa tabela (Tabela 1).

TABELA 1 – Polígonos obtidos nas faces após os cortes em poliedros platônicos.

Sólido platônico	Corte ao meio da aresta	Corte em 1/3 da aresta
Cubo	Obtivemos outro cubo	Não era possível, pois a face restante não seria um polígono regular
Tetraedro	Obtivemos um novo tetraedro	Obtivemos um poliedro com 4 faces hexagonais e 4 faces triangulares
Octaedro	Obtivemos um cubo	Sem solução
Dodecaedro	Obtivemos um poliedro com faces triangulares e pentagonais	Sem solução
Icosaedro	Obtivemos um poliedro com faces pentagonais e triangulares	Obtivemos um poliedro com faces pentagonais e hexagonais

Entretanto, a professora Olga – participante do grupo – saiu desse encontro incomodada com os resultados e decidiu moldar os sólidos em massa de modelar. No encontro seguinte, ela refutou a nossa conclusão de que a secção de um cubo seria outro cubo, mostrando o octaedro que se obtinha. Luana, pós-graduanda participante do grupo, que produziu o registro do encontro desse dia, escreveu:

> Ela [a professora Olga] falou que havia pensado neste problema a semana toda e que insatisfeita com nossa conclusão ela fez os poliedros com massa de modelar para poder cortar. Ela percebeu que estávamos equivocados, pois estávamos imaginando que quando cortasse ao meio não teríamos sobra no meio do poliedro anterior. Ela percebeu que qualquer corte no tetraedro daria um octaedro. Não acreditamos, num primeiro momento, no que a professora Olga estava falando. Fiquei me indagando e comecei a confeccionar o sólido (sic) em superfície de papel para poder cortar e ver. Cortamos e vimos que estávamos esquecendo a parte triangular que sobrava. Todas as nossas conclusões tinham ido por água abaixo (Registro produzido por Luana).

Esse ambiente de “verdades provisórias” permitiu-nos criar conjecturas sem nos envergonhar, como escreve a professora Terezinha, outra participante:

> É muito interessante perceber que a expressão “está errado” nunca é pronunciada dentro do grupo; não é porque fazemos tudo corretamente, mas, sim, porque nos utilizamos das perguntas feitas para corrigirmos nossos erros; sendo assim, conseguimos “enxergar” o que erramos e reconstruímos em cima do próprio erro.

Esses desencontros e essas reflexões sobre as tais “verdades provisórias” fizeram-nos buscar dois caminhos na tentativa de validação: (1) provar quantas faces tem cada um dos sólidos platônicos truncados e (2) identificar quais as condições para que esses sólidos fossem também constituídos por faces regulares.

A cada reunião, uma nova mídia era utilizada. Por exemplo, para validar a afirmação de Olga foi usada “massa de modelar”. Outra mídia experimentada foi o isopor. Com essa mudança, a tarefa ganhou um novo desafio, visto a dificuldade de construção de um tetraedro a partir de um bloco de isopor na forma de um paralelepípedo. Dessa forma, surgiram análises e questionamentos sobre: instrumentos de medidas de ângulos poliédricos, conceito de tetraedro regular, conceito de pirâmide, dentre outros.

As tentativas de prova levaram-nos a formular tabelas, buscando a verificação do teorema de Eüler (nº de vértices + nº de faces = nº de arestas + 2) também para os sólidos truncados. Foram inúmeras as relações obtidas, até a sistematização no grupo através da seguinte tabela:

TABELA 2 – “Descobertas” produzidas coletivamente quanto aos sólidos truncados.

Sólido	Face	Aresta	Vértice
Sólido	F	A	V
Sólido truncado (aresta dividida ao meio)	(F + V)	(3 x V)	(3 x V / 2)
Sólido truncado (aresta dividida em três partes)	(F + V)	(3 x V) + A	(3 x 8)

Os alunos da graduação sentiram-se bastante empolgados com a observação de regularidades a partir das tabelas e essas conclusões deram ao grupo uma satisfação muito grande em ter conseguido produzir algo em geometria espacial, além da simples nomeação de sólidos. Conforme escreve a professora Joyce: “*A exaltação de meus colegas foi contagiante, afinal foram vários encontros, várias hipóteses que caíram por terra até se chegar a essas relações descritas na tabela*” (registro escrito do encontro, produzido por Joyce).

Para Olga, a experimentação de construção dos sólidos truncados com outras mídias, mesmo chegando a várias regularidades, era o mais importante. Assim, passamos a modelar sólidos truncados, seccionar blocos de isopor, recortar modelos de papel, analisar possíveis cortes em sólidos de acrílico, etc.

Entretanto, em todas essas mídias a imperfeição da secção ainda deixava dúvidas. Surgiu, então, no grupo a ideia de buscar *softwares* de construção dos objetos tridimensionais com a possibilidade de realizar as secções por planos. O pós-graduando Jorge[9], ao pesquisar *softwares* dessa natureza, disponibilizou para o grupo o Cabri 3D[10]; a possibilidade de construção desses objetos e de verificação pelas secções, de certa forma, trouxe tranquilidade ao grupo. O *software* ajudou, e muito, no processo de visualização, principalmente porque possibilita o movimento dos objetos na tela, o que propiciou a geração de novas conjecturas.

Diante das limitações apresentadas pelas outras mídias, acreditamos que este programa se destacou como um recurso didático interessante, pois permitiu uma construção mais precisa e uma manipulação mais fácil dos objetos tridimensionais. Acreditamos que a parte mais complexa tenha ficado por conta da construção geométrica. Podemos citar como exemplo os cortes feitos no cubo, mantendo a face como um octógono regular. Conforme registramos anteriormente, um dos subgrupos chegou à conclusão de que o corte deveria manter, na face do cubo, um segmento de comprimento múltiplo de $\sqrt{2}$. O problema a ser resolvido era: como construir esse segmento sobre a face do cubo, por meio de cortes, transformando essa face quadrada em um octógono regular? Partindo do estudo do octógono regular, pudemos concluir que a circunferência nele inscrita tangencia seus lados, definindo, com seu raio, a apótema desse polígono, conforme ilustrado na Figura 2.

[9] Jorge Luís Costa, coautor deste artigo e pós-graduando. Na época, era participante e pesquisador no grupo.
[10] O programa Cabri 3D é um *software* comercial de Geometria Dinâmica para a Geometria Espacial. Foi produzido pela Université Joseph Fourrier – UJF – França. Disponível em: <http://www.cabri.com/>.

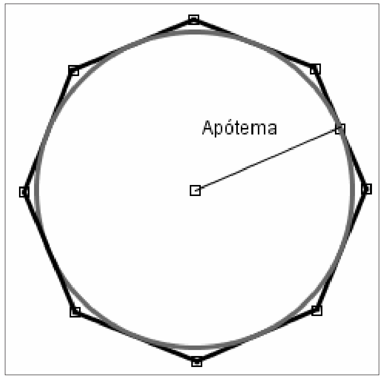

FIGURA 2 – Apótema do octógono.

Com base nessa construção foi possível criar os cortes necessários no cubo, conforme ilustrado nas Figuras 3 e 4:

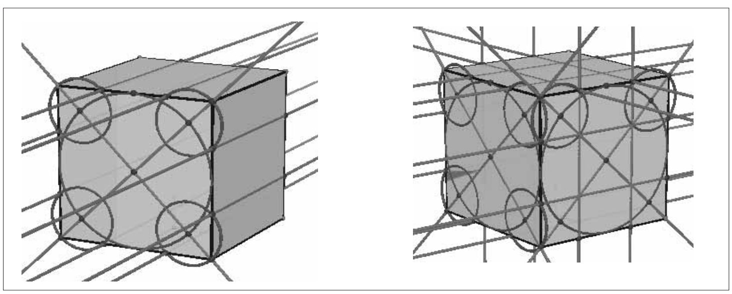

FIGURA 3 – Cubo com as construções auxiliares para definição dos pontos de corte.

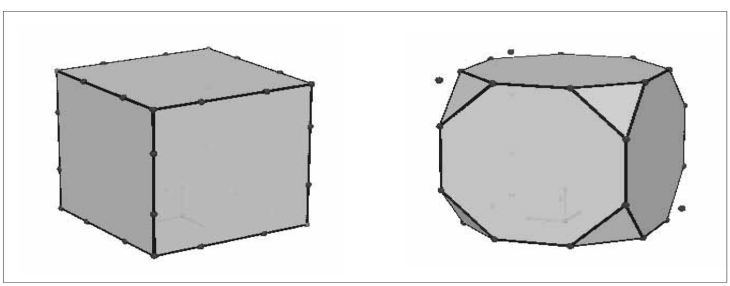

FIGURA 4 – Cubo com os pontos de corte definidos e os cortes efetivados

Com a inserção gradativa de novas mídias – do papel e do lápis, até o programa Cabri 3D –, ousamos afirmar que houve uma mudança significativa na percepção dos participantes do Grucogeo sobre os objetos tridimensionais e suas propriedades. Entendemos que a integração dos experimentos pela manipulação das mídias, das observações, das análises e das sínteses possibilitou essa mudança e tornou-se fundamental no desenvolvimento desta atividade. Cada mídia apresentava uma nova dificuldade de representação, o que dependia do domínio sobre ela e, ao mesmo tempo, oferecia limites de precisão, principalmente, e possibilidades de uma melhor visualização. Nesse sentido, podemos afirmar que as mídias se complementaram, a fim de dar suporte para as argumentações e as provas da atividade.

A escolha de cada mídia tem a ver, muitas vezes, com o conhecimento que se tem sobre ela. Dessa forma, entendemos que, se para alguns participantes a mídia computacional possibilitou um instrumento de “convencimento”, para outros, a massa de modelar, ou mesmo o modelo em acrílico, assumiu esse papel.

Além disso, notamos que, à medida que avançávamos nas análises, aumentavam as dificuldades. O que ficou muito marcado foi a dificuldade com a geometria espacial, além do envolvimento dos membros do grupo com a tarefa. As argumentações nesse campo da matemática, ou mesmo as tentativas de provas algébricas foram cada vez mais descartadas, pela dificuldade em lidar com os objetos geométricos tridimensionais. Assim, mesmo com todo esse movimento, o processo de demonstração (ou prova formal) de nossas hipóteses não pôde ser realizado, por alguns fatores que foram determinantes: as provas formais em geometria espacial apresentam-se muito mais complexas que as de geometria plana, envolvendo, muitas vezes, conceitos de matemática superior (Topologia, por exemplo); a pouca familiaridade com a experimentação de objetos tridimensionais dificulta a produção de imagens mentais; o pouco domínio das propriedades geométricas espaciais, até mesmo pelos professores e formadores, torna a tarefa mais difícil.

Essa tarefa – para ser realizada com alunos do Ensino Médio e até mesmo Superior – não foi pensada para a sala de aula, tendo ficado restrita ao Grucogeo, visto que os docentes participantes do grupo atuam apenas no Ensino Fundamental.

O GRUPO DE TRABALHO COMO ESPAÇO PARA DESENVOLVER PROCESSOS DE VALIDAÇÃO

A situação descrita e relatada neste texto permite-nos compreender a dinâmica e o envolvimento coletivo dos participantes do Grucogeo em direção a uma aprendizagem compartilhada. Entendemos que há no grupo uma dimensão colaborativa, uma vez que, a cada momento, um participante diferente assumiu a liderança nas discussões: ora os graduandos, com hipóteses formuladas a partir da matemática formal; ora os professores escolares, como Olga, que apresentou um modelo experimental e desconstruiu validações produzidas anteriormente; ora as formadoras, com a variação das mídias como instrumento de reflexão, etc.

Dessa forma, podemos dizer que o trabalho desenvolvido no Grucogeo proporcionou aos seus participantes a produção de diferentes saberes. A narrativa da professora Olga, ao final do trabalho, revela que, estando no grupo durante quatro anos, apropriou-se de um fazer pedagógico aliado à própria mudança de concepção sobre geometria e seu ensino.

> Desde o início, achei interessante porque trazia maneiras diferentes de tratar certos assuntos. Apesar do incômodo da mudança que eu sentia, me mantive no grupo. Mais tarde percebi que nós poderíamos trabalhar em parceria pela bagagem teórica que elas [as formadoras] possuem e poderiam nos proporcionar lendo textos, novas perspectivas de abordagem à geometria, e nós, professores da rede, com a experiência e realidade da sala de aula com os alunos do ensino fundamental. No primeiro momento, achei que estávamos revendo alguns conceitos, porém no decorrer do encontro, percebi que comecei a investigar certos conceitos matemáticos bem mais amplos, saindo do conformismo, comodismo e pesquisar as conjecturas surgidas e discutidas no grupo. [...] Na minha pequena e sutil reflexão da prática de sala de aula, observei que mudei em relação aos alunos, ouvindo-os. Verifiquei que os alunos foram sujeitos das ações, o pensar e as falas valorizaram o desenvolvimento das atividades. Como professora, refleti, replanejei e retomei a mesma atividade, mas com enfoque diferente, para que os objetivos previstos fossem alcançados por todos os alunos. Da minha experiência, percebi a mudança na postura didática como professora na condução das aulas e na vida particular a postura investigativa trouxe também decisões mais sensatas e objetivas. (Registro de avaliação produzido por Olga)

Para os graduandos – muitos deles ingressantes na universidade sem experiência com a geometria –, o espaço do Grucogeo trouxe contribuições tanto para o saber em geometria quanto para o saber pedagógico nessa área de conhecimento – saberes sobre a docência, como destacado por Kelly, Carina e Henrique:

> É muito interessante quando cada grupo coloca as suas conclusões e aí é observado como existem diferentes maneiras de desenvolver e provar uma única tarefa. A sofisticação de uma construção vai depender do material que se tem disponível naquele momento e de como lidar com ele e do conhecimento geométrico de cada um, que tem a ver com a prática pedagógica de cada um [referindo-se aos professores e pós-graduandos do grupo]. O conceito geométrico usado vai depender da imagem mental que cada um consegue formar, da representação e das propriedades que garantem a sua existência. (Registro de avaliação produzido por Kelly)

Portanto, pudemos constatar a importância do movimento constante, no grupo, de negociações em busca de processos de validação, provas e refutações para as várias hipóteses que eram construídas, possibilitando uma aprendizagem geométrica que articula experimentação, argumentação, validação e provas. Defendemos que, se o professor, em sua formação, vivenciar experiências nas quais esses processos estejam em circulação, ele sentirá segurança para proporcionar a seus alunos da escola básica experiências significativas em geometria.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, José Antonio Araújo. *O ensino de Geometria:* uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos Anais dos ENEM's. 2004. 249p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, SP.

ANDRADE, José Antonio A.; NACARATO, Adair M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista* – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 11, n.17, p.61-70, dez. 2004.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (APM). *Projeto Matemática para todos*, 1998. Disponível em <http://www.apm.pt>. Acesso em: jul. 2007.

BRUNER, Jerome. *Atos de significação.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

COSTA, Jorge L. *Provas e validações em geometria em um grupo de dimensão colaborativa.* 2008. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba/SP.

DE VILLIERS, Michael D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática* – APM, Portugal, n.62, mar./abr. 2001.

GARNICA, Antônio V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *BOLEMA* – Unesp, Rio Claro, ano 15, n.18, p.91-99, 2002.

GRANDO, Regina C. Investigações geométricas na formação de professores que ensinam matemática. In: LOPES, Celi E.; NACARATO, Adair M. *Educação Matemática, leitura e escrita:* armadilhas, utopias e realidades. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2009. p.201-217.

HANNA, Gila. Proof and its classroom role: a survey. In: SARAIVA, Manuel J.; COELHO, M. Isabel; MATOS, José Manuel. *Ensino e aprendizagem da Geometria*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática, 2000. p.75-104.

NACARATO, Adair M. *Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação:* currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando Geometria. 2000. 323p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lucia. *Argumentações e provas no ensino de matemática*. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, IM-UFRJ, 2001.

PAIS, Luiz Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. In: REUNIÃO DA ANPED, 23., 2000. Disponível em: <www.anped.org.br>. Acesso em: jul. 2007.

PIETROPAOLO, Ruy C. *(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática*. 2005. 249p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PINO, Angel. A questão da significação: perspectiva histórico-cultural. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE NEUROPSICOLOGIA, 2., outubro de 1994, Campinas. *Conferência*. p.1-12. (Mimeo).

Recebido em: ago. 09 **Aceito em:** out. 09