ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4934

Las Ecuaciones Diferenciales entre la Sublimación Teórica y la Universalización Práctica

Juan E. Nápoles Valdés[1]

[1] Universidade Nacional del Nordeste, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Corrientes, Corrientes, Argentina y Universidade Tecnológica Nacional, Facultad Regional Resistencia, Resistencia, Chaco, Argentina

Recibido para publicación el 1 de dic. 2018. Aceptado, después de la revisión, el 1 de dic. 2018.

"Los grandes matemáticos han actuado sobre el principio de ***Divinez avant de démontrer*** *y no cabe duda que casi todos los descubrimientos importantes se hacen de esta forma".* (Edward Kasner)

RESUMEN

En este trabajo presentamos, sucintamente, el carácter bifronte de las ecuaciones diferenciales ordinarias (edo): por un lado la especialización teórica en diversas áreas y por el otro, la multiplicidad de aplicaciones de las mismas, así como algunas reflexiones sobre el desarrollo de un curso de edo en este contexto.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Aplicaciones de EDO. Enseñanza de la matemática.

ABSTRACT

In this paper, we present, briefly, the bifront character of the ordinary differential equations (ode): on the one hand the theoretical specialization in different areas and on the other, the multiplicity of applications of the same, as well as some reflections on the development of a course of ode in this context.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Applications of EDO. Teaching mathematics.

PRELIMINARES

Uno de los fundamentos de la actual reforma de la enseñanza de la matemática es el concepto del que se parte respecto a la naturaleza del conocimiento matemático. La perspectiva histórica permite mostrar, entre otras cosas, que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en esta evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de los conocimientos matemáticos, del razonamiento empírico-inductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo.

Corresponding author: Email: jnapoles@frre.utn.edu.ar; jnapoles@exa.unne.edu.ar

Todo lo anterior podemos reafirmarlo con el hecho de que el desarrollo de la matemática ha seguido un proceso heurístico, demostrado históricamente (Farfán, & Hitt, s/f), contrario a lo que sostienen los defensores del estilo deductivista, quienes pretenden que la deducción es tanto el patrón de la matemática como la lógica del descubrimiento, al igual que de la mayoría de los conceptos desarrollados por un matemático aislado. Así, cuando se evidencian las raíces históricas de los conceptos, se observan nítidamente las circunstancias que, originalmente, motivaron y promovieron su desarrollo hacia su transformación en parte esencial de teorías coherentes y significativas. Aunque, es necesario subrayarlo, no basta analizar los hechos y conocer la evolución de las ideas y conceptos; también es necesaria una visión evaluadora y crítica, para seleccionar y reconstruir los problemas que realmente pueden ayudar al desarrollo de una actividad creativa.

El problema principal, en la educación matemática, es que estos modelos o metodologías basados en el uso de recursos históricos, no se han llevado –salvo muy pocos casos- al terreno de la enseñanza de la matemática, siendo ellos de necesidad innegable, pues el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, depende de una acertada combinación de lo lógico, lo histórico y lo pedagógico.

En esta dirección, cabe señalar que el marco didáctico-metodológico, en el que está enmarcada nuestra conferencia, es el siguiente:

1. Concebir de manera dinámica a la matemática, lo que se expresa en la célebre frase del matemático francés Philip E. Jourdain (1879-1919), en la introducción a su texto *La naturaleza de la matemática*, cuando al declarar el objetivo central apuntaba: “Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo” (Jourdain, 1976). Esta concepción se refleja en una enseñanza basada en la *resolución de problemas*, tanto para el desarrollo de diversas habilidades lógicas de los alumnos, como para aclarar cuáles de aquellos hechos fueron los que motivaron el surgimiento de un concepto y por qué, cuál era el marco de rigor en aquel entonces, cuál la metodología, las concepciones y cómo influyeron todos estos factores para que el desarrollo de la matemática se diera en una dirección y no en otra.

2. Aceptar el triple significado de los objetos matemáticos: institucional, personal y temporal.[1]

3. Distinguir entre una *argumentación*, una *prueba* y una *demostración*, y la necesaria dosificación de éstas en el currículo escolar, así como las discusiones en torno a las concepciones clásicas sobre la demostración matemática y el marco de rigor de las

[1] El conocimiento se produce con **continuidad temporal** y no sólo en el ámbito reconocido **institucionalmente** para ese fin, se produce en **todos los ámbitos de la vida humana**. Los distintos conocimientos que se producen se pueden parcelar para su análisis y calificar a cada una de las facetas separadas con un nombre diferente, sin embargo en el sujeto que conoce tal separación es imposible de modo que la actividad matemática ha de tener en cuenta tal diversidad de fuentes de conocimiento así como los condicionantes que tiene el conocimiento matemático inmerso en el potente conocimiento cultural. Ambos planos de análisis de dentro y de fuera de las instituciones escolares, creemos que pueden ser válidos para aportar luz sobre los procesos cognitivos. Ver Díaz & Batanero (1994) y Nápoles (1997a).

mismas.[2] El concepto de prueba matemática no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido mayor importancia últimamente sobretodo vinculado a ciertos problemas de educación matemática. Así, se prefieren en ocasiones pruebas que expliquen, en vez de pruebas que sólo "prueben". Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son válidas. Han adquirido relevancia, en los últimos tiempos incluso, las llamadas *pruebas sin palabras,* donde las representaciones geométricas vendrían a jugar el papel de las explicaciones necesarias.

4. Que existen diferencias cualitativas entre el funcionamiento académico (a nivel de investigación, como "saber sabio") de un determinado conocimiento y el funcionamiento didáctico del mismo ya que, por diversas causas, los usos y connotaciones de las nociones Matemáticas tratadas en las instituciones de enseñanza son necesariamente *restringidas*.

En diversos trabajos anteriores (Nápoles, 1997b, 1988, Nápoles & Negrón, 2002), hemos presentado otros resultados sobre el enfoque histórico-problémico que nos ocupa; que si bien son independientes de este trabajo, sirven como un prólogo al mismo. En particular, queremos precisar un poco más las indicaciones didácticas sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias.[3]

Por otra parte, podemos asegurar que actualmente se experimenta una sensible situación de cambio en los principios metodológicos de la didáctica específica de esta asignatura, motivada por estudios que han penetrado incluso en la ontología y gnoseología de la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Es tangible el esfuerzo por introducir desde pregrado las ideas de avanzada que defienden abiertamente la metáfora del profesor investigador, sustentando una postura dinámica de la matemática, que lleva aparejada como metodología de la enseñanza, la de *resolución de problemas*.

Quisiéramos retomar las palabras del Programa Nacional de Resolución de Problemas cuando postula:

> La Matemática es un modo de pensar, un estilo de razonar. Sirve para decidir si una idea es razonable o al menos para establecer si una idea es probablemente adecuada para lo que se busca. La Matemática es un campo abierto a la exploración y a la investigación y todos los días se producen ideas nuevas y fecundas. Es un modo de pensar que sirve para resolver los problemas de la ciencia, de la administración, de la industria, etc. (ver información detallada en http://www.me.gov.ar/curriform/ publicaciones2002/reuegb3poli/estrategias.pdf)[4]

[2] Sucintamente podemos decir, que una **argumentación** es la acción de hacerle saber algo a alguien, puede que uno mismo, que una **prueba** es un tipo especial de argumentación que incorpora un valor epistémico verdadero y que **demostración** es una prueba lógicamente concluyente.

[3] Tales indicaciones han sido esbozadas en (Nápoles, 2000a)

[4] Otras cuestiones relacionadas con los problemas matemáticos (su clasificación, estrategias para su solución y construcción) pueden ser consultados en (Nápoles, 1999, 2000b, Nápoles & Cruz, 2000). Muchas de estas cuestiones se reflejan en (Nápoles, 2005a).

Indudablemente las ciencias matemáticas, así como el ejercicio de su enseñanza, a lo largo de toda su historia, siempre han tenido como principal medio y fin la resolución de problemas matemáticos. Halmos no puede ser más elocuente al respecto, cuando afirma que los problemas son "el corazón de la Matemática" (Halmos, 1980, 524). La resolución de problemas entraña el engranaje de disímiles recursos cognoscitivos por parte del resolutor. Para éste, resolver un problema debe servir no sólo para un simple entrenamiento intelectual, sino también para un sano y agradable entretenimiento. Para ilustrar lo anterior con suficiente claridad, hemos tomado un tema no demasiado heterogéneo, las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En este trabajo queremos presentar algunas reflexiones sobre problemas no rutinarios en un curso de edo, y como pueden ilustrar doble carácter de las edo: por un lado, la especialización teórica en diversas áreas y por el otro, la multiplicidad de aplicaciones de las mismas.

CINCO PROBLEMAS NO RUTINARIOS

Aunque las edo son un tema importante en el plan de estudios de ingeniería, los estudiantes experimentan dificultades para la comprensión conceptual de las mismas[5], de ahí la necesidad de elaborar problemas que se salgan de los planteados en los libros de textos habituales de edo al alcance de los estudiantes.

Debemos dejar claro, que, en nuestro trabajo, por problema no rutinario consideramos aquellos problemas en los cuales la información brindada no es adecuada para resolver el mismo, bien porque faltan datos, porque tienen datos superfluos e incluso porque pueden aparecer datos contradictorios. En ocasiones pueden ser problemas mal planteados.

Problema 1. Determinar el límite, cuando $x \to \infty$, de la solución general de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$.

Si analizamos el marco algebraico, su solución es muy elemental, pues es una ecuación en variables separables y resoluble en cuadraturas, cuya solución se puede expresar por $y = \frac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$, es claro que, esta expresión a los estudiantes no les dice mucho sobre el comportamiento de las soluciones: así declaran que dicho límite es -1. Aún teniendo el comportamiento gráfico (Figura 1), es necesario realizar el análisis de cuándo el límite es –1, ocasión propicia para revelar la necesidad de tener en cuenta las condiciones iniciales y el análisis general del problema. De nuevo recalcamos la necesidad de la integración de los diferentes acercamientos para completar el análisis.

[5] Ver por ejemplo, (Arslan, 2010) y (Rowland, & Jovanoski, 2004)

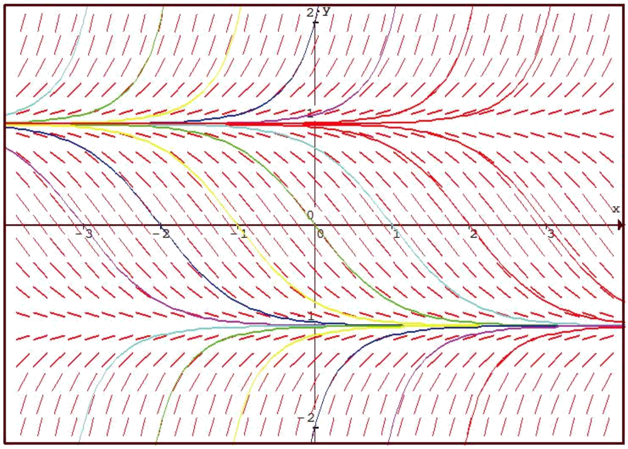

Figura 1. Comportamiento gráfico de la solución $y = \frac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$.

Problema 2. La ecuación diferencial que describe el crecimiento de una población de peces, en un criadero, en el tiempo es $\frac{dP}{dt} = P_0 - 5000P$. Dar el significado biológico de cada uno de los tres términos dP/dt, P_0 y -5000P en la ecuación diferencial.[6]

Problema 3. Encontrar la solución general explícita de la ecuación diferencial y´=ylnx, x>0. Contraste la solución obtenida con el Teorema de Existencia y Unicidad (TEU).

Problema 4. Verifique que $y = \frac{2}{x} - \frac{C}{x^2}$ es la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{2}{x^2}$. Demuestre que las condiciones iniciales y(a)=a, y(-a)=-3a, con a$\in$**R**, resultan en la misma solución particular. ¿Esto viola el TEU? ¿Podemos utilizar cualquier valor real de a?

Problema 5. Obtener la solución aproximada, por el Método de Euler,[7] de la ecuación de van der Pol $x'' - b(1-x^2)x' + x = 0$.

Esta ecuación tiene un ciclo límite (Figura 2). Este modelo es usado para describir el comportamiento de circuitos eléctricos, ciertos tipos de estrellas pulsantes y muchos fenómenos más. Con b=1, es resuelta por el Método de Euler y se obtiene

[6] Detalles adicionales pueden ser consultados en (Guerrero Ortiz, Mejía Velasco, & Camacho-Machín, 2015).
[7] Consultar por ejemplo, (Hall, Keene, & Fortune, 2016) y (Tournès, 2018).

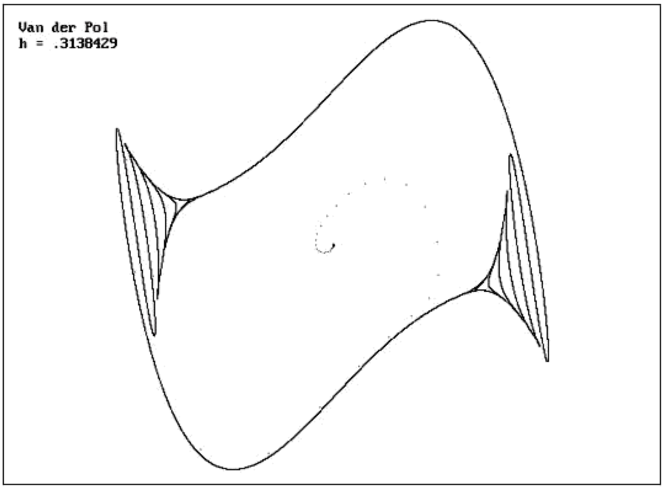

Figura 2. Solución del Oscilador de Van der Pol con b=1 y h=0.3138429.
Fuente: http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm.

Para h menor que 0.1 la solución es razonablemente aproximada, pero cuando h aumenta, el ciclo límite típico (Coddington & Levinson, 1955) se convierte en un comportamiento caótico (Figura 3 obtenida con h=0.168).

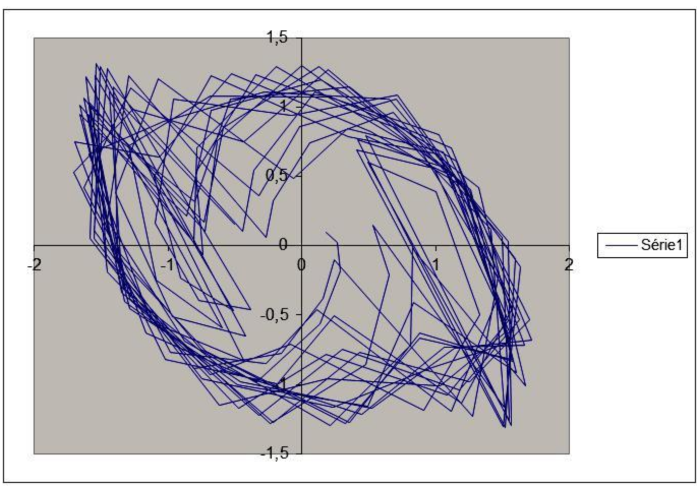

Figura 3. Comportamiento caótico de la solución com h = 0,168.

OBSERVACIONES FINALES

Debemos agregar una cuestión crucial de la concepción actual del curso de ecuaciones diferenciales que es su carácter algorítmico-algebraico, la que está determinada básicamente, por la relación tan cercana que existe entre el desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a su integración por cuadraturas) del que ya hemos hablado y que aún en la concepción "moderna" de operadores lineales, está presente. Un bosquejo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos permite hacer las siguientes observaciones respecto al programa actual:[8]

1. El concepto de Ecuación Diferencial nace (a fines del siglo XVII) como una ecuación que relaciona diferenciales, este concepto se mantiene estable hasta que Cauchy (hacia 1821) agrega la derivada. Esta última definición es la que se conserva en la actualidad "desapareciendo" las diferenciales, aunque cuando se exponen los métodos de resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden se usa la primera concepción sin explicitarla (es decir, la derivada ya no es la derivada, sino un cociente entre diferenciales), renaciendo el manejo algebraico del que tanto hemos hablado, pues hace de este método de solución una herramienta "apetecible" desde el punto de vista docente, sin olvidar el auxilio que en dicha labor brinda el Principio de Superposición.
2. La forma de introducir las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden en la obra de Euler y Cauchy es tomando la expresión diferencial pdx + qdy, como la diferencial de una cierta función u= u(x,y), y de aquí a du=0 y finalmente a la solución general u(x,y)=c. En el caso en que no se pueda encontrar la función u(x,y), construyen un factor de integración que convierte en exacta la ecuación diferencial. Después pasan a estudiar los otros tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden (v.g., las lineales, de Bernoulli, las homogéneas, etc.), teniendo siempre en mente que necesitan construir un factor de integración. Esta situación, en general, no se conserva en el curriculum actual. Los principales hechos que propiciaron esto son la aparición y demostración del Teorema Fundamental del Algebra (la primera demostración cierta, la ofreció Gauss a los 22 años en su tesis doctoral) que, en su formulación actual, afirma que todo polinomio de grado n en **C**, tiene exactamente n ceros complejos (iguales o distintos) por lo que **C** es un dominio numérico que proporciona solución a cualquier ecuación algebraica, y el desarrollo de la Teoría de Funciones de Variable Compleja, que permitieron presentar una teoría de "solubilidad" completa para las ecuaciones lineales de orden n, brindando de esta forma, una formidable herramienta docente para modelar múltiples fenómenos prácticos.
3. Respecto del programa de estudio actual, existe una clara permanencia del escenario algebraico sobre los otros dos escenarios, el cual se debe, además de la contundencia de la componente histórica y a lo señalado antes, a otros factores de los cuales señalaremos los siguientes:

[8] Mayor información sobre este predominio, sus alcances y repercusiones puede ser encontrada en (Nápoles & Negrón, 2002, 2003, Nápoles, 2005b).

a) Los procedimientos algorítmico-algebraicos (directamente vinculados con la comprensión instrumental de las edo y sus múltiples aplicaciones) son más sencillos de desarrollar en los estudiantes. Muy vinculado con las tendencias cognitivas y conductistas de la Educación Matemática que, poco a poco, y en mayor medida gracias al rechazo de las "Matemáticas Modernas", ha ido desapareciendo y dando lugar al "Problem Solving", con una concepción didáctica y epistémica totalmente diferente.

b) Instrumentar los escenarios geométrico y numérico en el aula, requiere necesariamente de los medios de cómputo, ya que de otra forma es difícil visualizar, v.g., los campos de pendientes y las curvas isóclinas, por un lado, y las soluciones aproximadas por el otro.

c) Con la incorporación de la trasformada de Laplace, hacia la segunda mitad de éste siglo, los procedimientos algebraicos vuelven a cobrar un nuevo impulso en la enseñanza. Este recibió soporte adicional con la nueva ola de las Matemáticas Modernas, y el *"¡Abajo Euclides!"* ya conocido.

Como conclusión, podemos recomendar que en los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias, debemos implementar el trabajo no solo instrumental sino también de comprensión conceptual, para ello hay que crear un nuevo paradigma de enseñanza que enfatice el modelado del aprendizaje, el análisis de la ecuación diferencial, el análisis del comportamiento cualitativo de la solución, el uso de herramientas de software con facilidades gráficas, y finalmente poder pasar de "hablar cómo" a "hablar sobre". Eso indudablemente redundará en un aprendizaje significativo de nuestros estudiantes (Bibi, Zamri, Abedalaziz, & Ahmad, 2017).

Aun cuando sea una afirmación en sentido general, la inclusión de problemas de este tipo en el plan de estudios es beneficiosa, ya que esto obligará a los estudiantes a moverse lejos de un enfoque puramente de manipulación instrumental a un enfoque más en la comprensión conceptual (Davis, 1994).

REFERENCIAS

Arslan, S. (2010). Do students really understand what an ordinary differential equation is?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41, 873-888. Bibi, A., Zamri S. N. S., Abedalaziz, N. A. M., & Ahmad, M. (2017). Teaching and Learning of Differential Equation: A Critical Review to Explore Potential Area for Reform Movement, *International J. for Innovative Reserach in Multidisciplinary field*, 3(6), 225-235. Coddington, E. A. & Levinson, N. (1955). *Theory of differential equations*. New York: McGraw-Hill.

Davis, P. (1994). Asking Good Questions about Differential Equations, *The College Mathematics Journal*, *25*(5), 394-400.

Díaz, G. J. & Batanero, M. C. (1994). Significado Institucional Y Personal De Los Objetos Matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*. *14*(3), 325-355.

Farfán, R. M. & Hitt F. (s/f). *Heurística*. México: Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Guerrero Ortiz, C., Mejía Velasco, H., & Camacho-Machín, M. (2015). Interpretación de fenómenos de crecimiento. Sus representaciones y el uso de herramientas digitales, En *Memorias del XIV CIAEM-IACME*, Chiapas, México.

Hall, W., Keene, K., & Fortune, N. (2016). Measuring student conceptual understanding: The case of Euler's method, En Memorias del 19th Annual Conference on the Research in Undergraduate Mathematics Education, 837-842.

Halmos, P. (1980). The heart of the mathematics. *American Mathematical Montlhy*, 87, 519-524. Jourdain, P.E.B. (1976). La Naturaleza de la Matemática. En James R. Newman (comp.). *Sigma. El Mundo de la Matemática*, Barcelona-Buenos Aires-México: Ediciones Grijalbo, tomo 1, 343-408.

Nápoles, J. E. (1997a). Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales. En: *Memorias COMAT'97*. Cuba: Universidad de Matanzas.

Nápoles, J. E. (1997b). *Consideraciones sobre el uso de recursos históricos en algunos problemas de Educación Matemática*, Ponencia presentada a RELME-11, México: Morelia. Nápoles, J. E. (1998). El papel de la historia en la educación matemática. *Memorias del 3er Congreso "Enseñanza de la matemática en el educación superior"*. Cuba: Universidad de la Habana.

Nápoles, J. E. (1999). La resolución de problemas en la escuela. Estrategias no Convencionales. *Memorias del Congreso Argentino de Educación Matemática*. Chaco: Resistencia.

Nápoles, J. E. (2000a). Enfoques de la Ingeniería Didáctica. En: *Memorias II Simposio de Educación Matemática*. Pcia Buenos Aires: Chivilcoy, Mayo 2-5.

Nápoles, J. E. (2000b). *La resolución de problemas en la escuela. Reflexiones preliminares*. Material Docente GIEMat (UTN-FRR). Chaco: Resistencia.

Nápoles, J. E. (2005a). *Aventuras, Venturas y Desventuras de la Resolución de Problemas en la Escuela*, 102p. Manuscrito Preliminar (editado como material del panel PNL-1 "Resolución de Problemas" desarrollado en el XIII EMCI Nacional y V Internacional, Facultad de Ingeniería, UNaM (Oberá), 10-13 de octubre de 2006, ISBN-10: 950-766-050-X, ISBN-13: 978-950-766-050-4). Editado por la Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional y disponible en el sitio http://www.edutecne.utn.edu.ar/napoles-valdes/resolucion-problemas.html).

Nápoles, J. E. (2005b). Tiempos modernos. Algunas (re)flexiones a la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Boletín de Investigaciones*, 3, 44-69 (http://www. ucp.edu.ar/BoletinN3-2005.pdf).

Nápoles, J. E. & M. Cruz (2000). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. *Revista Función Continua*, Universidad Nacional de San Martín. Provincia de Buenos Aires, 8, 21-42.

Nápoles, J. E. & Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto. *Xixim, Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática*. Universidad Autónoma de Querétaro, *3*(2), pp.33-57.

Nápoles, J. E. & Negrón, C. (2003). El papel de la Historia en la Integración de los Marcos Geométrico, Algebraico y Numérico en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, *Revista Virtual Matemática Educación e Internet*, 4(1).

Rowland, D. R. & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503-516.

Tournès, D. 2018. A graphical approach to Euler's method. En Évelyne Barbin (ed.). *Let History into the Mathematics Classroom*, Springer, pp.87-100.