

Diseño de cuadernillos de auto-instrucción sobre número y operaciones por futuros profesores de Educación Primaria: un estudio preliminar

José Parra^{1a}
 Marjorie Samuel^{1a}
 Danilo Díaz-Levicoy^{1b}

^a Universidad Católica del Maule, Departamento de Formación Inicial Escolar, Talca, Región del Maule, Chile

^b Universidad Católica del Maule, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Talca, Región del Maule, Chile

Recibido para publicación el 25 nov. 2019. Aceptado después de la revisión el 19 feb. 2020.

Editora diseñada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Estudio enmarcado en la línea de formación de profesores. **Objetivo:** Analizar los cuadernillos de auto instrucción que han diseñado e implementado futuros profesores de Educación Primaria para la enseñanza de un tema relacionado con el eje Números y Operaciones. **Diseño:** Se sigue una metodología cualitativa, de nivel exploratorio-descriptivo, utilizando el método de análisis de contenido. **Entorno y participantes:** Muestra formada por 85 futuros profesores que cursaron *Números y Operaciones en Primaria*, del primer semestre de *Pedagogía en Educación General Básica con mención*, de una universidad chilena. **Recopilación y análisis de datos:** Se analizan las actividades y conclusiones de los cuadernillos, considerando las unidades de análisis: objetivo de aprendizaje implementado, obstáculos detectados, tipo de actividades y contextos, valoración del conocimiento pedagógico del contenido y la experiencia en general. **Resultados:** Se evidencia que los futuros profesores, mayoritariamente: diseñan cuadernillos asociados a los dos primeros cursos de primaria; consideran el objetivo asociado a contar hasta 1000; declaran el obstáculo epistemológico; las actividades son del tipo ejercicios; las actividades son planteadas sin contexto; no se mencionan indicadores asociados a los subdominios de conocimiento del contenido y los estudiantes, y del contenido y la enseñanza, del modelo de conocimiento pedagógico de la matemática; valoran este recurso para incentivar el aprendizaje de la matemática. **Conclusiones:** El trabajo con cuadernillos ha permitido que los futuros profesores tengan una primera aproximación a su labor docente, implicando el dominio y la aplicación de conocimientos didácticos y disciplinarios sobre la enseñanza de los números, lo que se irá afianzando durante su formación.

Palabras clave: cuadernillo de auto instrucción; formación de profesores; Educación Primaria.

Design of self-instruction textbooks on number and operations by preservice elementary school teachers: A preliminary Study.

ABSTRACT

Context: Study framed in the area of teacher training. **Objective:** To analyze the self-instruction booklets that elementary education future teachers designed and implemented to teach a subject related to the Numbers and Operations axis. **Design:** The research follows a qualitative, exploratory-descriptive methodology, using the content analysis method. **Setting and participants:** Sample composed of 85 preservice teachers who studied *Numbers and Operations in Elementary School*, attending the first semester of *Pedagogy in Basic General Education with Mention* in a Chilean university. **Data collection and analysis:** The activities and conclusions of the booklets are analyzed, considering the units of analysis: implemented learning objective, detected obstacles, type of activities and contexts, assessment of the pedagogical knowledge of the content and general experience. **Results:** The work emphasizes that future teachers mostly: design booklets associated with the first two years of elementary school; consider the objective associated to counting to 1,000; declare the epistemological obstacle; the activities are exercise-like; activities are posed without context; indicators associated to the subdomains of knowledge of content and of the students, and content and teaching of the pedagogical knowledge model of mathematics are not mentioned; value this resource to encourage mathematics learning. **Conclusions:** The work with booklets has allowed preservice teachers to approach teaching work for the first time, involving mastery and application of both didactic and knowledge of the subject matter for teaching numbers, which will improve during their training.

Keywords: Self-instruction textbooks; Teacher training; Elementary education.

Elaboração de cartilhas de autoinstrução sobre número e operações de futuros professores do ensino fundamental: um estudo preliminar

Contexto: Estudo enquadrado na linha de formação de professores. **Objetivo:** Analisar as cartilhas de autoinstrução que os futuros professores do ensino fundamental projetaram e implementaram para ensinar um tópico relacionado ao eixo Números e Operações. **Modelo:** Segue uma metodologia qualitativa, exploratória-descritiva, utilizando o método de análise de conteúdo. **Ambiente e participantes:** Amostra composta por 85 futuros professores que cursaram *Números e Operações no Fundamental*, no primeiro semestre de *Pedagogia no Ensino Geral Básico com menção*, de uma universidade chilena. **Coleta e análise de dados:** As atividades e conclusões das cartilhas são analisadas, considerando as unidades de análise: objetivo de aprendizagem implementado, obstáculos detectados, tipo de atividades e contextos, avaliação do conhecimento pedagógico do conteúdo e da experiência em geral. **Resultados:** É evidente que os futuros professores, em sua maior parte: elaboram cartilhas associadas aos dois primeiros anos do ensino fundamental; consideram o objetivo associado à contagem até 1.000; declaram o obstáculo epistemológico; as atividades são do tipo exercício; as atividades são propostas sem contexto; não são mencionados indicadores associados aos subdomínios do conhecimento de conteúdo e dos alunos e do conteúdo e do ensino do modelo de conhecimento pedagógico da matemática; valorizam este recurso para incentivar o aprendizado de matemática. **Conclusões:** O trabalho com as cartilhas permitiu que futuros professores se aproximassem pela primeira vez de seu trabalho docente, envolvendo o domínio e a aplicação de conhecimentos didáticos e disciplinares no ensino de números, que serão fortalecidos durante sua formação.

Palavras chave: cartilha de autoinstrução; formação de professores; educação fundamental.

INTRODUCCIÓN

En Chile, en el último tiempo, la formación de los futuros profesores (FP) ha sido objeto de interés investigativo, con énfasis tanto en la política pública como en el conocimiento general y específico que deben poseer (Ávalos, 2014).

La literatura evidencia la existencia de problemáticas respecto de la formación didáctica y disciplinar de los FP (e.g., Sotomayor-Echenique, Coloma-Tirapegui, Parodi-Sweis, Ibáñez-Orellana, Cavada-Hrepich y Gysling-Caselli, 2013), así como de la escasa relación entre la práctica y el conocimiento del profesor (Vaillant, 2007). En el caso chileno, quienes son formados para profesores de Educación Primaria obtienen resultados deficientes en el área de matemática, motivando la modificación de planes de estudio y metodologías de enseñanza (Estrella, Olfos y Mena-Lorca, 2015; Olfos, Zakaryan, Estrella y Morales, 2019).

Desde el punto de vista curricular, luego de la última modificación, la asignatura de matemática para Educación Primaria ha sido declarada prioritaria, otorgando un mínimo de 6 horas semanales para su trabajo académico, y con el propósito de:

(...) enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar (MINEDUC, 2018, p. 214).

Su enseñanza se organiza en cinco ejes temáticos: 1) Números y operaciones; (2) Patrones y álgebra; (3) Geometría; (4) Medición; y (5) Datos y probabilidades (MINEDUC, 2012a). La importancia del primer eje radica en que:

(...) abarca tanto el desarrollo del concepto de número como la destreza en el cálculo mental y el uso de algoritmos. Una vez que los alumnos asimilan y construyen los conceptos básicos, con ayuda de metáforas y representaciones, aprenden los algoritmos de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, incluyendo el sistema posicional de escritura de los números. Se espera que desarrollen las estrategias de cálculo mental, comenzando con ámbitos numéricos pequeños y ampliando estos en los cursos superiores, y que se aproximen a los números racionales (como fracciones, decimales y porcentajes) y sus operaciones. En todos los ejes, y en especial en el de Números, el aprendizaje debe iniciarse haciendo a los alumnos manipular material concreto o didáctico y pasando luego a una representación pictórica que, finalmente, se reemplaza por símbolos (MINEDUC, 2018, p. 128).

De manera conjunta, se han establecido los Estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en Educación Básica (MINEDUC, 2012b), que consideran

los componentes pedagógicos y disciplinarios, como un elemento que define los conocimientos básicos que deben tener los FP al egresar de sus carreras. En concreto, tiene como propósito “orientar a las instituciones formadoras de docentes, mediante el establecimiento de estándares que instruyen sobre lo que se espera que sepa todo profesor al finalizar sus años de formación inicial” (MINEDUC, 2012b, p. 3). Los estándares pedagógicos, son los conocimientos, habilidades y actitudes comunes para todos los profesores independiente de la especialidad de estudio, es decir, el profesor debe poseer conocimientos de sus estudiantes, del currículo de Educación Primaria, así como de los elementos fundamentales del proceso de instrucción (planificación, enseñanza, evaluación y reflexión). Se espera que el FP al egresar demuestre, entre otros, que (MINEDUC, 2012b, p. 17):

- Conoce a los estudiantes de Educación Básica y sabe cómo aprenden;
- Conoce el currículo de Educación Básica y usa sus diversos instrumentos curriculares para analizar y formular propuestas pedagógicas y evaluativas;
- Sabe cómo diseñar e implementar estrategias de enseñanza aprendizaje, adecuadas para los objetivos de aprendizaje y de acuerdo al contexto;
- Está preparado para gestionar la clase y crear un ambiente apropiado para el aprendizaje según contextos;
- Conoce y sabe aplicar métodos de evaluación para observar el progreso de los estudiantes y sabe usar los resultados para retroalimentar el aprendizaje y la práctica pedagógica;
- Está preparado para atender la diversidad y promover la integración en el aula.
- Se comunica oralmente y por escrito de forma efectiva en diversas situaciones asociadas a su quehacer docente;
- Aprende en forma continua y reflexiona sobre su práctica y su inserción en el sistema educacional

Por otro lado, los estándares disciplinares se dividen en cuatro ejes: Números (6 estándares); Geometría (5 estándares); Álgebra (3 estándares); y Datos y Probabilidades (3 estándares); evidenciado así la importancia del eje números y sus contenidos asociados.

Desde una perspectiva internacional, el conocimiento que deben tener los profesores que enseñan matemática, en diferentes niveles educativos, ha sido objeto de investigación y reflexión por diversos autores (e.g., Ball y Bass, 2000; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Godino, 2009; Gómez, 2007; Hill, Rowan y Ball, 2005; Pino-Fan y Godino, 2015; Ponte y Chapman, 2008), motivados por los trabajos de Shulman (1986, 1987), han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento y de la educación, modelos que buscan describir, valorar y guiar los procesos de enseñanza

y aprendizaje, relevando el conocimiento y el uso de este en las distintas situaciones del enseñar. En este sentido, el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008), introduce la noción de conocimiento matemático para la enseñanza, asumiéndola como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y desarrollo en el alumno” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este tipo de conocimiento es el que caracteriza al profesor, de cualquier nivel educativo, que enseña matemática (Carrillo et al., 2013; Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013), permitiendo que los profesores se anticipen a los posibles conflictos de significado que emergen durante la solución de tareas matemáticas por parte del estudiante y así prever la complejidad del proceso de enseñanza.

Además, se ha enfatizado en dos tipos de conocimiento: el de la matemática y el pedagógico de la matemática (Ball, 1990; Ball et al., 2008; Ball et al., 2001; Hill y Ball, 2004). Este último, considera los siguientes subdominios:

Conocimiento del contenido y los estudiantes. Implica el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular” (Hill et al., 2008, p. 375), plasmándose en los siguientes indicadores: 1) Reconoce los errores frecuentes de los estudiantes; 2) Se anticipa a las respuestas de los estudiantes; 3) Reconoce las dificultades de los estudiantes o concepciones erróneas para comprender un contenido o concepto; 4) Selecciona las actividades más apropiadas para construir un conocimiento matemático, en virtud de saber lo que les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador; 5) Identifica las estrategias que utilizan para resolver los problemas.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre la matemática (Ball et al., 2008), permitiendo comprender las decisiones del profesor a la hora de usar estrategias, ejemplos potentes, analogías y recursos didácticos, entre otros (Carrillo et al., 2013). Lo que se concreta en los siguientes indicadores: 1) Demuestra dominio en la elección de representaciones para enseñar un contenido específico y el uso de diferentes métodos y procedimientos para enseñar ese contenido matemático; 2) Secuencia las tareas, eligiendo los ejemplos para comenzar con la actividad y los ejemplos que usan para ayudar a los estudiantes a profundizar en el contenido; 3) Considera en la experiencia, recursos y materiales didácticos apropiados y pertinentes para enseñar una idea o una situación matemática; 4) Planifica las actividades, considerando los distintos contextos de aprendizaje.

Con lo anterior, observamos la relación existente entre los *estándares orientadores* para los FP (MINEDUC, 2012b) y los dominios del *conocimiento pedagógico del contenido* (Ball et al., 2008), donde se establece que los FP, al egresar de sus carreras, busquen las mejores formas para la enseñanza de los contenidos matemáticos, conozcan cómo aprenden los estudiantes y cómo ayudarles a superar las dificultades que se les presentan en su trabajo académico.

Bajo esta premisa, se ha pedido a los FP de Educación Primaria diseñar e implementar un recurso de auto-instrucción (Babakhani, 2011; Montague, 2008; Steedly, Dragoo, Arafeh y Luke, 2008), en concreto, un cuadernillo que permita trabajar algún

contenido considerado en el eje *números y operaciones*. Mediante los cuadernillos de auto-instrucción, los FT deberían ser capaces de incorporar contenidos matemáticos en situaciones que puedan desarrollar los estudiantes de un determinado curso de manera autónoma (Olivares-Escanilla, 2012).

De acuerdo con las consideraciones anteriores, nos planteamos por objetivo *analizar los cuadernillos de auto-instrucción que han diseñado e implementado FP de Educación Primaria para la enseñanza de un tema relacionado con el eje Números y operaciones*.

METODOLOGÍA

Esta investigación sigue una metodología cualitativa (Pérez-Serrano 1994), de nivel exploratorio-descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), utilizando el método de análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011) y se busca analizar los cuadernillos de auto-instrucción creados e implementados por 85 FP que cursaron la asignatura de *Números y Operaciones en Primaria*, correspondiente al primer semestre de la carrera de *Pedagogía en Educación General Básica con mención*, de la Universidad Católica del Maule (Chile). Esta tarea considera, en primer lugar, diseñar un cuadernillo de auto instrucción que detalle: datos de la asignatura, nombre del cuadernillo, descripción del recurso en sus aspectos pedagógicos y didácticos (OA, indicadores de logro, descripción del objeto matemático y progresión de contenidos) y actividades de aprendizaje (de introducción al objeto matemático, reproducción, y ejercitación). En segundo lugar, se exige la aplicación del recurso, en un estudiante del curso asociado al OA seleccionado. Finalmente, el FP deberá elaborar un informe, que detalle los elementos anteriormente descritos, así como las dificultades y obstáculos observados en la implementación, y una conclusión general sobre la tarea.

Este recurso tenía el propósito de ser un instrumento facilitador del aprendizaje autónomo de estudiantes, de algún curso de 1° a 4° de Educación Primaria, específicamente en el eje *Números y operaciones*.

Para esta investigación, a partir del tipo de diseño de la tarea y de las instrucciones entregadas por el profesor de la asignatura, se definen las primeras unidades de análisis, cuyas categorías se establecen a priori:

Objetivo de Aprendizaje (OA). Son los OA establecidos en las *Bases Curriculares* para la Educación Primaria (MINEDUC, 2018) y que “definen los propósitos y los logros del proceso y establecen cuáles serían los desempeños del alumno que permitirán verificar el logro del aprendizaje” (p, 13). Se consideraron los 44 OA propuestos en el eje *Número y Operaciones* para los cuatro primeros cursos de Educación Primaria (10 para primero, 11 para segundo, 11 para tercero y 12 para cuarto). Para citarlos, a lo largo del trabajo, se consideró la nomenclatura OA, acompañado de las letras C (que corresponde al curso) y N (corresponde al número del objetivo en ese curso). Por ejemplo, OA 4.7 corresponde 4° Básico y al objetivo N°7 de este eje (Resolver problemas rutinarios y no rutinarios

en contextos cotidianos que incluyen dinero, seleccionando y utilizando la operación apropiada). El listado completo de los OA se menciona en el Anexo.

Obstáculos. Se relaciona con las dificultades que reconocen los FP, al diseñar y /o implementar este cuadernillo, lo que impide el avance en las tareas propuestas y en la construcción de nuevo conocimiento. En este trabajo, consideramos los obstáculos definidos por Brousseau (1998): *ontogenéticos, epistemológicos y didácticos*.

Tipo de actividad. Son las situaciones que propone el FP para que sean desarrolladas por los estudiantes, en las distintas secciones del cuadernillo. Estas se clasificaron en *ejercicios y problemas*.

Tipo de contextos. Para analizar las situaciones en que se propone trabajar los temas de *número y operaciones* en los cuadernillos, consideramos los contextos propuestos en PISA (OCDE, 2013): 1) *personal*; 2) *laboral*; 3) *social*; y 4) *científico*.

Además, se consideró como un aspecto relevante en esta tarea, las conclusiones elaboradas por los FP, las que permitieron, a partir de lo descrito, definir las siguientes unidades de análisis y sus componentes (a posteriori).

Valoración del conocimiento pedagógico del contenido. Se observan los elementos relacionados con el conocimiento pedagógico del contenido del modelo de Ball et al. (2008), en particular: 1) conocimiento del contenido y los estudiantes; 2) conocimiento del contenido y la enseñanza. Para ello, se valoran las conclusiones que elaboraron los FP sobre el diseño e implementación del cuadernillo.

Valoración de la actividad. Se analizan las conclusiones elaboradas por los FP sobre el trabajo de diseño e implementación del cuadernillo de auto-instrucción, observando la valoración que estos hacen sobre aspectos del contenido matemático, labor como futuro profesor, entre otros aspectos.

Todas las unidades de análisis, y sus respectivas categorías, se han definido a partir de las aportaciones de la teoría y la relevancia dentro de la Didáctica de la Matemática.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este apartado, se muestran los resultados en relación a los OA considerados en los cuadernillos, los obstáculos declarados por los FP, los tipos de actividades declaradas, tipos de contextos, valoración del conocimiento pedagógico del contenido y, por último, la valoración de la actividad profesional.

En primer lugar, los FP seleccionaron el nivel educativo (curso) al cual va destinado este recurso, pudiendo elegir uno o más OA relacionados con el eje *Números y operaciones*. En la Tabla 1, se observa que el mayor porcentaje corresponde al 2° con 32,9%, seguido del 1° con un 30,6%.

Tabla 1

Distribución de los cuadernillos según curso.

Curso	Frecuencia	Porcentaje
1°	26	30,6
2°	28	32,9
3°	18	21,2
4°	13	15,3
Total	85	100

Objetivos considerados en el cuadernillo de auto-instrucción

De acuerdo a las instrucciones del trabajo, los FP podían elegir uno o más OA propuestos en el marco curricular para diseñar diversas actividades relacionadas con el eje *Números y operaciones*. La Tabla 2, muestra la distribución de los objetivos seleccionados, siendo los OA 2.1 y 3.5, correspondiente a 2° y 3° año, los que presentan mayor frecuencia, con un 9,4% y 8,2%, respectivamente.

Tabla 2

Frecuencia y porcentaje de OA seleccionados.

Objetivo	Frecuencia	Porcentaje (n=85)
2.1	8	9,4
3.5	7	8,2
1.1 y 1.9	6	7,1
1.3	5	5,9
2.3, 3.3, 4.9 y otro eje	4	4,7
2.2, 2.9 y 4.1	3	3,5
1.4, 1.5, 1.6, 2.5, 2.7, 2.8, 2.11, 3.1, 3.8, 4.3 y unión de OA	2	2,4
1.10, 3.2, 3.10, 4.6, 4.8, 4.10 y no declara	1	1,2

Además, 35 FP realizaron alguna modificación al OA seleccionado de las *Bases Curriculares*. Estas consistieron en la eliminación o cambio de palabras, o la fusión con otros OA. Por ejemplo, FP6 cambia la palabra *número* por *elemento* en el OA 2.1. Este cambio evidencia, aparentemente, el dominio conceptual del FP, al reconocer que el número es una representación abstracta (Aharoni, 2012; Alsina, 2012; Baroody, 1997; Benacerraf, 1983), lo que es imposible de leer. Solo se lee, el registro gráfico o numeral. FP83 restringe el ámbito numérico del OA 2.1 hasta el 50, y no hasta 1000, aunque conserva el error de considerar el número como un objeto que es posible leer y no como la representación de una cantidad. Finalmente, FP21 genera un nuevo objetivo al unir el OA 1.1 y 1.3 aunque con imprecisiones:

“Cuantificar numerales del 1 al 100 y representarlos en forma concreta, pictórica o simbólica” FP21.

Obstáculos

Para el estudio de los posibles obstáculos a los que se pueden enfrentar los estudiantes, utilizamos la clasificación de Brousseau (1998). En relación a los *obstáculos epistemológicos*, se entienden como aquellos atribuidos al estudiante que dan cuenta de un vacío conceptual que impide la adquisición de un nuevo conocimiento. En este contexto, el FP 30, señala que se puede generar una dificultad en la comprensión del algoritmo multiplicativo de los números naturales.

“Un posible error matemático es que los estudiantes no comprendan que el producto de una multiplicación siempre será más grande que el multiplicando y el multiplicador” FP30

El segundo es el *obstáculo ontogenético*, que hace alusión a aquellas condiciones genéticas específicas de los estudiantes que dificulta o impide el aprendizaje. El FP 14, menciona la dificultad en la escritura de los números, que como habilidad perceptivo motora se debe desarrollar paulatinamente para interpretar la información.

“Alteración en la escritura de los números, por ejemplo: en el caso del número 3 que lo escriba simulando la E (mayúscula manuscrita)” FP14

El *obstáculo didáctico*, se origina en las decisiones que toma el profesor en la práctica pedagógica y la forma en que desarrolla los procesos de enseñanza y de aprendizaje; en este caso, los autores de los cuadernillos. En particular, el FP16 menciona como posible limitación la forma en que se presenta el contenido matemático en el cuadernillo.

“Que la entrega del contenido no haya sido de forma clara o de fácil entendimiento para el alumno” FP16.

Finalmente, se generó la categoría *otro*, donde se incluyen aquellos aspectos no considerados en las categorías anteriores (e. g., actitud, motivación o afectivo) y que dificultan la construcción de un nuevo conocimiento. Por ejemplo, el FP4 menciona como posible obstáculo la motivación del estudiante al enfrentarse a este tipo de situaciones de aprendizaje.

“El estudiante se muestra desinteresado por realizar el cuadernillo” FP4.

En la Tabla 3 vemos la distribución de 289 obstáculos reconocidos y/o ejemplificados por 70 de los 85 FP. De ellos, el 62,3% se han clasificado en epistemológicos, seguidos por aquellos clasificados como otro, con un 23,2%. Los obstáculos *ontogenéticos* y *didácticos* se reconocen escasamente (7,3% c/u).

Tabla 3
Distribución de los obstáculos señalados por los FP

Tipo de obstáculos	Frecuencia	Porcentaje
Epistemológico	180	62,3
Ontogenético	21	7,3
Didáctico	21	7,3
Otro	67	23,2
Total	289	100

Tipo de actividades

Las diferentes actividades incluidas en los 85 trabajos fueron analizadas considerando el tipo de tarea propuesta, para ello se consideraron dos tipos:

Ejercicios. Se consideran tareas repetitivas, en las que el estudiante de antemano sabe qué hacer para resolver un planteamiento (Isoda y Olfos, 2009). Un ejercicio es aquella actividad que cuenta con una estrategia de resolución inmediata (Díaz y Poblete, 2001). Una tarea que se ha clasificado en esta categoría es la mostrada en la Figura 1, donde el estudiante debe replicar actividades antes trabajadas, que implica resolver la adición, y luego colorear los recuadros para representar cada cifra de la suma.

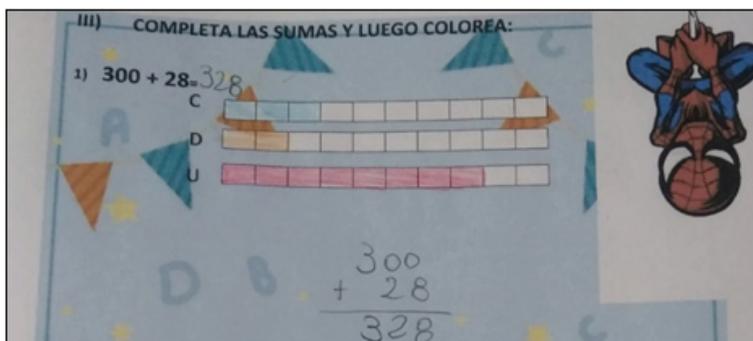


Figura 1. Actividad considerada como ejercicio (FP40)

Problemas. Son aquellas tareas que no tiene una estrategia de resolución conocida (e. g., Alsina, 2019; Díaz y Poblete, 2001; Polya, 1945; Santos-Trigo, 2014; Schoenfeld, 1985). Una situación considerada como problema es la mostrada en la Figura 2, planteada

por el FP62, donde se debe calcular el total a pagar, lo que debe recibir de vuelto y si esto le alcanza para comprar algo más.

4. Pamela tiene una pastelería, en la cual vende pie de limón a \$250, repollitos a \$150 y roscas a \$120 c/u. Si Bastián quiere comprarle a su polola un pie de limón, dos repollitos y dos roscas. ¿Cuánto es el total que tiene que pagar? Si pagó con \$1000, ¿Cuánto vuelto tiene que entregarle Pamela? Con el vuelto ¿Le alcanza algo más?

Figura 2. Actividad considerada como problema (FP6)

En la Tabla 4 se presenta la distribución de las actividades de enseñanza, según su clasificación en ejercicios o problemas. En ella observamos que los FP plantean en sus cuadernillos de auto-instrucción, mayoritariamente, actividades clasificadas como *ejercicios* (78,8%); y que las consideradas como *problemas* alcanzan un 21,2%.

Tabla 4
Tipo de actividades de enseñanza

Actividad	Frecuencia	Porcentaje
Ejercicios	681	78,8
Problemas	183	21,2
Total	864	100

Contextos

Una cuarta unidad de análisis corresponde al tipo de contexto utilizado para presentar la actividad, donde los datos y el resultado guardan sentido. Para este caso, consideramos los contextos descritos en PISA (OCDE, 2013):

Personal. Considera aquellas actividades que están relacionadas con situaciones próximas a los estudiantes. Por ejemplo, la actividad que vemos en la Figura 3 se basa en la organización del cumpleaños de una niña (María).

Laboral. Considera aquellas situaciones que se basan o relacionan en el mundo del trabajo, implicando ventas, realización de inventarios, entre otros. Por ejemplo, la actividad de la Figura 4 muestra la cantidad de frutas (naranjas) en un puesto ferial (inventario).

8. Resolver los siguientes problemas matemáticos.

a) En la fiesta de cumpleaños de María hay 2 tortas de piña, 1 de chocolate y 4 naranja. ¿Cuántas tortas hay en total?



Figura 3. Actividad planteada en un contexto personal (FP15)

En la frutería hay dos cajones con naranjas, uno tiene 27 naranjas y el otro 36. ¿ que numero representa la mayor cantidad de naranjas?

Pinta en la cinta los casilleros con las cantidades de naranjas.

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Figura 4. Actividad planteada en un contexto laboral (FP11)

Social. Considera aquellas actividades que se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observan un aspecto determinado de su entorno. Un ejemplo de este contexto lo vemos en la actividad de la Figura 5, que hace referencia a un partido de fútbol de dos equipos, los que se pueden considerar como comunidades locales.

1. Para el partido de fútbol entre Colo-Colo y Huachipato asistieron 743 personas, de las cuales 351 eran hinchas de Huachipato. ¿Cuántos hinchas de Colo-Colo asistieron al partido?

Figura 5. Actividad planteada en un contexto social (FP38)

Científico. Son aquellas actividades que hacen referencia a la aplicación de la matemática en otras disciplinas o temas, como ciencias, tecnología o la propia matemática. Un ejemplo de este contexto lo vemos en la Figura 6, donde se pide crear un problema a partir de los multiplicandos.

Sin contexto. Son aquellas actividades que no se enmarcan dentro de ninguno de los contextos anteriores, generalmente asociadas a tareas algorítmicas. Por ejemplo, la

actividad de la Figura 1, que pide esolver una adición y pintar las cuadrículas según las cifras de la suma, sin plantear un mayor desafío cognitivo.

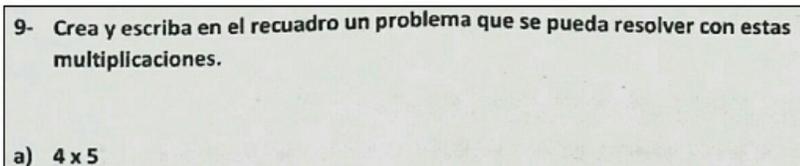


Figura 6. Actividad planteada en un contexto científico (FP30)

En la Tabla 5 se presenta la distribución de las actividades de enseñanza de acuerdo a los contextos en que se enmarcan. Vemos que la mayoría de ellas no se plantean dentro de un contexto determinado (72,8%), puesto que se limitan a replicar ciertos algoritmos. Luego, se encuentran las actividades que hacen referencia a algún aspecto próximo al estudiante (*contexto personal*) (21,8%) y los demás contextos están escasamente representados en las actividades planteadas.

Tabla 5
Frecuencia y porcentaje de contextos identificados en las actividades de los cuadernillos de auto-instrucción

Contexto	Ejercicios		Problemas		Total	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Personal	82	12	106	57,9	188	21,8
Laboral	30	4,4	7	3,8	37	4,3
Sociales	1	0,1	2	1,1	3	0,3
Científico	1	0,1	6	3,3	7	0,8
Sin contexto	567	83,3	62	33,9	629	72,8
Total	681	100	183	100	864	100

Conocimiento del contenido y los estudiantes

Este subdominio entrelaza el conocimiento del contenido con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un tema en particular (Hill et al., 2008). En el caso del cuadernillo de auto-instrucción, se identificaron aquellos elementos que los FP relevan en su propuesta, vinculados a este subdominio. Por ejemplo, el FP32 reconoce la importancia del diseño de actividades, haciendo referencia al indicador *selecciona las actividades más apropiadas para construir un conocimiento matemático en virtud de saber lo que les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador*:

“creando actividades para que aprender matemáticas sea una forma divertida, sea aplicado de una manera más fácil y lúdica [...] hacer este contenido más simpático para los estudiantes” FP32.

Respecto de *identifica las estrategias que utilizan para resolver los problemas*, el FP3 menciona la importancia del desarrollo de las actividades del cuadernillo y su análisis, para interpretar la forma de pensar del estudiante cuando se enfrentan a determinados problemas.

“la importancia de este cuadernillo es la realización de actividades, el desarrollo y análisis empleado por el estudiante a partir del razonamiento matemático utilizado” FP3.

El FP20 conjetura sobre las dificultades del estudiante en algunas de las actividades del cuadernillo que ha diseñado. Situación que se relaciona con el indicador *reconoce los errores frecuentes de los estudiantes*.

“una vez que el niño realiza las actividades, se concluye que el estudiante se confundía con algunos números, lo que le provocaba incertidumbre” FP20.

Respecto del indicador *se anticipa a la respuesta de los estudiantes*, el FP64 menciona la relevancia de estar preparado para las posibles dificultades que este tenga, de manera de contar con las herramientas para ayudar a superarlas.

“ser precisos con el enunciado de la actividad, tomando en cuenta inmediatamente las posibles dificultades u obstáculos que puedan tener y pensando en las posibles respuestas” FP64.

El indicador *reconoce las dificultades o concepciones erróneas para comprender un contenido o concepto*, se observa en lo mencionado por el FP9, al identificar dificultades en las tareas y encontrar modos de resolverla.

“se presentaron muy pocas dificultades en el proceso, de todas maneras, supimos solucionarlas de manera exitosa y útil” FP9.

En el caso de no poder vincular la conclusión con algún indicador antes mencionado, se incluyó la categoría *indicadores no observados*. Un ejemplo de esta situación se reconoce en FP1.

“el estudiante que no tenga claro los contenidos previos al tema, perjudica en sí el poder avanzar con los contenidos” FP1.

En la Tabla 6 se muestra la distribución (frecuencia y porcentaje) que presenta cada uno de los indicadores relacionados con el conocimiento del contenido y los estudiantes. Se observa que los FP no reconocen indicadores relacionados con este subdominio (*indicadores no observados*) (63,5%), mientras que solo un 17,6% destaca la importancia de seleccionar actividades, según su nivel de complejidad o interés. Los indicadores restantes se observan escasamente.

Tabla 6

Frecuencia y porcentaje de los indicadores del conocimiento del contenido y los estudiantes

Indicadores	Frecuencia	Porcentaje
Reconoce los errores frecuentes de los estudiantes	3	3,5
Se anticipa a la respuesta de los estudiantes	4	4,7
Reconoce las dificultades o concepciones erróneas para comprender un contenido o concepto	7	8,2
Selecciona las actividades más apropiadas para construir un conocimiento matemático en virtud de saber lo que les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, agobiante o motivador.	15	17,6
Identifica las estrategias que utilizan para resolver los problemas	2	2,4
Indicadores no observados	54	63,5
Total	85	100

Conocimiento del contenido y la enseñanza

Este subdominio combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre la matemática (Ball et al., 2008), permitiendo comprender las decisiones del profesor a la hora de usar estrategias, ejemplos, recursos didácticos, entre otros (Carrillo et al., 2013).

El indicador *demuestra dominio en la elección de representaciones, uso de métodos y procedimientos para enseñar un contenido específico*, se muestra en lo indicado por el FP48, quien enfatiza en la necesidad de diseñar actividades con creatividad y dedicación.

“se requiere creatividad y dedicación para diseñar una actividad [...] debemos ponernos en el lugar de los estudiantes e intentar que la metodóloga sea adecuada para cualquier estudiante que la resuelva” FP48.

Sobre el indicador *secuencia las tareas eligiendo los ejemplos para comenzar con la actividad y profundizar el contenido*, el FP63 señala la necesidad de utilizar actividades de complejidad gradual.

“los ejercicios que debía resolver estaban ordenados de los más simple a lo más complejo” FP63.

El FP55 menciona la necesidad de aplicar la matemática en situaciones reales, así como el uso de diferentes recursos, donde la experiencia del estudiante es importante para el aprendizaje. Esto tiene directa relación con el indicador: *considera en la experiencia, recursos y materiales didácticos apropiados para enseñar una idea matemática*.

“aplicando las matemáticas en situaciones reales [...] utilizando la manipulación de materiales concretos, explorando, cuestionando y discutiendo” FP55.

El FP72 menciona la necesidad de utilizar diferentes elementos, de modo de facilitar el aprendizaje de forma gradual y respetando los distintos ritmos y formas de aprender. Esto se relaciona con el indicador *planifica las actividades considerando los distintos contextos de aprendizaje*

“por otra parte la descomposición es un factor un poco más complejo de entender por los niños, pues el separar una cantidad u objeto se dificulta más [...] debe hacerse de manera más pictórica y concreta para comprender de mejor forma” FP72.

En el caso de no poder vincular los indicadores con ninguno de los descriptores antes mencionados, se ha creado uno denominado *indicadores no observados*. Ejemplo de esta situación lo vemos en parte de la conclusión de FP74, quien hace referencia a los conocimientos previos de los estudiantes y no al rol del profesor en la enseñanza de la matemática.

“al contar con una buena base matemática al inicio de la enseñanza regular formal se obtendrán mejores resultados en los aprendizajes futuros” FP74.

En la Tabla 7 se muestra la distribución de los indicadores relacionados con el conocimiento del contenido y la enseñanza del dominio del conocimiento pedagógico de la matemática de Ball y cols. (Ball, 1990; Ball et al., 2008). En ella vemos que, en general, los FP no hacen referencia a este subdominio (55,3%). De los indicadores observados, los más frecuentes son aquellos relacionados con la correcta elección de actividades y métodos para la enseñanza efectiva de un tema (16,5%) y el considerar la experiencia como un recurso importante para los procesos de enseñanza y aprendizaje (14,1%).

Tabla 7

Frecuencia y porcentaje de los indicadores del conocimiento del contenido y la enseñanza

Indicadores	Frecuencia	Porcentaje
Demuestra dominio en la elección de representaciones, uso de métodos y procedimientos para enseñar un contenido específico	14	16,5
Secuencia las tareas eligiendo los ejemplos para comenzar con la actividad y profundizar el contenido	3	3,5
Considera en la experiencia, recursos y materiales didácticos apropiados para enseñar una idea matemática	12	14,1
Planifica las actividades considerando los distintos contextos de aprendizaje	9	10,6
Indicadores no observados	47	55,3
Total	85	100

Valoración de la actividad

También se ha analizado la valoración que realizan los FP del diseño e implementación del cuadernillo de auto-instrucción, encontrando las siguientes categorías:

Manejo del objeto matemático. Cuando el FP considera relevante, al momento de planificar experiencias matemáticas, dominar los tópicos a enseñar, para poder explicar claramente a sus estudiantes y, así, ayudarles a construir aprendizajes. Este último aspecto lo menciona claramente el FP60.

“los dominios de los números en los primeros años de escolaridad son fundamentales para el siguiente desarrollo de conocimiento matemático” FP60.

Labor profesional. Considera la reflexión sobre el quehacer del profesor, la importancia de desarrollar este tipo de tareas, como una forma de aproximarse a su futuro trabajo profesional. Así como lo menciona el FP12.

“el desarrollo de este trabajo sirve para valorar la labor y el esfuerzo que hacen todos los profesionales para llevar y presentar material clase a clase a sus alumnos” FP12.

Aspecto afectivo. Considera comentarios de los FP sobre las sensaciones que le produjo la realización o aplicación del cuadernillo de auto instrucción. Tal como menciona el FP5.

“fue una experiencia muy linda poder trabajar con un alumno y guiarlo [...] me fascinó poder trabajar mano a mano con un niño” FP5.

Actitud de los estudiantes hacia la tarea. En este indicador se incluyen aquellos aspectos observados por el FP, referido a la forma de trabajar del estudiante al desarrollar las actividades propuestas en el cuadernillo; tal como lo menciona el FP82.

“las actividades creativas y entretenidas son una herramienta de gran beneficio como recurso didáctico ya que permite al alumnado despertar el interés por el estudio de la matemática” FP82.

No observado. Considera aspectos que no se vinculan con las otras categorías definidas anteriormente. Por ejemplo, lo que menciona FP79, en el diseño e implementación de la tarea.

“Fue un trabajo extenso” FP79.

En la Tabla 8 se muestra la distribución (frecuencia y porcentaje) de los indicadores de valoración, a partir del diseño e implementación de este recurso, mencionado en las conclusiones y que puede hacer referencia a más de un aspecto. La tabla muestra que el indicador con mayor frecuencia es el asociado a la *actitud de los estudiantes hacia la tarea* (45,9%), seguido por *manejo del objeto matemático* que se pretende trabajar (42,4%) y la valoración de la *labor profesional* (40%).

Tabla 8
Frecuencia y porcentaje de los indicadores de valoración a partir del análisis del discurso

Valoración	Frecuencia	Porcentaje (n=85)
Manejo del objeto matemático	36	42,4
Labor profesional	34	40
Aspecto afectivo	28	32,9
Actitud de los estudiantes hacia la tarea	39	45,9
No observado	11	12,9

CONCLUSIONES

La formación inicial del profesor debiese facilitar el desarrollo de distintas capacidades, de manera que le permita evidenciar competencias pedagógicas, didácticas y disciplinares. Cossío y Hernández (2016) sustentan, a partir de la revisión de la literatura, que la significación que poseen los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje determina las estrategias y prácticas que realizan dentro de las aulas, para que sus estudiantes construyan el aprendizaje, a partir, de los contenidos establecidos en el currículo.

Reconociendo entonces, la importancia de la formación inicial del profesor discutida en los apartados anteriores, y los procesos involucrados, nos planteamos analizar cuadernillos de auto-instrucción que han diseñado e implementado FP de Educación Primaria para la enseñanza de un tema del eje *Números y operaciones*. Esta actividad, permite observar la comprensión que evidencian los FP de un contenido matemático, la formulación de actividades de enseñanza, los contextos en que los sitúan, el conocimiento pedagógico del contenido, los OA que consideran para diseñar su propuesta y los obstáculos que identifican. Reconociendo en esto, su capacidad para realizar una transposición didáctica, es decir, la adaptación de un saber sabio para su enseñanza, en un determinado curso (Chevallard, 1991).

En este contexto los FP, en más de la mitad de los cuadernillos diseñados, privilegiaron aquellos OA del eje *Números y operaciones*, propuestos para los dos primeros años de Educación Primaria, esto se puede explicar por el curso de formación profesional en que se encuentran (durante el primer semestre académico); sumado a ello, se observó en su propuesta, que profundizaron en el contenido de números naturales y su operatoria, especialmente adición y sustracción, tema considerado en los OA propuestos por las bases curriculares para el eje en cuestión (MINEDUC, 2012a).

En relación con los obstáculos, si bien, los FP, reflexionan, identifican y describen algunos de ellos, consideran al *epistemológico* como uno de los obstáculos de mayor predominio. Lo anterior se puede explicar desde la poca experiencia o desconocimiento que tienen los FP sobre estrategias de enseñanza y la capacidad para interpretar las respuestas de los estudiantes. Los obstáculos ontogenéticos y didácticos son muy poco visibilizados, por lo que se puede intuir que los FP delegan la responsabilidad de su quehacer al estudiante. Los profesores deben darse cuenta de las dificultades y obstáculos que enfrentan los estudiantes, como una forma de mejorar sus prácticas de enseñanza y asegurar que cada estudiante domine los conceptos matemáticos y las habilidades básicas antes de enseñar los nuevos temas. (Abdullah, Abidin y Ali, 2015; Ashlock, 2005)

Así mismo, los FP en su discurso señalan que, para construir aprendizajes matemáticos, se debe diseñar actividades que resulten entretenidas a los estudiantes, que llamen su atención. Esto encuentra sentido en Castro, Menacho-Vargas y Velarde-Vela (2019) y Palarea (2016), explicando que las actividades prácticas y recreativas, así como las estrategias motivadoras incentivan el interés por aprender la matemática. No obstante, el discurso de los FP, un 78,8% de las actividades propuestas en los cuadernillos

corresponde a ejercicios. Más aún, el 83,3% de los ejercicios carecen de contexto, replicando procedimientos algorítmicos, lo que impide ver la utilidad de la matemática (Alsina, 2019).

En relación con la valoración del conocimiento pedagógico del contenido, los FP mencionan la importancia del diseño de este tipo de recursos de enseñanza, que al ser implementados les ayuda a reconocer los obstáculos que presentan los estudiantes en la comprensión de ciertas ideas numéricas, y de esta forma proponer distintas maneras para superarlos. Además, resulta particularmente interesante que los FP, aunque de manera muy incipiente reconozcan algunos errores que pueden cometer los niños al realizar o responder una tarea. Del Puerto, Minnaard y Seminara (2006) sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas, esto podría proporcionar un buen ímpetu a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Así mismo, los FP, señalan que para la realización de las actividades es necesario considerar material didáctico, al ser este un buen mediador para la construcción de ideas y conceptos matemáticos. Numerosos trabajos han puesto de manifiesto la importancia de los recursos didácticos en las actividades de aprendizaje (e.g., Aristizábal, Colorato y Gutiérrez, 2016; Barrantes y Blanco, 2004; Lezama y Tamayo, 2012; Tenelema y Tenelema, 2016; Vecino, 2005), en tanto, se convierten en buenos mediadores para la construcción y comprensión de ideas y conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, dándole sentido a la matemática. Por otra parte, relevan la idea de trayectoria de aprendizaje, lo cual permitiría avanzar en construcciones de ideas y conceptos más complejos por parte de los estudiantes, asumiendo que, para ello, se debe utilizar metodologías que sean adecuadas. Para Clements y Sarama (2014) la construcción de trayectorias de aprendizaje de los estudiantes es uno de los desafíos más urgentes a los que se enfrenta actualmente la Educación Matemática.

En relación con la valoración global de la actividad, los FP mencionan que este tipo de actividades contribuye a la construcción de los conocimientos que están adquiriendo en su proceso formativo, y les aproxima a lo que será su quehacer profesional, donde deberán estar preparados para crear estrategias en un contexto diverso. Relevantan el rol docente y lo que ello implica, declarando la necesidad de generar una metodología que sea adecuada para lograr aprendizajes de calidad. Junto con ello, reconocen que se necesita un conocimiento pedagógico del contenido matemático sólido para poder diseñar experiencias de aprendizaje (Hill et al., 2008; Hoover, Mosvold, Ball y Lai, 2016; Rojas, 2014; Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

A partir de esta experiencia consideramos necesario seguir trabajando en un diseño de tareas que promuevan la construcción y comprensión de aprendizajes matemáticos, mediados por el juego y la manipulación de materiales, estrategias activas y novedosas que permitan captar la atención de los estudiantes (Ramirezparis, 2009), evidenciando un conocimiento pedagógico del contenido (Ball et al., 2008). Solo así, se podrán mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2004; Franchi y Hernández de Rincón, 2004).

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Los tres autores (J.P.F., M.S.S. y D.D.L.) participaron en todas las etapas del proceso de investigación, así como en la creación, redacción y corrección del artículo de manera equivalente.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor de correspondencia J.P.F., previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z. y Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science*, 11(21), 133-142.
- Aharoni, R. (2012). *Aritmética para padres y madres: Un libro para adultos sobre la matemática escolar*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.
- Alsina, A. (2012). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de los 0 a los 6 años*. Barcelona: Octaedro.
- Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.
- Aristizábal, J. H., Colorato, H. y Gutiérrez, H. (2016). El juego como estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico. *Itinerario Educativo*, 67, 123-137.
- Ashlock, R. B. (2005). *Error patterns in computatio*. New York, NY: Merrill.
- Ávalos, B. (2014). La formación inicial docente en Chile: tensiones entre políticas de apoyo y control. *Estudios Pedagógicos*, 40(Especial), 11-28.
- Babakhani, N. (2011). The effect of teaching the cognitive and meta-cognitive strategies (self-instruction procedure) on verbal math problem-solving performance of primary school students with verbal problem-solving difficulties. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 15, 563-570.
- Ball, D. L. (1990). Breaking with experience in learning to teach mathematics: The role of a preservice methods course. *For the Learning of Mathematics*, 10(2), 10-16.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.
- Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-22, 43-46.
- Ball, D. L., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). New York, NY: Macmillan.

- Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Baroody, A. J. (1997). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor Dis.
- Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 241-250.
- Benacerraf, P. (1983). What numbers could not be. En P. Benacerraf y H. Putnam (Eds.), *Philosophy of mathematics. Selected reading* (pp. 272-294). Cambridge: Cambridge University Press.
- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble: La pensée Sauvage.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: ERME.
- Castro, V., Menacho-Vargas, I. y Velarde-Vela, L. (2019). La matemática recreativa como estrategia de aprendizaje. *In Crescendo*, 10(1), 35-42.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach*. Florence, KY: Routledge, Taylor & Francis Group.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.
- Cossío, E. y Hernández, G. (2016). Las teorías implícitas de enseñanza y aprendizaje de profesores de primaria y sus prácticas docentes. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 21(71), 1135-1164.
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educacion*, 38(4), 1-13.
- Díaz, V. y A. Poblete (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 45, 33-41.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, 6(23), 23-32.
- Estrella, S., Olfos, R. y Mena-Lorca, A. (2015). Pedagogical knowledge of statistics content among primary school teachers. *Educação e Pesquisa*, 41(2), 477-493.
- Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, 8(24), 63-71.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Hill, H. C. y Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.

- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L. y Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1), 3-34.
- Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas a partir del estudio de clases*. Valparaíso: Universidad Católica de Valparaíso.
- Lezama J. y Tamayo C. (2012). La aplicación de los juegos didácticos basados en el enfoque significativo mejora el logro de aprendizaje en el área de Matemática. *In Crescendo*, 3(1), 23-29.
- MINEDUC (2012a). *Matemática Educación Básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- MINEDUC (2012b). *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. Santiago: LOM Ediciones Ltda.
- MINEDUC (2018). *Bases curriculares. Primero a sexto básico*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Montague, M. (2008). Self-regulation strategies to improve mathematical problem solving for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disability Quarterly*, 31(1), 37-44.
- OCDE (2013) *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.
- Olfos, R., Zakaryan, D., Estrella, S. y Morales, S. (2019). Vínculos y brechas entre el conocimiento teórico y el conocimiento práctico perceptual de una futura profesora en la enseñanza de la multiplicación de expresiones algebraicas. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 591-612.
- Olivares-Escanilla, A. (2012). Formación de Profesores de Matemáticas, apoyado en un contexto tecno-educativo. *IMFOMAT@PLI. Revista de la Sociedad Peruana de Matemática Aplicada y Computacional*, 2, 25-27.
- Palarea, M. M. (2016). El maravilloso mundo de los números. *Educatio Siglo XXI*, 34(2), 191-193.
- Pérez-Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid: La Muralla.
- Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.
- Ramirezparis, X. (2009). La lúdica en el aprendizaje de las matemáticas. *Zona Próxima: Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación*, 10, 138-145.

- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143-166.
- Santos-Trigo, M. (2014). *Resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México DF: Trillas.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York, NY: Academic Press.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Sotomayor-Echenique, C., Coloma-Tirapegui, C. J., Parodi-Sweis, G., Ibáñez-Orellana, R., Cavada-Hrepich, P. y Gysling-Caselli, J. (2013). Percepción de los estudiantes de pedagogía sobre su formación inicial. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 5(11), 375-392.
- Steedly, B. K., Dragoo, K., Arafeh, S. y Luke, S. D. (2008). Effective mathematics instruction. *Journal of Evidence Educational*, 3(2), 1-11.
- Tenelema, F. A. y Tenelema, M. G. (2016). *Las estrategias recreativas para desarrollar las macro destrezas en el área de matemática, en los niños de quinto año de educación básica, de la unidad educativa "21 de abril", ubicada en la Parroquia Flores, Cantón Riobamba, Provincia de Chimborazo, periodo 2014-2015* (Tesis de Licenciatura). Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba.
- Vaillant, D. (2007). Mejorando la formación y el desarrollo profesional docente en Latinoamérica. *Revista Pensamiento Educativo*, 41(2), 207-222.
- Varas, L., Lacourly, N., López, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(1), 171-187.
- Vecino, F. (2005). El espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías. Situaciones de introducción a las mismas. En C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 279-314). Madrid: Pearson.

Anexo. Objetivos de aprendizajes relacionados con el eje de números y operaciones

Primero básico (MINEDUC, 2012, p. 99)

- 1.1 Contar números del 0 al 100 de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5 y de 10 en 10, hacia adelante y hacia atrás, empezando por cualquier número menor que 100.
- 1.2 Identificar el orden de los elementos de una serie, utilizando números ordinales del primero (1º) al décimo (10º).

- 1.3 Leer números del 0 al 20 y representarlos en forma concreta, pictórica y simbólica.
 - 1.4 Comparar y ordenar números del 0 al 20 de menor a mayor y/o viceversa, utilizando material concreto y/o usando software educativo.
 - 1.5 Estimar cantidades hasta 20 en situaciones concretas, usando un referente.
 - 1.6 Componer y descomponer números del 0 a 20 de manera aditiva, en forma concreta, pictórica y simbólica.
 - 1.7 Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para las adiciones y las sustracciones hasta 20: conteo hacia adelante y atrás; completar 10; dobles
- Determinar las unidades y decenas en números del 0 al 20, agrupando de a 10, de manera concreta, pictórica y simbólica.
- 1.8 Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos: usando un lenguaje cotidiano para describir acciones desde su propia experiencia; representando adiciones y sustracciones con material concreto y pictórico, de manera manual y/o usando software educativo; representando el proceso en forma simbólica; resolviendo problemas en contextos familiares; creando problemas matemáticos y resolviéndolos.
 - 1.9 Demostrar que la adición y la sustracción son operaciones inversas, de manera concreta, pictórica y simbólica.

Segundo básico (MINEDUC, 2012, p. 103-104)

- 2.1 Contar números del 0 al 1 000 de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10 y de 100 en 100, hacia adelante y hacia atrás, empezando por cualquier número menor que 1 000.
- 2.2 Leer números del 0 al 100 y representarlos en forma concreta, pictórica y simbólica.
- 2.3 Comparar y ordenar números del 0 al 100 de menor a mayor y viceversa, usando material concreto y monedas nacionales de manera manual y/o por medio de software educativo.
- 2.4 Estimar cantidades hasta 100 en situaciones concretas, usando un referente.
- 2.5 Componer y descomponer números del 0 a 100 de manera aditiva, en forma concreta, pictórica y simbólica.
- 2.6 Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para adiciones y sustracciones hasta 20: completar 10; usar dobles y mitades; “uno más uno menos”; “dos más dos menos”; usar la reversibilidad de las operaciones.

- 2.7 Identificar las unidades y decenas en números del 0 al 100, representando las cantidades de acuerdo a su valor posicional, con material concreto, pictórico y simbólico.
- 2.8 Demostrar y explicar de manera concreta, pictórica y simbólica el efecto de sumar y restar 0 a un número.
- 2.9 Demostrar que comprende la adición y la sustracción en el ámbito del 0 al 100: usando un lenguaje cotidiano y matemático para describir acciones desde su propia experiencia; resolviendo problemas con una variedad de representaciones concretas y pictóricas, de manera manual y/o usando software educativo; registrando el proceso en forma simbólica; aplicando los resultados de las adiciones y las sustracciones de los números del 0 a 20 sin realizar cálculos; aplicando el algoritmo de la adición y la sustracción sin considerar reserva; creando problemas matemáticos en contextos familiares y resolviéndolos.
- 2.10 Demostrar que comprende la relación entre la adición y la sustracción al usar la “familia de operaciones” en cálculos aritméticos y la resolución de problemas.
- 2.11 Demostrar que comprende la multiplicación: usando representaciones concretas y pictóricas; expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales; usando la distributividad como estrategia para construir las tablas del 2, del 5 y del 10; resolviendo problemas que involucren las tablas del 2, del 5 y del 10.

Tercero básico (MINEDUC, 2012, p. 107-108)

- 3.1 Contar números del 0 al 1 000 de 5 en 5, de 10 en 10, de 100 en 100: empezando por cualquier número natural menor que 1.000; de 3 en 3, de 4 en 4..., empezando por cualquier múltiplo del número correspondiente
- 3.2 Leer números hasta 1.000 y representarlos en forma concreta, pictórica y simbólica.
- 3.3 Comparar y ordenar números naturales hasta 1.000, utilizando la recta numérica o la tabla posicional de manera manual y/o por medio de software educativo.
- 3.4 Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para las adiciones y las sustracciones hasta 100: por descomposición; completar hasta la decena más cercana; usar dobles; sumar en vez de restar; aplicar la asociatividad.
- 3.5 Identificar y describir las unidades, las decenas y las centenas en números del 0 al 1.000, representando las cantidades de acuerdo a su valor posicional, con material concreto, pictórico y simbólico.
- 3.6 Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 1.000: usando estrategias personales con y sin material concreto; creando y

resolviendo problemas de adición y sustracción que involucren operaciones combinadas, en forma concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o por medio de software educativo; aplicando los algoritmos con y sin reserva, progresivamente, en la adición de hasta cuatro sumandos y en la sustracción de hasta un sustraendo.

- 3.7 Demostrar que comprenden la relación entre la adición y la sustracción, usando la “familia de operaciones” en cálculos aritméticos y en la resolución de problemas.
- 3.8 Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar hasta el 10 de manera progresiva: usando representaciones concretas y pictóricas; expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales; usando la distributividad como estrategia para construir las tablas hasta el 10; aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta $10 \cdot 10$, sin realizar cálculos; resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta el 10
- 3.9 Demostrar que comprenden la división en el contexto de las tablas⁷ de hasta $10 \cdot 10$: representando y explicando la división como repartición y agrupación en partes iguales, con material concreto y pictórico; creando y resolviendo problemas en contextos que incluyan la repartición y la agrupación; expresando la división como una sustracción repetida; describiendo y aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación; aplicando los resultados de las tablas de multiplicación hasta $10 \cdot 10$, sin realizar cálculos
- 3.10 Resolver problemas rutinarios en contextos cotidianos, que incluyan dinero e involucren las cuatro operaciones (no combinadas).
- 3.11 Demostrar que comprenden las fracciones de uso común: $1/4$, $1/3$, $1/2$, $2/3$, $3/4$: explicando que una fracción representa la parte de un todo, de manera concreta, pictórica, simbólica, de forma manual y/o con software educativo; describiendo situaciones en las cuales se puede usar fracciones; comparando fracciones de un

Cuarto básico (MINEDUC, 2012, p. 113-114)

- 4.1 Representar y describir números del 0 al 10 000: contándolos de 10 en 10, de 100 en 100, de 1 000 en 1 000; leyéndolos y escribiéndolos; representándolos en forma concreta, pictórica y simbólica; comparándolos y ordenándolos en la recta numérica o la tabla posicional; identificando el valor posicional de los dígitos hasta la decena de mil; componiendo y descomponiendo números naturales hasta 10 000 en forma aditiva, de acuerdo a su valor posicional.
- 4.2 Describir y aplicar estrategias de cálculo mental para determinar las multiplicaciones hasta $10 \cdot 10$ y sus divisiones correspondientes: conteo hacia delante y atrás; doblar y dividir por 2; por descomposición; usar el doble del doble.

- 4.3 Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números hasta 1000: usando estrategias personales para realizar estas operaciones; descomponiendo los números involucrados; estimando sumas y diferencias; resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que incluyan adiciones y sustracciones; aplicando los algoritmos en la adición de hasta cuatro sumandos y en la sustracción de hasta un sustraendo.
- 4.4 Fundamentar y aplicar las propiedades del 0 y del 1 para la multiplicación y la propiedad del 1 para la división.
- 4.5 Demostrar que comprenden la multiplicación de números de tres dígitos por números de un dígito: usando estrategias con o sin material concreto; utilizando las tablas de multiplicación; estimando productos; usando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma; aplicando el algoritmo de la multiplicación; resolviendo problemas rutinarios.
- 4.6 Demostrar que comprenden la división con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito: usando estrategias para dividir, con o sin material concreto; utilizando la relación que existe entre la división y la multiplicación; estimando el cociente; aplicando la estrategia por descomposición del dividendo; aplicando el algoritmo de la división.
- 4.7 Resolver problemas rutinarios y no rutinarios en contextos cotidianos que incluyen dinero, seleccionando y utilizando la operación apropiada.
- 4.8 Demostrar que comprende las fracciones con denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2: explicando que una fracción representa la parte de un todo o de un grupo de elementos y un lugar en la recta numérica; describiendo situaciones en las cuales se puede usar fracciones; mostrando que una fracción puede tener representaciones diferentes; comparando y ordenando fracciones (por ejemplo: $1/100$, $1/8$, $1/5$, $1/4$, $1/2$) con material concreto y pictórico
- 4.9 Resolver adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador (denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2) de manera concreta y pictórica en el contexto de la resolución de problemas.
- 4.10 Identificar, escribir y representar fracciones propias y los números mixtos hasta el 5 de manera concreta, pictórica y simbólica, en el contexto de la resolución de problemas.
- 4.11 Describir y representar decimales (décimos y centésimos): representándolos en forma concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo; comparándolos y ordenándolos hasta la centésima
- 4.12 Resolver adiciones y sustracciones de decimales, empleando el valor posicional hasta la centésima en el contexto de la resolución de problemas.