ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss4id5094

Análisis Epistémico y Cognitivo de Tareas de Proporcionalidad desde la Perspectiva de los Niveles de Algebrización

María Burgos[a]
Juan D. Godino[a]
Mauro Rivas[b]

[a] Universidad de Granada (UGR). Facultad de Educación. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada, Andalucía, España.
[b] Universidad de Los Andes (ULA). Facultad de Humanidades y Educación. Departamento de Medición y Evaluación, Mérida, Mérida, Venezuela.

Recibido para su publicación el 11 de mzo. de 2019. Aceptado, después de la revisión, el 15 de abr. de 2019.
Editor asignado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

RESUMEN

En este artículo se presentan los resultados de la fase de evaluación de una intervención formativa con futuros maestros de Educación Primaria sobre el tema de proporcionalidad. Se centra la atención en el desarrollo de la competencia de análisis epistémico y cognitivo de las prácticas matemáticas en la resolución de problemas. Los futuros maestros resuelven primero una tarea matemática de proporcionalidad inversa de varias maneras, luego identifican las prácticas matemáticas empleadas en las resoluciones, los objetos y significados involucrados, las dificultades implicadas, los niveles de algebrización puestos en juego, y finalmente, realizan el análisis de dos soluciones propuestas por alumnos de primaria a un problema de proporcionalidad directa. Los resultados indican que los conocimientos sobre proporcionalidad de los futuros profesores presentan deficiencias que pueden dificultar la enseñanza del tema. Asimismo, se concluye que el desarrollo de los conocimientos y competencias profesionales pretendidos requiera aplicar intervenciones formativas de mayor duración.

Palabras claves: Proporcionalidad, formación de profesores, enfoque ontosemiótico, niveles de algebrización, análisis epistémico y cognitivo.

Epistemic and Cognitive Analysis of Proportionality Tasks from the Algebraization Levels Perspective

ABSTRACT

In this article we present the results of the evaluation phase of a training intervention with primary education prospective teachers on the subject of proportionality. The focus is on developing the epistemic and cognitive analysis competence of mathematical practices in problem solving. The prospective teachers first solve a mathematical task of inverse proportionality in several ways,

Autor correspondiente: Mauro Rivas. E-mail: rmauro@ula.ve

then identify the mathematical practices employed in the resolutions, the objects and meanings, the difficulties, the levels of algebrization involved, and finally, perform the analysis of two solutions proposed by school pupils to a problem of direct proportionality. The results indicate that the future teachers' knowledge about proportionality present deficiencies that can hinder the teaching of the subject. Likewise, it is concluded that developing the required professional knowledge and skills requires the application of longer training interventions.

Keywords: Proportionality, teacher training, onto-semiotic approach, algebraization levels, epistemic and cognitive analysis.

Análise Epistêmica e Cognitiva de Tarefas de Proporcionalidade na Perspectiva dos Níveis de Algebrização

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados da fase de avaliação de uma intervenção de formação com futuros professores do ensino primário sobre a questão da proporcionalidade. A atenção está centrada no desenvolvimento da competência na análise epistémica e cognitiva das práticas matemáticas na resolução de problemas. Futuros professores primeiro resolver uma tarefa matemática de proporcionalidade inversa de várias maneiras, em seguida, identificar as práticas matemáticas utilizadas nas resoluções, os objetos e significados envolvidos, as dificuldades envolvidas, os níveis de algebrização em jogo e, finalmente, realizar a análise de duas soluções propostas pelos alunos da escola primária para um problema de proporcionalidade direta. Os resultados indicam que o conhecimento sobre a proporcionalidade dos futuros professores apresenta deficiências que podem dificultar o ensino da disciplina. Da mesma forma, conclui-se que o desenvolvimento do conhecimento e das competências profissionais requer a aplicação de intervenções de formação mais duradouras.

Palavras-chave: Proporcionalidade, formação de professores, abordagem ontossemiótica, níveis de algebrização, análise epistêmica e cognitiva.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del conocimiento y de las competencias matemáticas de los alumnos, se encuentra asociada a la formación didáctica-matemática de sus profesores. En tal sentido, se observa, en el ámbito de la investigación en educación matemática, una manifiesta preocupación por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que precisa el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera pertinente (Chapman, 2014; Hill & Ball, 2009; Sowder, 2007).

Desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007) se considera que la actividad de análisis epistémico y cognitivo, así como el reconocimiento de niveles de algebrización en tareas de resolución de problemas matemáticos, constituyen vías para el desarrollo de ese conocimiento (Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone & Godino, 2018; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Rivas, Godino y Castro, 2012).

En relación con el estudio de la proporcionalidad en el ámbito de la formación de profesores, existe un creciente desarrollo de investigaciones centradas en el estudio del conocimiento matemático *per se* y el necesario para enseñar la proporcionalidad (Izsák

& Jacobson, 2013; Sowder et al, 1998). Como muestran diversas investigaciones, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Berk, Taber, Gorowara & Poetzl, 2009; Buforn, Llinares y Fernández, 2018; Rivas, Godino y Castro, 2012). Las dificultades que presentan los profesores tanto en la etapa de primaria como de secundaria con los conceptos de razón y proporción, motivan el uso de procedimientos rutinarios como la regla de tres para enseñar a resolver las situaciones proporcionales.

En este orden de ideas, desde la perspectiva del EOS antes referida, se han desarrollado acciones formativas dirigidas a analizar los conocimientos iniciales y evaluar el grado de desarrollo de la competencia de análisis epistémico y de significados sobre tareas de proporcionalidad (Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Burgos et al., 2018). En general, los resultados de estas investigaciones muestran que los futuros profesores presentan carencias del conocimiento didáctico-matemático que dejaban ver una concepción deficiente y sesgada de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental en tareas de proporcionalidad. En particular, el reconocimiento de las prácticas, objetos y procesos por parte de los futuros profesores mostraba la necesidad de profundizar en el diseño y experimentación de nuevas intervenciones formativas.

En este orden de ideas, el problema de investigación es diseñar, implementar y evaluar acciones formativas con futuros maestros de educación primaria dirigidas a:

– desarrollar conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico;

– fomentar la competencia de análisis epistémico-cognitivo de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas en tareas de proporcionalidad.

Como se ha referido antes, en este artículo se informa sobre los resultados de la evaluación de una acción formativa específica en esa dirección. En tal sentido, se plantea la siguiente interrogante de investigación: ¿Qué aspectos del conocimiento y competencias didáctico-matemático, sobre proporcionalidad y razonamiento algebraico elemental, pueden ser observados/desarrollados por medio de una acción formativa que incluye el uso de herramientas de análisis propuestas por el enfoque ontosemiótico?

En este trabajo se centra la atención en evaluar el conocimiento avanzado y especializado, así como la competencia en análisis epistémico-cognitivo lograda por futuros maestros, cuando las tareas propuestas involucran la noción de proporcionalidad e implican el uso de diferentes niveles de algebrización.

El trabajo está organizado en los siguientes apartados. En el segundo apartado se introducen los elementos teóricos del enfoque ontosemiótico. En el tercer apartado se describe el método empleado, incluye el contexto, los participantes y el instrumento de recogida y análisis de datos. Los resultados del análisis de las tareas se presentan en el cuarto apartado. En el quinto apartado se discuten los resultados obtenidos identificando el nivel de competencia de análisis epistémico y cognitivo de los futuros maestros.

REFERENCIAL TEÓRICO

El marco teórico que utilizamos en este trabajo es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, Batanero & Font, 2007). A continuación detallamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos (CCDM) y el modelo de niveles de algebrización desarrollados desde el EOS y que constituyen las herramientas teóricas con las que se abordará el problema de investigación.

Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos

El modelo CCDM de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas propuesto en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), desarrolla el modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos descrito en Godino (2009). En el CCDM se articulan las categorías de conocimientos y competencias didácticas del profesor de matemáticas, a través de las facetas y componentes de un proceso de estudio matemático definidas en el EOS.

De acuerdo con el modelo CCDM, el profesor, además de tener un *conocimiento matemático común*, correspondiente al nivel educativo donde imparte su docencia, y un *conocimiento matemático ampliado del contenido*, que le permita articularlo con la etapa superior, debería tener un *conocimiento especializado del contenido.* Este conocimiento especializado de las distintas facetas implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (faceta epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, instruccional y mediacional). Por otro lado, el profesor debe ser competente para determinar las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que determinan los significados pretendidos de los contenidos (configuraciones epistémicas) así como las configuraciones que ponen en juego los alumnos en la resolución de los problemas (configuraciones cognitivas) (Godino, Giacomone, et al., 2017).

Niveles de Algebrización

En Godino et al. (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria donde se establecen criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (Nivel 0 de Algebrización) y distinguirla de progresivos niveles de algebrización. Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en:

1. Tipo de objetos: *conceptos* (entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición), p*roposiciones* (propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos) p*rocedimientos* (técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos), a*rgumentos* (enunciados requeridos para justificar las proposiciones o explicar los procedimientos).

2. Tipo de representaciones usadas (lenguajes en sus diversos registros).

3. Procesos de generalización implicados

4. Cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente.

Asociados a los niveles de algebrización, Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) consideran tres *significados pragmáticos* específicos de la proporcionalidad que se activan en la solución de tareas que involucran la proporcionalidad de magnitudes: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional. El significado aritmético (Nivel 0 de Algebrización) se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). En la práctica intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; no intervienen objetos y procesos algebraicos. El significado Proto-algebraico está centrado en la noción de proporción, de manera que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones se pueden calificar de Proto-algebraicas de Nivel 1. Por otro lado, la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación; la actividad de algebrización que se realiza en este caso es Proto-algebraica de Nivel 2, puesto que la incógnita se encuentra en un único miembro de la ecuación que se establece ($Ax = B$).

El reconocimiento, por parte de los profesores, de los distintos niveles de algebrización en la solución de tareas matemáticas, en particular, en aquellas situaciones que ponen en juego la noción de proporcionalidad, se considera un aspecto clave del CCDM sobre este contenido (Burgos et al., 2018; Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017), en tanto el reconocimiento de objetos y procesos propios del razonamiento algebraico elemental permite identificar progresivos estadios de razonamiento proporcional.

METODOLOGÍA

Enfoque Metodológico

Teniendo en cuenta el problema de investigación, el marco metodológico será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Esta interpretación, amplía su concepción tradicional (Artigue, 1989) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003), distinguiendo cuatro fases en la investigación: estudio preliminar (en sus distintas facetas epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional), diseño del experimento (selección de tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas atendiendo a los comportamientos esperados de los alumnos), implementación (observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados), evaluación o (análisis retrospectivo derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación).

Contexto de la Investigación y Participantes

La experiencia formativa se ha realizado con un grupo de 35 futuros profesores de tercer curso (último) de los estudios del Grado de Educación Primaria, en dos sesiones. En la primera sesión se llevó a cabo un taller de 2 horas de duración, en el que se presentaron las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, haciendo uso de tareas de proporcionalidad.

En la siguiente sesión (2 horas de duración) se propuso a los futuros maestros dos tareas de proporcionalidad (una centrada en el concepto de reparto y razón y la otra de proporcionalidad inversa) de manera que, trabajando en equipos, ellos debían: (a) resolver las tareas de varias maneras, incluyendo las estrategias que podrían ser utilizadas por alumnos de primaria para resolver el problema, (b) identificar los conocimientos puestos en juego en las diversas soluciones, enumerando la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema, (c) discutir las distintas estrategias empleadas para resolver el problema, planteando las dificultades que pueden presentarse en la resolución del problema usando cada estrategia, y (d) asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas estrategias, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

Como trabajo opcional complementario, para incrementar la calificación final del curso, se propuso la tarea que aparece descrita en la siguiente sección y cuyos resultados analizamos en este artículo.

Los resultados de la presente investigación sólo se refieren a lo obtenido por medio del trabajo opcional implementado, que fue realizado por 12 futuros profesores de manera individual, tras la finalización del curso, revelando aspectos relevantes de los aprendizajes logrados por ellos.

Instrumento de Recogida de Datos

En primer lugar interesa identificar si los futuros maestros distinguen y resuelven correctamente situaciones de proporcionalidad inversa, lo cual constituye un aspecto del conocimiento ampliado del contenido, dado que la proporcionalidad inversa no se incluye en educación primaria. En segundo lugar, se pretende evaluar aspectos del conocimiento didáctico-matemático en las facetas epistémica y cognitiva, a saber:

– la flexibilidad para resolver un problema usando diversas estrategias de resolución (faceta epistémica);

– identificar niveles de razonamiento algebraico (faceta epistémica);

– reconocer las dificultades que pueden encontrar los alumnos (faceta cognitiva);

– analizar respuestas dadas por alumnos de primaria (faceta cognitiva).

A continuación se presentan las consignas entregadas a los estudiantes en el trabajo opcional:

1. Resuelve la tarea matemática que aparece a continuación de varias maneras. Usa todas las estrategias que conozcas, incluyendo las estrategias que piensas que usarían tus alumnos de primaria para resolver el problema.

Es la fiesta de graduación en el Instituto Las Gaviotas. 7 estudiantes han sido escogidos para diseñar y decorar el salón de actos. Los 7 necesitarían trabajar 21 horas para dejar el salón a punto para la celebración. Desafortunadamente, antes de que ellos pudieran empezar con la tarea, 4 chicos se han puesto enfermos con varicela y se tienen que quedar en casa. ¿Cuántas horas les llevará a los estudiantes que quedan disponibles, diseñar y decorar el salón? Describe y explica la estrategia que has usado para dar tu respuesta.

2. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

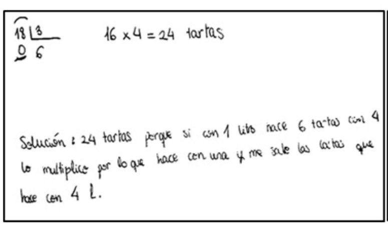
Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

3. Detalla qué dificultades puedes observar en la resolución del problema usando cada estrategia (para ello observa las prácticas, objetos y procesos identificados potencialmente conflictivos para los alumnos).

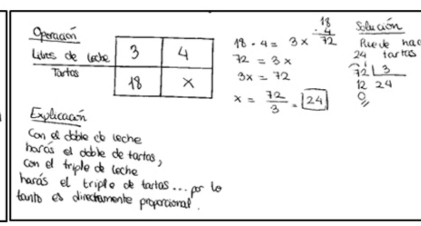
4. Asigna niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a la tarea, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. A continuación, aparecen las soluciones dadas por dos niños al siguiente problema:

Un pastelero usa 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. ¿Cuántas tartas puede hacer con 4 litros de leche? Explica cómo lo has averiguado.



Alumno1



Alumno 2

a) ¿Crees que son correctas las respuestas (resolución y argumentación) dada por los estudiantes?

b) ¿Qué nivel de algebrización asignas a las distintas respuestas? Justifica tu respuesta.

c) Identifica en las soluciones dadas por los estudiantes las distintas prácticas elementales (pasos dados en la resolución del problema) involucradas.

Los datos tratados en este artículo, recogidos por medio de las consignas referidas, provienen de una actividad común y opcional de evaluación de maestros en formación inicial, por lo cual no ha sido requerida la aprobación del Comité de Ética para su recogida y análisis.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Estrategias de Resolución Según Niveles de Algebrización

Todos los estudiantes resolvieron la tarea, diez de ellos al menos de dos formas distintas. A continuación describimos qué estrategias de resolución muestran los estudiantes, clasificadas según sus niveles de algebrización:

– *Nivel 0:* Aritmética. Un ejemplo del uso de esta estrategia lo muestra el estudiante E6, el cual se presenta en la Figura 1. E6 opera sobre números particulares, en un lenguaje natural y numérico. No intervienen objetos y procesos algebraicos.

21 horas × 7 estudiantes = 147 horas en total.

7 estudiantes – 4 estudiantes enfermos = 3 estudiantes quedan.

21 horas × 4 estudiantes = 84 horas.

147 horas totales – 84 horas de los 4 estudiantes = 63 horas deben realizar entre los 3 estudiantes.

84 horas de los 4 estudiantes enfermos: 3 estudiantes que quedan = 28 horas cada uno de los 3 estudiantes.

28 horas de cada uno de los tres estudiantes + 21 que tenían inicialmente = 49 horas deberá realizar cada uno de los tres estudiantes.

Figura 1. Respuesta de Nivel 0 de Algebrización (Aritmética), dada por E6.

– *Nivel 1:* Reducción a la unidad. Los alumnos que utilizaron esta estrategia emplearon el registro tabular. Un ejemplo del uso de esta estrategia puede verse en la Figura 2.

El reconocimiento del valor unitario (número de horas que emplearía una única persona) implicado en el procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas-tabulares en la resolución, se califican como Proto-algebraicas de Nivel 1. Se observa que el estudiante E11 (Figura 2) reconoce propiedades de la relación de proporcionalidad inversa representadas también a través del registro tabular (si las cantidades de una magnitud se multiplican por un número, las cantidades correspondientes de la otra se dividen por el mismo número).

Hay que empezar sabiendo que menos gente implica más tiempo. Para poder llegar a la solución primero averiguamos qué tiempo tardaría una persona, teniendo en cuenta que cuando reduces del 7 a la unidad divides entre 7, y las horas se multiplican por 7, al ser inversamente proporcional.

Personas	*Horas*
7	*21*
7/7=1	*21x7=147*

Cómo ya tenemos la unidad, lo pasamos a 3 personas, y teniendo en cuenta que al multiplicar ahora en las personas, tenemos que dividir en las horas, al ser inversamente proporcional:

Personas	*Horas*
7	*21*
7/7=1	*21x7=147*
1x3=3	*147/3=49*

Figura 2. Respuesta Proto-algebraica de Nivel 1 de Algebrización dada por E11.

– *Nivel 2:* Regla de tres/Ecuación proporcional. La solución del problema por medio de la regla de tres, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación en la que la incógnita se encuentra en un único miembro de ésta. En tal sentido, la actividad desarrollada se considera Proto-algebraica de Nivel 2. Un ejemplo del uso de esta estrategia la presenta el estudiante E2, la cual puede verse en la Figura 3.

Planteamos una regla de tres que se resolverá de manera inversa, ya que sabemos que cuantos menos niños haya más horas van a tardar.

$$\left.\begin{array}{l} 7 \rightarrow 21 \\ 3 \rightarrow x \end{array}\right\} 3x = 21 \cdot 7; x = \frac{147}{3}; x = 49$$

Figura 3. Respuesta Proto-algebraica de Nivel 2 de Algebrización, dada por E2.

En la Tabla 1 se presentan las frecuencias de respuestas correctas e incorrectas agrupadas de acuerdo con los niveles de algebrización antes ejemplificados.

De los 12 estudiantes, siete plantearon soluciones siempre incorrectas y dos ofrecieron una solución correcta y otra incorrecta al problema. La estrategia más utilizada fue la de regla de tres, seguida de la de tipo aritmética, siendo en ambos casos el número de respuestas incorrectas considerablemente mayor al de respuestas acertadas.

Tabla 1
Frecuencias de las respuestas según nivel de algebrización y grado de corrección.

Nivel de algebrización	Correcta	Incorrecta	Total según nivel
Nivel 0	2	7	9
Nivel 1	3	1	4
Nivel 2	4	7	11
Total (*N* = 12)	9	15	24

Se observa, en los trabajos de los estudiantes, que las respuestas erróneas se deben fundamentalmente a dos factores:

1. *Considerar que la relación es de proporcionalidad directa*. De los siete estudiantes que resolvieron de forma incorrecta, cinco lo hicieron porque asumieron que el número de niños y el número de horas de trabajo eran magnitudes directamente proporcionales. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de esta respuesta, dada por el estudiante E4.

$$\left.\begin{array}{l} 7\ students \rightarrow 21\ hours \\ 3\ students \rightarrow x\ hours \end{array}\right\} x = \frac{3 \cdot 21}{7}\ x=9$$ *horas cada niño*

9 horas×3niños=27 horas en total.

Figura 4. Solución incorrecta al problema por medio de regla de tres asumiendo relación de proporcionalidad directa. Respuesta dada por E4.

2. *Interpretar que 21 horas es el total de horas precisas para diseñar y decorar el salón*. De los siete estudiantes que resolvieron de forma incorrecta el problema, uno cometió este error (estudiante E12). Esta respuesta se presenta en la Figura 5. Pero además, este error fue presentado por dos estudiantes que habían ofrecido otras soluciones correctas. En total tres estudiantes cometieron este error.

SOLUCIÓN 3 (proporcionalidad inversa, regla de 3)

1. *Los 7 alumnos necesitarían trabajar 21 horas para dejar el salón a punto para la celebración.*

2. *Si dividimos las horas totales entre los alumnos que hay inicialmente, sabemos que cada alumno trabajaría 3 h (21/7 = 3 horas).*

3. *A continuación, ante la enfermedad de 4 de ellos, tenemos que descubrir cuántos alumnos van a poder diseñar y decorar el salón de actos: 7-4 = 3 estudiantes.*

4. *En una proporcionalidad inversa. A menor número de estudiantes, mayor el número de horas que deben trabajar.*

Alumnos que realizan el diseño	*Horas a trabajar por alumno*
7	3
3	X

7/3=x/3

5. *Tenemos que tener en cuenta la proporcionalidad inversa. Por tanto, x = (7x3)/3 =7.*

6. *Por tanto los 3 estudiantes que quedan dedicarán 7 horas cada uno para conseguir acabar el decorado a tiempo.*

Figura 5. Solución incorrecta al problema asumiendo 21 horas como precisas. Respuesta de E12.

Asignación de Niveles de Algebrización

La asignación de los niveles de algebrización no supuso gran dificultad. La mayoría de los estudiantes lo hicieron de forma correcta salvo los dos casos siguientes: (a) el estudiante E10 asignó el Nivel 0 de Algebrización a una solución Proto-algebraica de Nivel 1 (ver Figura 6), y (b) dos estudiantes asignaron el Nivel 1 a una solución Proto-algebraica de Nivel 2 (ver Figura 7). Seis estudiantes justificaron su decisión y lo hicieron con base en el grado de generalidad de los objetos intervinientes: números particulares, clases de números cuando recurren a fracciones o múltiplos de números, y la presencia de incógnitas; el significado operacional ("operación igual a respuesta") o relacional (en ecuaciones) del signo igual y el tipo de operaciones efectuadas.

Para esta resolución, el nivel de razonamiento algebraico es 0, ya que se realizan operaciones únicamente con números particulares

Figura 6. Nivel 0 de Algebrización asignado por el estudiante E10 a una solución por reducción a la unidad.

En la Figura 6 se observa que el estudiante E10 no reconoce el mayor grado de generalidad que supone deducir el valor unitario que permite obtener el número de horas, *x*, en función del número de estudiantes, *y*, o recíprocamente, según $x \cdot y = 21 \cdot 7 = 141$.

Para resolver el ejercicio con ese método, el nivel de razonamiento algebraico es 1, ya que utiliza números particulares para hacer una regla de 3 en la que aparece una incógnita
Figura 7. Nivel de algebrización 1 asignado por el estudiante E10 a una solución por regla de tres.

En la Figura 7 se observa que el mismo estudiante (E10) no considera que se opere con la incógnita sino con los números particulares (coeficientes en la ecuación) lo que le lleva a determinar que el Nivel de Algebrización es 1 en lugar de 2.

Configuraciones Ontosemióticas

Todos los estudiantes realizaron las configuraciones ontosemióticas correspondientes a las estrategias utilizadas y en general no tuvieron dificultades para completar la secuenciación de las prácticas elementales implicadas. Para la valoración de las configuraciones ontosemióticas elaboradas por los estudiantes se hizo uso de los criterios presentados en la Tabla 2.

Cuatro estudiantes (la tercera parte) realizaron configuraciones nada pertinentes, dado que sólo mostraron la secuenciación de prácticas sin identificar los objetos (únicamenteú hicieron referencia a la no presencia de objetos y procesos algebraicos en las soluciones de tipo aritmético). Sólo un estudiante mostró configuraciones pertinentes. Los demás estudiantes (siete) elaboraron configuraciones poco pertinentes: los objetos no se corresponden con las prácticas elementales referidas o son incorrectos.

Tabla 2
Criterios para la valoración de las configuraciones ontosemióticas identificadas por los futuros maestros.

Valoración	Criterio
Pertinente	- Comprende la secuencia de prácticas elementales y para cada unidad de éstas se refieren correctamente los objetos y procesos involucrados
Poco pertinente	- Comprende la secuencia de prácticas elementales pero no aparecen referidos todos los objetos involucrados o bien algunos de ellos no son correctos
Nada pertinente	- La secuencia de prácticas elementales no es correcta y/o no aparecen los objetos referidos en las unidades elementales de análisis

En la Figura 8 se muestra un ejemplo de una configuración ontosemiótica poco pertinente, elaborada por el estudiante E2, y en la Figura 9 una configuración pertinente, elaborada por el estudiante E7.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
Se realiza un tabla donde en una columna se ponen los niños y en la otra las horas que tardan.	*Concepto: relación, tabla.* *Proposición: realización de una tabla.*
A continuación se reduce a la unidad los 7 niños y se multiplican las 21 horas por 7. *Da como resultado que 1 niño tardaría 147 horas.*	*Concepto: relación, unidad.* *Proposición: la razón es inversa.* *Argumento: se cumple que a menos niños se tardan más horas.*

Finalmente se multiplica y divide por 3 y se llega a la solución que es: 3 niños tardan 49 horas.	*Concepto: relación, unidad.* *Proposición: la razón es inversa.* *Argumento: se cumple que a menos niños se tardan más horas.*

Figura 8. Ejemplo de configuración ontosemiótica poco pertinente, dada por E2.

Las configuraciones ontosemióticas permiten detectar conflictos de tipo conceptual o argumental en las respuestas de los estudiantes. Uno de los conceptos que incluyen de forma más frecuente es el de *reparto,* puesto que entienden que las horas dedicadas a decorar el salón se han de distribuir de forma equitativa entre los alumnos.

Los estudiantes muestran conflicto con el término razón. Como puede verse en la Figura 8, el estudiante E2 da como proposición: "la razón es inversa", posiblemente refiriéndose a que la relación entre las magnitudes: "niños que decoran el salón" y "número de horas necesarias"; es de proporcionalidad inversa.

En la Figura 9, el uso que hace el estudiante E7 del término razón, asociado al de proporción, se refiere al producto de cantidades que se corresponden de magnitudes (horas y estudiantes) inversamente proporcionales. Asimismo, los argumentos empleados para justificar la relación de proporcionalidad inversa son sólo parcialmente correctos, haciendo referencia, como se ve en la Figura 9, que: "*se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad indirecta: a más alumnos menos horas o al revés"*.

En general, los estudiantes no reconocen de forma correcta otros procedimientos diferentes a los de tipo aritmético. Es significativo que varios estudiantes atribuyan a la frase: "algoritmo de la ecuación", el significado correspondiente al procedimiento que siguen al despejar la incógnita en la ecuación asociada a la regla de tres inversa.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
1. Se supone una correspondencia de proporcionalidad indirecta entre dos magnitudes: "horas" y "estudiantes"	*Conceptos: proporcionalidad indirecta, magnitudes* *Proposición: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad indirecta* *Argumento: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad indirecta: a más alumnos menos horas o al revés*
2. Por tanto, la razón de horas que se corresponden se mantiene constante *21 horas ×7 estudiantes=x horas×3 estudiantes*	*Conceptos: razón de horas; proporción, incógnita* *Proposición: las razones son iguales* *Argumento: las horas por el número de personas es constante*
3. Teniendo en cuenta la regla para la proporcionalidad indirecta ser haría de la siguiente manera x=(21×7)/3=49 horas	*Procedimiento: despeje de la incógnita* *Argumento: propiedades aritméticas*

4. Es decir, 3 estudiantes sanos tardarán 49 horas en terminar el trabajo	*Proposición: El tiempo es de 49 horas, muchas más que con más personas* *Argumento: secuencia de prácticas 1) a 4)*

Figura 9. Ejemplo de configuración ontosemiótica pertinente dada por E7.

Además muestran dificultades con el objeto proposición; puede verse en la Figura 8, que el estudiante se refiere a: "realización de una tabla" como una proposición. Asimismo, con el objeto argumento que frecuentemente utilizan como intencionalidad de la práctica realizada. Así, se reconoce de forma frecuente expresiones del tipo: "conocer el número de horas de los cuatro estudiantes enfermos" o "se suman las horas iniciales de los estudiantes a las extras para conocer las horas totales", como formas de argumento.

Previsión de Dificultades

Conocer las dificultades que los alumnos de primaria pueden presentar, dota a los futuros maestros de criterios para diseñar y gestionar tareas instruccionales que enfaticen determinados conceptos logrando procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva.

Las dificultades señaladas por los futuros profesores, atendiendo a las estrategias descritas son las siguientes:

– *Solución aritmética* (Nivel 0 de Algebrización). En general, los estudiantes afirman que no encuentran dificultad en este tipo de estrategias. Sin embargo, cinco estudiantes que las identifican, señalan posibles errores de tipo aritmético. Por ejemplo E3 considera posible: "error a la hora de escoger el número que tiene que ser dividido"; E8 y E9 señalan: "error a la hora de escoger el número que tiene que ser multiplicado"; errores asociados a una dificultad conceptual relativa a la relación de proporcionalidad inversa.

– *Solución por reducción a la unidad* (Nivel 1 de Algebrización). La dificultad que señalan en este caso está en comprender que, en el caso de la relación de proporcionalidad inversa, se mantiene constante el producto de las cantidades de magnitud que se corresponden. Por ejemplo E7 señala como dificultad: "entender la proporcionalidad inversa sus operaciones como la multiplicación de las horas totales por el número de estudiantes".

– *Solución por regla de tres* (Nivel 2 de Algebrización). En este caso 10 estudiantes consideran posibles dificultades en el trabajo con incógnitas, del tipo: "no saben trabajar con símbolos literales como incógnitas" (E1), "no tienen un significado relacional de igualdad" (E4), o plantear y resolver de forma correcta la regla de tres. Por ejemplo E7 considera posible: "escoger mal el número que tiene que ser multiplicado o dividido" y "despejar mal la incógnita".

Además, aquellos estudiantes que resolvieron correctamente el problema, señalan de forma general, como posible dificultad, considerar la relación de proporcionalidad directa en lugar de inversa. Algunos estudiantes refieren también a "dificultades para comprender el enunciado" (E4), "no comprender los procesos matemáticos en su totalidad sino por medio de estrategias memorísticas" (E7) o de tipo afectivo.

Análisis de las Respuestas de Alumnos de 6º de Primaria

Valoración de la Resolución y Argumentos Dados por los Alumnos de Primaria

Todos los futuros maestros coincidieron en que tanto las soluciones como las argumentaciones dadas por los alumnos de primaria son correctas. Tres de ellos (la cuarta parte) no justificaron su afirmación y los demás (nueve) centraron la atención en el procedimiento seguido o la exactitud del argumento, comparando, en este caso, las respuestas de ambos alumnos. Dos futuros maestros consideraron mejor ("más completa") la explicación ofrecida por el Alumno 2. Sin embargo, cinco calificaron la explicación de este alumno como incompleta. En la Figura 10 se muestra un ejemplo de una respuesta de este tipo, dada por el estudiante E5.

> *Tanto la resolución como la argumentación del alumno 1 son correctas.*
>
> *La resolución del alumno 2 es correcta, realiza una regla de tres estándar (proporcionalidad directa), aunque la argumentación no es la más correcta porque le falta explicar cómo ha resuelto esa regla de tres, aunque si es cierto que es una proporcionalidad directa y que con el doble de leche harás el doble de tartas y así sucesivamente. Le faltaría explicar por qué realiza la ecuación de esa manera.*

Figura 10. Valoración de la resolución y argumentación de los alumnos de primaria por parte de E5.

Los futuros maestros consideran que los alumnos deben explicar los procedimientos seguidos y argumentar, con base en la relación de proporcionalidad directa, la estrategia seguida (Figura 11). En las Figuras 10 y 11, se observa que E5 y E12, respectivamente, se refieren al argumento del Alumno 2: "con el doble de leche harás el doble de tartas, con el triple de leche harás el triple de tartas…por lo tanto es directamente proporcional", que no deja de ser informal e incompleto para describir la relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes.

> *Respecto al **alumno 1**, durante la resolución del problema no expone lo que va realizando, centrándose solamente en las operaciones que tiene que hacer (división y multiplicación). Al primer dato (6), no le especifica qué es, aunque el segundo sí lo comenta ("24 tartas").*
>
> *En el apartado de solución, explica el procedimiento seguido correctamente (nos habla de la reducción a la unidad a su manera), aunque mal expresado.*
>
> *Respecto al **alumno 2**, podemos observar cómo el problema está más completo, y resuelto de otra forma correctamente. A diferencia del alumno 1, este alumno incluye una explicación en la que refleja verbalmente que el problema corresponde con una proporcionalidad directa, añadiendo unas conclusiones propias (doble de litros, doble de tartas…).*

Figura 11. Valoración de la resolución y argumentación de los alumnos de primaria por parte de E12.

Asignación de Niveles de Algebrización

Desde un punto de vista epistémico experto se reconoce que la respuesta del Alumno 1 sigue el procedimiento de reducción a la unidad: obtiene el número de tartas (6) que puede hacer con 1 litro de leche. Realiza operaciones aritméticas (multiplicación y división) con números particulares (18 tartas, 6 litros de leche, etc.). En el argumento que presenta para justificar su respuesta, el Alumno 1, reconoce, en lenguaje natural y numérico, el criterio para obtener el número tartas a partir del valor unitario: "lo multiplico [el número de litros de leche] por lo [las tartas] que hace con uno". Por ello se considera que la actividad que desarrolla es Proto-algebraica de Nivel 1. Por otro lado, la actividad desarrollada por el Alumno 2 se considera Proto-algebraica de Nivel 2. El procedimiento seguido es una regla de tres que representa de forma diagramática con la tabla:

Litros de leche	3	4
Tartas	18	*X*

donde se recogen las magnitudes directamente proporcionales, los valores conocidos (3, 4, 18) y desconocido (x). El símbolo literal "x" está ligado a la información contextual, número de tartas que se pueden elaborar con los 4 litros de leche, y se resuelve una ecuación de la forma $Ax = B$. En la Tabla 3 se presentan las frecuencias de los valores asignados por los futuros maestros a los niveles de algebrización de las soluciones realizadas por los alumnos de primaria. Hubo uno de ellos que no respondió a este apartado.

Se observa en la Tabla 3 que cinco estudiantes acertaron el nivel de algebrización de la actividad desarrollada por el Alumno 1, y siete lo hicieron con el nivel de algebrización de la solución propuesta por el Alumno 2. Los estudiantes que asignaron Nivel 0 de Algebrización a la respuesta dada por el Alumno 1 y justificaron su respuesta, hicieron referencia a la presencia de operaciones aritméticas con números naturales. Por ejemplo, el estudiante E6 sostiene que el Alumno 1 "resuelve el problema mediante operaciones aritméticas", sin identificar el grado de generalidad en el discurso del Alumno 1 para describir la forma de obtener el número de tartas a partir de los litros de leche.

Tabla 3

Frecuencias en la asignación de los niveles de algebrización por futuros maestros.

	Niveles de algebrización/Frecuencias		
	0	1	2
Solución elaborada por el Alumno 1	6	5	0
Solución elaborada por el Alumno 2	0	4	7

Por otro lado, los cuatro estudiantes que asignaron el Nivel 1 de Algebrización a la solución del Alumno 2, hicieron referencia a la presencia del lenguaje simbólico, sin distinguir grados de transformaciones con incógnitas. Por ejemplo, el estudiante E10, al asignar el Nivel 1, afirma: "ya que como vemos realiza operaciones en la que incluye una incógnita pero sin excesiva dificultad".

Identificación de las Prácticas Elementales

Para valorar las identificaciones de las prácticas elementales, realizadas por los futuros maestros, a las respuestas dadas por los alumnos de primaria, se utilizó el criterio presentado en la Tabla 4.

Tabla 4
Criterios para la valoración de la identificación de las prácticas elementales realizada por los futuros maestros.

Valoración	Criterio
Pertinente	- Establece de forma correcta la secuencia de prácticas y la intencionalidad de cada unidad
Poco pertinente	- Se limita a describir la estrategia seguida en cada solución
Nada pertinente	- En otro caso

Ningún futuro maestro consideró la justificación de los alumnos como práctica elemental, y aún aquellos que realizaron una secuenciación más detallada, sólo consideraron como prácticas las operativas y no las discursivas (argumentación). En las Figuras 12 y 13 se presentan ejemplos de respuestas a este ítem.

El primer alumno ha seguido los siguientes pasos: en primer lugar ha dividido y en segundo lugar ha multiplicado

El segundo alumno ha realizado una regla de tres donde hay una incógnita por resolver

Figura 12. Respuesta nada pertinente dada por E1 al identificar prácticas elementales.

En la Figura 12 se presenta una respuesta nada pertinente, mientras en la Figura 13 una respuesta poco pertinente. De forma general, la respuesta dada a este último ítem fue poco (cinco estudiantes) o nada (siete estudiantes) pertinente.

Alumno 1:

1. Si con 3 litros hace 18 tartas, vamos a conocer cuántas tartas puede hacer con 1 litro: 18: 3= 6 tartas puede hacer con un litro de leche.

2. Si con 1 litro realiza 6 tartas, con 4 litros realiza: 6 x 4 = 24 tartas.

Alumno 2:

1. Establece una proporción: Si con 3 litros hace 18 tartas, con 4 litros hará x. Siendo x el número de tartas que realiza con 4 litros de leche.

3 litros	*4 litros*
18 tartas	*X*

2. La ecuación que se establece es la siguiente: 18tartas • 4litros = 3litros • x

3. Resolución de la ecuación: 72= 3x; x= 72/3= 24 tartas.

Figura 13. Respuesta poco pertinente dada por E6 al identificar prácticas elementales.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado una investigación de tipo cualitativo-interpretativo, cuya finalidad ha sido describir e interpretar los resultados de la implementación de una intervención didáctica con futuros maestros de primaria. Esta actividad estuvo dirigida a fomentar el desarrollo de aspectos relevantes de las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático relativo a la enseñanza de la proporcionalidad. La competencia en análisis ontosemiótico permite al profesor identificar posibles conflictos de aprendizaje y promover la realización de actividades dirigidas al desarrollo del razonamiento proporcional desde la educación primaria.

Las consignas planteadas a los estudiantes pretendían el desarrollo de las facetas epistémico y cognitiva del análisis didáctico. Al respecto:

– Para analizar y evaluar el conocimiento común y avanzado de los futuros maestros y la competencia para resolver un problema utilizando diferentes estrategias, incluyendo las que podrían ser realizadas por alumnos de primaria, se propuso una tarea de proporcionalidad inversa. En este sentido, hemos observado que los estudiantes muestran carencias en el conocimiento *per se* de la proporcionalidad, confundiendo una relación inversa con una directa.

– La identificación de objetos y procesos matemáticos y el reconocimiento de los niveles de algebrización forman parte de la dimensión epistémica del conocimiento especializado. El reconocimiento de los significados de los objetos constituye una actividad compleja. No obstante, hemos constatado que la intervención implementada mejora la competencia de los futuros maestros para: (a) realizar la secuenciación de prácticas en unidades elementales de análisis, (b) progresar en la identificación de los objetos y procesos involucrados en las prácticas, más allá de la aplicación de algoritmos en la resolución de problemas de proporcionalidad, y (c) reconocer de manera pertinente los distintos niveles de algebrización en diferentes estrategias de resolución.

– Analizar los procedimientos y razonamientos que desarrollan alumnos de primaria al resolver una tarea o las dificultades con ciertas estrategias, se relaciona con la faceta cognitiva del conocimiento especializado (conocimiento de los estudiantes). Para los futuros maestros resulta más sencillo realizar la secuenciación cuando ellos son los resolutores que cuando analizan las respuestas de los alumnos. Además, no identifican el objeto argumento como parte de las prácticas. Se considera necesario que los futuros maestros identifiquen las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en las producciones de los alumnos, prestando atención a las argumentaciones.

Una conclusión de la intervención formativa descrita es que el desarrollo de los conocimientos y competencias profesionales pretendidas requiere aplicar intervenciones de mayor duración.

RECONOCIMIENTO

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España) y del proyecto H-1448-13-04-A financiado por el CDCHTA-ULA, Mérida, Venezuela.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

M.B y J.D.G. concibieran la idea presentada. M.B realizó las actividades, y recogió los datos. Todos los autores discutieron los resultados y, a través de reuniones, elaboraron conjuntamente la versión final del manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor correspondiente, M.B., a solicitud razonable.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. & Petzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(3), 113-135.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23,* 229-251. Disponible en: http://comie.org.mx/revista/v2018/rmie/index.php/nrmie/issue/archive.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. & Godino, J.D. (2018). Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22. Disponible en: http://www.educacaoepesquisa.fe.usp.br/.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM. Disponible en: http://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in*

Mathematics Teacher Education (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13- 31. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. Disponible en: https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2014v32n1/edlc_a2014v32n1p199.pdf.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. Disponible en: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014) Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200.

Hill, H., y Ball, D. L. (2009). The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71.

Izsák E. & Jacobson, E. (2013) Understanding teachers' inferences of proportionality between quantities that form a constant difference or constant product. *Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Pre-sess*ion, Denver, CO.

Rivas, M., Godino J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26*(42B), 559-588. Disponible en: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5777.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte: Ed. NCTM and IAP.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simo, M., Sowder, L., & Thomson, A. (1998) Educating teachers to teach multiplicative structure in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(2), 127-155. https://doi.org/10.1023/A:1009980419975.