ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5735

Invariantes Operatórios de Padrão Algébrico Presentes nas Estratégias de Estudantes do 3º Ano do Ensino Fundamental

Vinicius Carvalho Beck[a]
João Alberto da Silva[b]

[a] Instituto Federal Sul-rio-grandense, Campus Pelotas, Pelotas, RS, Brasil
[b] Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Campus Carreiros, Rio Grande, RS, Brasil

Recebido para publicação 11 mar. 2020. Aceito após revisão 5 maio 2020.
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Um dos grandes desafios para a educação matemática no século XXI é amenizar as dificuldades dos estudantes na chamada *passagem* da Aritmética para Álgebra. Já é consenso que não deve haver uma *passagem*, pois vários especialistas indicam abordagens algébricas desde os anos iniciais de escolaridade. **Objetivos**: O objetivo do presente trabalho é descrever e analisar os invariantes operatórios de padrão algébrico presentes nas estratégias de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada no interior do estado do Rio Grande do Sul. **Design**: A metodologia utilizada nesta pesquisa foi o Método Clínico de Manipulação-Formalização, criado originalmente por Jean Piaget e aplicado em vários de seus estudos. **Ambiente e participantes**: Estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental. **Coleta e análise de dados**: Entrevistas clínicas. **Resultados**: Partimos dos pressupostos da teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud para analisar as estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa. **Conclusões**: Identificamos quatro invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “contar os lugares cada vez que uma mesa é introduzida” e “adicionar dois lugares cada vez que uma mesa é introduzida”, respectivamente ligados com os conceitos-em-ação “junção das mesas” e “permanência dos lugares nas pontas das mesas”.

Palavras-chave: Invariantes operatórios; Padrão Algébrico; Estratégias.

Operative Invariants of Algebraic Default Present in the Student Strategies of the 3rd Grade of Elementary School

ABSTRACT

Background: One of the great challenges for mathematics education in the 21st century is to alleviate the difficulties of students in the *transition* from arithmetic to algebra. There is already

Autor correspondente: Vinicius Carvalho Beck. Email: contato.viniciusbeck@gmail.com

a consensus that there should not be a *transition*, as several experts have indicated algebraic approaches since the early years of schooling. **Objectives**: This study aims to describe and analyze the operative invariants of algebraic patterns present in the strategies of students of the 3rd grade of an elementary public school in the countryside of the state of Rio Grande do Sul. **Design**: The methodology used in this research was the clinical method of manipulation-formalization, created by Jean Piaget and applied in several of his studies. **Setting and Participants**: Students of the 3rd grade. **Data collection and analysis**: Clinical interviews. **Results**: We start from the assumptions of Gerard Vergnaud's theory of conceptual fields to analyze the strategies used by the research participants. **Conclusions**: We identified four operative invariants: the theorems-in-action "count the places each time a table is introduced" and "add two places each time a table is introduced", respectively linked with the concepts-in-action "putting the tables together" and "place at the ends of the tables".

Keywords: Operative invariants; Algebraic pattern; Strategies.

INTRODUÇÃO

A Álgebra é uma das grandes áreas da Matemática que compreende, basicamente, o estudo dos métodos de resolução de equações e das propriedades mais gerais dos polinômios. Segundo Baumgart (1992), a palavra Álgebra, inclusive, deriva de *al-jabr*, do árabe, que na verdade é parte do título do livro *Al-Kitabal-jabrwa'lMuqabalah*, escrito por Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi por volta de 825 D.C.

Muitos historiadores datam o surgimento da Álgebra no século IX D.C. por consideraram a obra de Al-Khwarizmi como o primeiro texto tratando especificamente dos métodos algébricos. Ainda assim, podemos dizer que a resolução de equações é bem mais antiga, já que existem registros de que os mesopotâmicos, bem como os egípcios, já resolviam alguns tipos de equações específicas muito antes dos árabes e hindus (Boyer, 1991).

A diferença entre os métodos dos povos antigos para os métodos introduzidos pelos árabes está na representação. Enquanto os primeiros se dedicavam mais a descrever a resolução de problemas práticos, expressando a resolução por meio da linguagem natural, os árabes se preocuparam e criar uma linguagem específica para comunicar as ideias mais gerais de seus métodos. Podemos pensar em um paralelo no que diz respeito ao aprendizado da Álgebra por uma criança, isto é, em um primeiro momento, a criança expressa suas ideias algébricas na sua linguagem natural, compreendendo e tentando generalizar essas ideias na medida em que entra em contato com problemas gradativamente mais formais ao longo de sua escolaridade. Daí a importância de compreender como a criança constrói seus esquemas mentais frente a problemas que apresentam ideias algébricas em uma linguagem menos formal.

O objetivo do presente trabalho é descrever e analisar os invariantes operatórios de padrão algébrico presentes nas estratégias de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do estado do Rio Grande do Sul.

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS

Segundo dados do NCTM (2000), um dos grandes desafios para a educação matemática no século XXI é amenizar as dificuldades dos estudantes na chamada *passagem* da Aritmética para Álgebra. Já é consenso que não deve haver uma *passagem*, pois vários especialistas indicam abordagens algébricas desde os anos iniciais de escolaridade. Em vários países a Álgebra já está integrada no currículo, em todos os níveis educacionais, a partir do primeiro ano. Este movimento de inclusão da Álgebra desde os anos iniciais, tem sido chamado internacionalmente de *Early Algebra*.

A partir da inclusão da Álgebra no currículo dos primeiros anos escolares, vários pesquisadores têm se dedicado a estudar como funciona o *pensamento algébrico* da criança, a fim de compreender os elementos que caracterizam uma situação como algébrica, e também como evoluem as estratégias de representação da criança até que consiga compreender a linguagem formal da Álgebra (Blanton& Kaput, 2005; Carpenter, Levi, Franke& Zeringue, 2005; Irwin & Britt, 2006; Canavarro, 2007; Fujii & Stephens, 2008; Stephens & Wang, 2008; Blanton*et al*., 2015).

Blanton e Kaput (2005, p.413) produziram os primeiros grandes estudos sobre *EarlyAlgebra*, os quais se tornaram referência para vários outros posteriormente, inclusive apresentando uma classificação adotada em estudos posteriores, que divide o pensamento algébrico em pensamento funcional e generalização algébrica. Esses autores definem o pensamento algébrico como "o processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade".

O documento do MEC *Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental* (Brasil, 2012) considera o pensamento algébrico como um dos assuntos a serem estudados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. É o primeiro documento que faz referência à *Early Algebra* no Brasil.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi o Método Clínico de Manipulação-Formalização (Delval, 2002), criado originalmente por Jean Piaget e aplicado em vários de seus estudos. A atividade proposta no presente trabalho foi baseada em um problema apresentado por Blanton *et al*. (2015, p. 85), no qual os autores daquele trabalho também pretendiam estudar a noção de padrão algébrico.

Para analisar as noção de padrão algébrico, Blanton *et al.* (2015, p. 85, tradução nossa) utilizam o seguinte problema: "Brady convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Ele tem uma mesa quadrada. Ele pode ter 4 lugares em uma mesa quadrada, como mostra a figura.

Se juntar outra mesa quadrada à primeira, ele pode ter 6 lugares. a) Se Brady continuar juntando as mesas dessa forma, quantas pessoas poderão sentar em: 3 mesas? 4 mesas? 5 mesas? b) Você percebe alguma relação na tabela? Explique. c) Encontre a regra que descreve a relação entre o número de mesas e o número de pessoas que podem sentar nas mesas. Descreva a regra em palavras. d) Descreva sua regra usando variáveis. O que suas variáveis representam? e) Se Brady juntar 10 mesas, quantas pessoas poderão sentar? Mostre como você chegou na resposta". Esta situação está ilustrada na *Figura 1* (Blanton *et al.*, 2015).

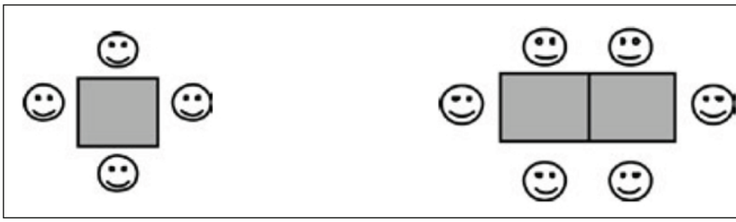

Figura 1. Representação da Mesa com Quatro e Seis Lugares. (Blanton *et al*., 2015)

A coleta de dados foi realizada com 24 alunos do 3º ano do Ensino Fundamental (14 meninos e 10 meninas). O estudo foi realizado em uma escola pública da periferia de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul. A escolha por estudantes do 3º ano ocorreu porque este é o final do Ciclo de Alfabetização, e, além disso, as quatro atividades aplicadas nesta pesquisa foram adaptadas do trabalho de Blanton *et al*. (2015), que também utiliza sujeitos do nível escolar equivalente no sistema educacional dos Estados Unidos. O material utilizado é apresentado na *Figura 2*, a seguir.

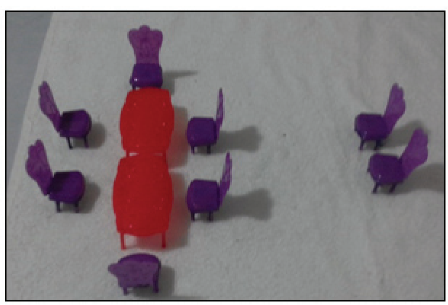

Figura 2. Material de Aplicação da Atividade.

Seguimos os protocolos do Método Clínico de Manipulação-Formalização (Delval, 2002). Apresentamos, para cada um dos 24 participantes, uma situação fictícia na qual um garoto, Bruno, convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Na casa de Bruno há uma mesa quadrada com quatro lugares, mas ele teve a ideia de juntar outra mesa. Pergunta-se ao participante quantos amigos poderão sentar com duas mesas juntas. Em seguida, aumenta-se gradativamente o número de mesas para analisar a capacidade de generalização do participante, a fim de captar a forma como ele percebe a regra que se forma quando o número de mesas aumenta, e também se consegue identificar que existe uma relação entre o número de mesas e de lugares.

A análise dos dados aconteceu em três etapas: categorização dos procedimentos realizados pelos participantes, análise a partir das estratégias construídas pelos estudantes e classificação dos níveis de respostas obtidas a partir das entrevistas.

A pesquisa foi realizada com autorização da escola e da professora regente da turma, de modo que a instituição já coleta, no momento da matrícula dos estudantes, termo para participação em estudos, publicidades, uso de imagens e participação em investigação.[1]

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Gerard Vergnaud é um pesquisador francês que estudou ao longo de várias décadas o processo de construção cognitiva das operações matemáticas mais elementares, tais como adição, subtração, multiplicação e divisão. Vergnaud (1990) propõe a teoria dos campos conceituais, defendendo a tese de que um conceito não é desenvolvido na mente de forma única, é preciso que o sujeito entre em contato com outros conceitos, para que, paralelamente, todos eles possam ser desenvolvidos. Daí a expressão *campo conceitual*, cunhada por Vergnaud.

O foco inicial das pesquisas de Vergnaud foram as operações aritméticas elementares (Verganud, 1997, 2009). Segundo o pesquisador, a operação de adição, por exemplo, não se desenvolve sem que o sujeito tenha contato com situações que envolvem o conceito de subtração. Por isso, Vergnaud propõe que deve-se atuar no sentido de desenvolver o campo conceitual aditivo, que abrange situações referentes tanto à adição quanto à subtração, pois as duas operações devem ser entendidas em conjunto, paralelamente.

Vergnaud (1990) define mais precisamente um campo conceitual como a síntese de três elementos: um conjuntos de *situações*, um conjunto de *invariantes operatórios* e um conjunto de *representações simbólicas*. As situações se apresentam para o sujeito, que precisa criar esquemas constituídos por metas, antecipações, regras de ação, inferências e procedimentos que podem ser generalizados para uma classe de situações. Tais esquemas compõem os invariantes operatórios. Como o sujeito precisa representar os conceitos e os invariantes que utiliza, ele faz uso de representações simbólicas, progressivamente mais

[1] O trabalho não foi submetido à Comitê de Ética, pois a produção dos dados foi realizada em período cuja instituição de pesquisa ainda não havia normatizado a pesquisa em Ciências Humanas. Também, entende-se que o experimento não ofereceu qualquer risco psicológico e/ou físico aos participantes da pesquisa, de modo que os autores deste trabalho assumem quaisquer riscos e eximem explicitamente a Acta Scientiae de quaisquer consequências decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa, de acordo com a Resolução nº510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde.

complexas, na medida em que avança no entendimento dos conceitos e nas características mais gerais do campo conceitual.

A ideia de campo conceitual é originalmente proposta por Vergnaud, mas os invariantes operatórios já haviam sido propostos por seu orientador de doutorado, Jean Piaget (1971), que propõe antes de Vergnaud, que cada situação demanda um tipo de esquema diferente do sujeito. Piaget e Inhelder (1975, 1979) estudam com mais profundidade a relação entre invariantes operatórios e representações simbólicas, concluindo que os invariantes operatórios são os significados dos conceitos, enquanto as representações simbólicas são os significantes.

Na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990, 1997, 2009), os invariantes podem ser de dois tipos: *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*. Os teoremas-em-ação sã proposições tidas como verdadeiras pelo sujeito sem necessariamente serem testadas, generalizadas ou provadas, e que podem ser reformuladas a partir de novas situações. Os conceitos-em-ação são características atribuídas a sujeitos ou objetos, as quais podem ser utilizadas como premissas para os teoremas-em-ação.

Caracterizar invariantes operatórios do pensamento algébrico é, na verdade, descrever e analisar os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação possíveis, ou seja, utilizados efetivamente por indivíduos que estão em processo de formação de conceitos algébricos elementares, como por exemplo, a ideia de padrão. Por isso, neste trabalho partimos dos pressupostos da teoria dos campos conceituais para analisar as estratégias utilizadas pelos participantes da pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados os resultados que foram obtidos com a aplicação da Atividade, com foco na ideia de reconhecimento de padrões. O reconhecimento de padrões está diretamente relacionado com a ideia algébrica de variável, que é uma das principais noções algébricas, segundo Blanton *et al*. (2015).

Procedimentos de Padronização

Nesta seção são apresentados os resultados da coleta de dados da etapa qualitativa para a situação envolvendo a ideia de padrão algébrico em sequências de números ou de outras representações. Nesta coleta de dados o foco esteve em analisar se os estudantes eram capazes de reconhecer um padrão de associação numérica entre o número de mesas e lugares, e como descreviam o padrão encontrado.

Foram vários os tipos de procedimentos realizados pelos estudantes para agir nesta atividade. A primeira categoria de procedimentos que destacamos foi a *Sem-Justificativa*, que se caracteriza por uma reduzida presença de causalidade na forma de manipular os materiais e inferir uma regra que relacione o aumento do número de cadeiras devido ao número de mesas. A Tabela 1 apresenta algumas falas dos estudantes enquanto realizavam a Atividade.

Tabela 1
Categoria Sem-Justificativa.

Sem-Justificativa	[17] _Quantos lugares tu acha que ele vai ter que colocar a mais, se ele quiser colocar três mesas? _*Dez*.
	[19] _Se eu quisesse colocar outra mesa (havia duas mesas), quantos lugares tu acha que ia ter? _*Acho que nove*. _Por que nove? Qual foi a conta que tu fez? _*Eu fiz dois mais quatro*.
	[21] _E se ele for juntando mesas assim, ele botou duas mesas, mas e se ele quiser botar uma terceira mesa, quantos lugares ele vai ter que colocar na mesa? (a estudante pensa bastante tempo) _*Cinco*.

As respostas Sem-Justificativa revelam uma dificuldade no entendimento da expressão "a mais", já constatada por estudos precedentes, como por exemplo no trabalho de Beck e Silva (2015). O estudante [17] responde dez, pensando no número total de cadeiras, o que ainda assim indica uma previsão pautada em uma estimativa que não segue uma regra bem definida, e que não considera o uso da expressão "a mais". Quando perguntado por que a resposta seria nove, o estudante [19] explica que fez "dois mais quatro", porém esta conta não resulta no número indicado, nem reflete as quantidades envolvidas no problema, já que havia duas mesas e seis cadeiras.

A categoria de procedimentos que denominamos por *Não-Junta-Mesas* se caracteriza pelo fato de haver a consciência de que o número de lugares iria aumentar devido ao aumento do número de mesas, porém o fato de as mesas precisarem ficar juntas não é levado em consideração. Os participantes que utilizaram este tipo de procedimento apenas adicionaram outra mesa e contaram o número de lugares. Um participante errou a contagem, contando três lugares a mais, e o outro acertou a contagem, no entanto sem juntar as mesas, conforme a Tabela 2.

Tabela 2
Categoria Não-Junta-Mesas.

Não-Junta-Mesas	[1] _Se ele juntar duas mesas, ele sabe que ele vai conseguir convidar seis pessoas, e se ele conseguir mais uma mesa, três mesas, quantas pessoas podem ficar? _*Acho que nove*. _Como é que tu pensou para fazer? _*Eu contei daqui, mais a outra mesa que ele poderia colocar aqui* (colocando as cadeiras em volta das mesas, sem juntar uma mesa na outra).
	[5] _Se ele colocar mais uma mesa aqui, quantos lugares ele vai ter? _*Doze*. _Como é que tu sabe que dá doze? _ (a estudante pensa e refaz a atividade) *Dez, seis mais quatro, dá dez* (sem juntar as mesas).

A participante [5] primeiramente responde doze, provavelmente realizando uma estimativa. Após manipular as mesas, porém sem juntá-las, ela conta e responde dez, sem atentar para o fato de que as mesas deveriam estar juntas.

Outra categoria de procedimentos que foi constatada é a que chamamos de *Mistura-Cadeiras*. Os estudantes que apresentaram procedimentos do tipo Mistura-Cadeiras compreendem que existe relação entre o número de mesas e cadeiras, no entanto possuem dificuldade para seguir o padrão de uma cadeira por lugar na mesa. A Tabela 3, a seguir, apresenta o uso deste tipo de procedimento.

Tabela 3

Categoria Mistura-Cadeiras.

Mistura-Cadeiras	[3] _Se eu botar mais uma mesa vai ter mais três lugares? *_Sim.* _Eu fiz esta pergunta em outra escola e teve um outro aluno que disse que dá 10, tu acha que ele está certo ou que ele está errado? *_Se tu colocou duas ó, em uma dá quatro, e se tu juntar duas mesas, dá seis, e se tu juntar mais uma mesa vai dar nove, posso colocar mais uma.* _E na ponta não pode ir mais uma cadeira? *_Sim, daí ia dar uma aqui e outra aqui* (colocando duas cadeiras no mesmo lugar da mesa).
	[6] _Se ele colocasse mais uma mesa, quantas cadeiras daria para colocar? Com três mesas? *_Doze.* Como é que tu pensou? *_Porque eu contei, aqui tem seis cadeiras, daí eu contei* (apontando para as mesas, e contando lugares onde não poderia haver cadeiras)*, sete, oito, nove, dez, onze, doze.*
	[12] _Se ele botar três mesas, quantos lugares ele vai ter? *_Dezesseis.* _Como é que tu sabe que é dezesseis? *_É só pensar na cabeça.* _Mas como é que tu pensou na cabeça? *_Tem isso aqui, daí coloca mais três fica dezesseis.* _Tu pode mostrar aqui com as peças? (a estudante pega as cadeiras e começa a distribuir sem uma ordem ou uma contagem definida) *_Deu doze*.

A estudante [6], por exemplo, introduziu cadeiras na divisão das mesas, sem seguir o padrão inicial de uma cadeira para cada lugar da mesa. Por isso esta estudante contou vários lugares. O estudante [3] coloca duas cadeiras no mesmo lugar da mesa, o que prejudica sua avaliação sobre o reconhecimento de uma regularidade numérica do aumento do número de lugares.

Um dos estudantes respondeu inicialmente que mais três cadeiras deveriam ser colocadas na mesa. Porém após alguma insistência do pesquisador para que tentasse novamente, ele percebe que na verdade só precisa de duas cadeiras a mais. Destacamos esta resposta isolada como outra categoria, chamada *Acerto-Cadeiras*. Esta categoria recebe este nome pelo fato de que o acerto do número de lugares adicionais teve origem após o estudante experimentar a manipulação das cadeiras e perceber que não precisava adicionar a cadeira da ponta da mesa. A Tabela 4 ilustra esta experimentação.

Tabela 4

Categoria Acerto-Cadeiras.

Acerto-Cadeiras	[4] _Se ele quiser colocar uma outra mesa aqui (já havia duas), quantos lugares vai ter? _*Nove.* _Tem outras cadeiras aqui se tu quiser para pensar. _(depois de tentar novamente). *Oito.* _Teve outro colega que disse que dá diferente. Tu acha que ele tá certo ou está errado. _*Que ele tá errado.* _E o que ele pode ter feito errado? _*A mesma coisa que eu fiz, não sabia que tinha mais três cadeiras para colocar.*

O estudante [4] tenta formular uma resposta imaginando que os três lugares que não estão na junção das mesas estivessem vazios. Porém quando resolve experimentar constata que não há necessidade de retirar o lugar da ponta. Deste modo, a abstração empírica possui um papel importante nesta mudança de resposta. A contra-argumentação do pesquisador ressalta que a criança está certa da última resposta, mas esta certeza se deve à experimentação com o material disponibilizado.

Chamamos de *Regra-Mais-Um* a categoria de procedimentos adotados por alguns estudantes de adicionar um lugar para cada mesa introduzida. Os estudantes que optaram por este tipo de procedimento não chegaram à resposta correta. Ainda que tentassem formular uma relação entre o número de mesas e cadeiras, a falta de experimentação prejudicou a análise desses participantes, conforme Tabela 5.

Tabela 5

Categoria Regra-Mais-Um.

Regra-Mais-Um	[2] _Com duas mesas tem seis, não é? Se ele colocasse outra mesa aí, quantos lugares ele ia ter? _*Sete.* _Como é que tu pensou? _*Eu imaginei, eu fiquei olhando para as cadeiras para ver.*
	[7] _Se ele colocar outra mesa, quantas cadeiras tu acha que vai dar para usar? _*Dá sete.* _Como é que tu sabe que é sete? _*Por que seis mais um dá sete*. _Então se ele botar mais uma mesa, ele vai ter mais um lugar? _ (depois de novas tentativas de manipulação e algum tempo de reflexão) *Não, vai dá oito*. _Como tu sabe que vai dá oito? _*Não, dá sete*. _Qual tua resposta final? _*Sete.*
	[11] _Em cada lugar da mesa só pode uma cadeira, então se botar mais uma mesa, quantos lugares vai ter? _*Seis.* _Então quantas cadeiras têm aqui? _*Sete.* _Então seis ou sete? _*Sete.*
	[13] _Se ele botar mais uma mesa (já havia duas mesas), quantos lugares tu acha que vai ter? _*Sete.* _Por que sete? _*Porque ele botou mais uma*.

Como pode ser visto na Tabela 5, alguns estudantes que optaram por este tipo de procedimento ficaram em dúvida na escolha de sua resposta final. O estudante [13] deixa claro como está construindo sua regra. Na fala "porque ele botou mais uma", ele atribui o aumento unitário de lugares ao aumento unitário de mesas. Percebe-se que há uma crença de relação biunívoca entre os objetos.

Apesar das dificuldades inerentes do problema apresentado, inclusive com relação ao fato de haver a expressão "a mais" nas perguntas direcionadas aos estudantes, alguns conseguiram chegar à resposta correta, utilizando meios adequados para inferir a regra que relaciona mesas e lugares. A categoria de procedimentos mais bem sucedida na atividade foi a que denominamos *Regra-Mais-Dois* que consiste em adicionar dois lugares para cada mesa introduzida. Isto caracteriza o padrão algébrico presente na situação apresentada aos estudantes. As repostas são apresentas na Tabela 6, a seguir.

Tabela 6
Categoria Regra-Mais-Dois.

Regra-Mais-Dois	[8] _E com quatro mesas? *_Aí já ficou difícil, peraí.* _Pode pegar os bonequinhos aqui se quiser. *_Dá dez.* _Se eu quisesse botar mais uma mesa, o que que tu acha que seria? *_Ih, ficou difícil. Onze, não peraí, doze.* _Tem alguma relação matemática aí, cada vez que tu coloca uma mesa, tem alguma coisa aí com os números? *_Ficou difícil.* _Vamos lembrar, com uma mesa, quatro lugares, com duas mesas, seis, com três mesas, oito, com quatro mesas, dez, cinco mesas doze. *_É.* _O que que tá acontecendo cada vez que eu coloco uma mesa, quantos lugares eu tenho que colocar a mais? *_Três.* Vamos pensar no primeiro caso: quantos lugares eu tive quando coloquei duas mesas? *_Seis.* _Então quantos eu tive a mais? *_Ih, tu passou conta complicada.* Vamos pensar de novo: eu tinha quatro lugares, daí inventei de colocar outra mesa, quantos lugares a mais tem agora? *_Seis.* _Então quantos que foram a mais, além dos que tinha? *_Oito, foram oito.* _Então esta é tua resposta? *_Sim.*
	[9] _Só para a gente fazer as contas: com uma mesa, quatro lugares, com duas mesas, seis lugares, com três mesas, oito lugares. Com quatro mesas, qual seria o número de lugares? *_Dez.* _Como tu sabe que é dez? *_Porque vai mais duas.* E se eu botasse mais uma mesa? *_Doze.* E mais outra mesa? *_Quatorze.*
	[10] _Então vai aumentando mais ...? *_Dois*. _Cada mesa que tu aumentou, foi aumentando mais duas cadeiras? *_Aham*.

A estudante [9] infere a regra que relaciona mesas e número de lugares a partir de alguns exemplos dados pelo pesquisador. A constatação do reconhecimento de um padrão algébrico está na sua fala "porque vai mais duas", indicando que há compreensão da relação "para cada mesa introduzida deve-se adicionar duas cadeiras". Ressalta-se que, ainda que alguns estudantes tenham conseguido obter a resposta correta do problema, foram necessárias algumas sugestões dadas pelo pesquisador. Os estudantes [8] e [10], por exemplo, só chegaram à resposta após vários esclarecimentos.

A grande maioria dos procedimentos adotados na atividade, que analisou a capacidade dos estudantes em reconhecer padrões algébricos, foi adicionar três cadeiras para cada mesa introduzida. Chamamos esta categoria de procedimentos de *Regra-Mais-Três*, ilustrada na Tabela 7.

Tabela 7
Categoria Regra-Mais-Três.

Regra-Mais-Três	[14] _Se ele botar outra mesa aqui, quantas cadeiras ele vai ter que colocar a mais? *_Três*. (manuseando as cadeiras, a participante conta duas vezes o mesmo lugar, pois considera a cadeira que antes estava na ponta, como uma das cadeiras laterais na configuração seguinte, com uma mesa a mais, e além disso, adiciona duas cadeiras, criando assim, a regra de adicionar mais três cadeiras cada vez que uma mesa é introduzida).
	[16] _E se eu quisesse juntar outra mesa aí, quantas cadeiras eu teria que colocar a mais? *_Quatro*. _Mais quatro? *_Sim, uma cadeira aqui, outra aqui, não, três*. _Me explica como tu pensou (apontando para as cadeiras e mesas disponíveis para o experimento). *_Como juntei aqui, aí não dá para botar outra cadeira aqui, aí tem uma aqui e mais duas aqui, vai ficar três* (não considera a cadeira que já estava na mesa, contando uma a mais).
	[18] _E se ele quisesse colocar três mesas, quantas cadeiras ele ia ter que colocar a mais aí? *_Três*. _Tu pode me explicar porque tu pensou em três? (a estudante utiliza o material disponibilizado, mas conta duas vezes a cadeira da ponta, que já estava quando haviam duas mesas). *_Com três mesas, bota uma cadeira aqui, outra aqui, e outra aqui*.
	[20] _Se ele colocar um outra mesa (já havia duas), quantos lugares ele vai ter? *_Nove*. _Por que tu acha que é nove? *_Porque três mais três é seis, mais três é nove*. _Por que que tu fez mais três? *_Não sei*.
	[23] _Quantas cadeiras ele precisaria colocar a mais aqui se ele quisesse colocar outra mesa aqui, além das que estão aqui? *_Acho que ele colocaria mais seis*. _Vamos supor que ele quisesse colocar mais outra mesa, se ele juntasse outra mesa. Quantas cadeiras ele teria que colocar para completar as mesas? *_Três, como essa aqui, uma duas, três* (apontando para três lugares da mesa, mas considerando o lugar da ponta nas duas contagens). *Mais essa aqui, quatro* (e conta novamente o lugar da outra ponta). *Mas como essas duas aqui sobraram* (se referindo às cadeiras das duas pontas da mesa), *então ele só precisaria pegar mais duas*. _E se ele quisesse botar outra mesa? *_Ui, aí seria, ele pegaria mais quatro cadeiras, que ao todo, formaria doze*. _Tá, com duas mesas, ele precisaria de seis cadeiras, com três mesas, quantas cadeiras ele precisa? *_Nove* (repetindo lugares na sua contagem, afirmando que mais três cadeiras seriam necessárias).
	[24] _e se ele quisesse juntar três mesas, quantos lugares ele teria? *_Um, dois, ..., vai dá, seis*. _Seis também? *_É*. Se ele botar mais uma mesa? *_Não, oito*. _Como é que tu pensou? *_Assim* (e afasta a cadeira da ponta mostrando que terá mais dois lugares disponíveis). _Então ele vai ter que botar mais? *_Mais uma mesa*. _Tá, mais uma mesa, e mais quantas cadeiras? *_Hã, duas*. _E se ele quiser ainda, depois disso, colocar mais outra mesa, quantas cadeiras ele vai ter que colocar a mais ainda? *_Mais quatro*. _Tá, tu diz duas aqui, e ainda mais duas aqui? *_É*. _Tu acha que tem uma certa relação matemática? Cada mesa que ele coloca ele precisa colocar um certo número de cadeiras? Tu acha que tem um número certinho? *_Sim*. _Quantas? *_Quantas mesas*? _Se ele botar mais uma mesa aqui, quantas cadeiras ele vai ter que trazer a mais (já havia duas mesas)? *_Oito*. _Se ele botar mais outra? *_Onze*. _Por que ele teria que botar mais três cadeiras ainda? *_É*. _Cada mesa que ele coloca, quantas cadeiras ele tem que colocar a mais então? *_Tá, se for separado ele vai ter que colocar quatro, se for todas juntas, ele vai ter que colocar três*.

Os estudantes da categoria Regra-Mais-Três não percebem que a cadeira da ponta não precisa ser retirada para que outra seja colocada. Isto está relacionado com a ausência de conservação no pensamento dos participantes. A estudante [18], por exemplo, indica os lugares onde podem ser colocadas cadeiras, dizendo "com três mesas, bota uma cadeira aqui, outra aqui, e outra aqui", sem perceber que a cadeira da ponta não precisa ser retirada. Foi interessante notar que o estudante [24] considerou a possibilidade de não juntar as mesas, constatando corretamente, que sem juntar as mesas precisaria de mais quatro lugares, porém inferindo incorretamente, que precisaria de mais três lugares, caso fosse necessário juntar as mesas, isto é, sem considerar que a posição da ponta seria conservada.

Duas estudantes desconsideraram a junção das mesas, mas conseguiram formular uma regra baseada no número de lugares "a mais" que seriam introduzidos. Estas participantes demonstraram perceber o papel da expressão "a mais" no problema, porém, por não estarem atentas à junção das mesas, a regra construída por elas foi ineficaz para resolver a situação. Esta categoria foi chamada de *Mais-Quatro*, pois ao desconsiderar a junção das mesas, todos os lugares deveriam ser preenchidos com novas cadeiras, na visão destas estudantes. Estes procedimentos estão ilustrados na Tabela 8, a seguir.

Tabela 8
Categoria Regra-Mais-Quatro.

Mais-Quatro	[15] _Olha só: antes tinha quatro, ne, aí ele botou mais uma mesa, quantos lugares ele teve que colocar a mais aqui? _*Quatro*. _E se ele botar mais outra mesa, quantos lugares ele vai ter que colocar a mais? _*Quatro*. _E se ele for colocar ainda mais uma depois? _*Quatro*. _Vai ser sempre a mesma coisa? _*Sim*.
	[22] _Quantas ele teria que colocar a mais, se ele fosse colocar uma terceira mesa aqui? _*Quatro*. _Mais quatro? _*Aham*. _Então cada mesa que ele coloca, ele precisa colocar mais quatro cadeiras? _*É*.

Notamos que as estudantes [15] e [22] percebem um padrão algébrico na situação apresentada. Se no problema não estivesse especificado que as mesas deveriam estar juntas, estes procedimentos teriam sido eficazes. Mas para a situação apresentada, este tipo de procedimento se tornou ineficaz.

Discussão das Categorias à Luz das Estratégias

No trabalho de Blanton *et al*. (2015) as estratégias utilizadas pelos sujeitos daquele estudo para a situação das mesas, no que se refere ao pensamento funcional dos participantes, se dividem em três tipos: desenhar, utilização de recursividade e utilização de regra funcional.

A estratégia *desenhar* consiste em reproduzir as mesas na forma escrita, sejam quantas forem solicitadas. Por exemplo, quando se pergunta à criança quantos lugares serão necessários para que dez mesas sejam introduzidas, ela necessita do desenho das dez mesas para visualizar a situação concreta de se ter a disposição física das mesas e dos lugares.

A *utilização de recursividade* é uma estratégia que consiste na comparação da evolução das duas grandezas. A criança não necessita de uma representação concreta, mas precisa comparar a evolução numérica do número de lugares, o qual varia de acordo com o número de mesas que são colocadas. Por exemplo, quando perguntamos para a criança quantos lugares serão necessários para dez mesas, ela conta em pares: duas – seis, três – oito, quatro – dez, cinco –doze, seis – quatorze, sete – dezesseis, oito – dezoito, nove – vinte, dez – vinte e dois.

A *utilização de regra funcional* foi a estratégia mais sofisticada constata por Blanton *et al*. (2015). A criança capaz de formular uma explicação a partir de uma regra funcional consegue, por exemplo, no problema das dez mesas, perceber que deve multiplicar o número de mesas por dois e acrescentar mais duas cadeiras, pois esta é a regra de associação entre as duas grandezas, a qual é construída a partir da experimentação com os materiais disponibilizados para a realização da atividade.

Das categorias de procedimentos emergentes da presente pesquisa, podemos identificar relações com a estratégia desenhar e utilização de recursividade. Não constatamos a utilização de regra funcional como estratégia por nenhum dos estudantes.

As categorias de procedimentos Sem-Justificativa, Não-Junta-Mesas e Mais-Quatro não estão associadas com nenhum dos tipos de estratégias presentes no trabalho de Blanton *et al*. (2015), pois no caso da Sem-Justificativa não há presença de causalidade no pensamento dos estudantes, e no caso dos procedimentos do tipo Não-Junta-Mesas e Mais-Quatro, a premissa básica de que as mesas estivessem juntas não foi cumprida, de modo que a construção da regra não está consistente com a realidade observada pela situação concreta do problema. Por isso, consideramos tais categorias de procedimentos *pré-operatórias.*

Podemos afirmar que as categorias de procedimentos Mistura-Cadeiras, Acerto-Cadeiras, Regra-Mais-Um e Regra-Mais-Três possuem associação com a estratégia de desenhar, uma vez que tais procedimentos refletem a necessidade de representação concreta da situação proposta. Os equívocos dos estudantes que utilizaram tais tipos de procedimentos se referem à ausência de esquemas de reversibilidade e uma deformidade da abstração empírica, porém o entendimento da necessidade de junção das mesas e a noção de uma relação entre as grandezas número de mesas e número de cadeiras revelam um grande avanço na construção de padrões algébricos, e a presença de relações de causalidade nos esquemas produzidos por esses estudantes. Como desenhar é uma forma concreta de operar, podemos dizer que os procedimentos que associamos com as estratégias de desenhar, produziram em nossa pesquisa estratégias *funcionais-concretas*.

Percebe-se forte semelhança entre os procedimentos apresentados pelos estudantes que utilizaram procedimentos do tipo Regra-Mais-Dois e a estratégia de utilização de recursividade do trabalho de Blanton *et al*. (2015). Em ambos, os estudantes são capazes de relacionar diretamente as grandezas envolvidas, e conseguem prever resultados a partir da constatação da relação entre o número de mesas e cadeiras. Podemos dizer que foram utilizadas, em nossa pesquisa, estratégias *funcionais-recursivas*.

Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

O Nível I se caracteriza pelo pouco uso de esquemas causais nas estratégias utilizadas. Ele está subdividido em três subníveis, de acordo com os tipos de procedimentos utilizados pelos participantes. O Nível II se caracteriza pelo entendimento da necessidade de junção das mesas. Isto é o que diferencia o Nível I do Nível II. No primeiro, os estudantes não se preocupam com a junção das mesas, o que demonstra um avanço na representação da situação apresentada, ainda que equívocos de distribuição das cadeiras ou ausência de esquemas de reversibilidade estejam evidentes nas estratégias utilizadas por estes estudantes.

As estratégias no Nível III superam as dificuldades dos níveis precedentes, já que os estudantes que utilizaram estratégias de Nível III percebem a importância de juntar as mesas e operam os lugares de forma eficaz, o que possibilita uma correta construção da regra funcional que relaciona o número de mesas e o número de cadeiras. A partir dos procedimentos e estratégias apresentados nesta seção, foi possível construir a Tabela 9, que apresenta os níveis de respostas para a situação de padrão algébrico tratada a partir da Atividade.

Tabela 9
Níveis de Resposta da Atividade.

Categoria	Descrição
Nível IA	Há pouca ou nenhuma relação de causalidade na estratégia utilizada. A criança estima sem justificativa o número de lugares, sem relacioná-lo com o número de mesas.
Nível IB	Há pouca ou nenhuma relação de causalidade na estratégia utilizada. A criança não percebe a necessidade de juntar as mesas.Distribui aleatoriamente os lugares nas mesas.
Nível IC	Há pouca ou nenhuma relação de causalidade na estratégia utilizada. A criança não percebe a necessidade de juntar as mesas. Distribui quatro lugares para cada mesa que é introduzida.
Nível IIA	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. Não há entendimento de que cada lugar da mesa só deve abrigar uma cadeira, como no modelo apresentado. A criança coloca mais de uma cadeira em alguns lugares.
Nível IIB	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. A criança só acerta o número de cadeiras a partir da experimentação, necessitando colocar as cadeiras nos lugares, e ainda sendo incapaz de formular mentalmente a regra que relaciona o número de cadeiras como função do número de mesas.
Nível IIC	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. A criança realiza relação biúnivoca entre cadeiras e mesas.
Nível IID	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. A ausência de reversibilidade faz com o que o lugar da ponta seja contado duas vezes quando uma mesa é acrescentada, causando uma deformação na regra funcional que relaciona mesas e cadeiras.
Nível III	A criança utiliza a recursividade como forma de prever quantos lugares são necessários para qualquer número de mesas acrescentadas.

A relação entre as estratégias, os procedimentos e o níveis de respostas dos estudantes com relação à Atividade referente à ideia de padrão algébrico, está sintetizada na Tabela 10, a seguir.

Tabela 10
Procedimentos, Estratégias e Níveis de Padrão Algébrico.

Procedimento		Estratégia		Nível
Sem-Justificativa	→	Pré-Operatória	→	IA
Não-Junta-Mesas	→	Pré-Operatória	→	IB
Mistura-Cadeiras	→	Pré-Operatória	→	IC
Acerto-Cadeiras	→	Funcionais-Concretas	→	IIA
Regra-Mais-Um	→	Funcionais-Concretas	→	IIB
Regra-Mais-Três	→	Funcionais-Concretas	→	IIC
Regra-Mais-Quatro	→	Funcionais-Concretas	→	IID
Regra-Mais-Dois	→	Funcionais-Recursivas	→	III

A necessidade de "junção das mesas" pode ser considerada como um conceito-em-ação, que mobiliza o teorema-em-ação de "contar os lugares cada vez que uma mesa é introduzida". Esta contagem está presente nas estratégias funcionais-concretas, nas quais a criança percebe que há uma relação entre o número de mesas e cadeiras, mas não está certa de que pode construir e utilizar um cálculo matemático para calcular o número de lugares, a partir do número de mesas.

No Nível III de respostas é evidente o uso do teorema-em-ação "adicionar dois lugares cada vez que uma mesa é introduzida", com base no conceito-em-ação da "permanência dos lugares nas pontas das mesas", pois os sujeitos do Nível III percebem que as cadeiras da ponta das mesas nunca são retiradas, e são sempre introduzidos dois lugares nas laterais da nova mesa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Identificamos quatro invariantes operatórios: os teoremas-em-ação "contar os lugares cada vez que uma mesa é introduzida" e "adicionar dois lugares cada vez que uma mesa é introduzida", respectivamente ligados com os conceitos-em-ação "junção das mesas" e "permanência dos lugares nas pontas das mesas".

CONTRIBUIÇÃO DE CADA AUTOR

VCB foi responsável pela coleta de dados, pela organização da escrita do artigo e pela conferência geral da consistência entre metodologia e resultado constados. JAS foi responsável pela orientação sobre os pressupostos teóricos, pelos encaminhamentos metodológicos e pelo acompanhamento da escrita. As considerações finais foram discutidas e escritas por ambos os autores.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo estão todos disponibilizados pelos autores, VCB e JAS, nas tabelas que compõem o próprio texto do artigo.

REFERÊNCIAS

Baumgart, J. K. (1992). *Álgebra*. Editora Atual, São Paulo. Coleção Tópicos em sala de aula para uso em sala de aula - Volume 4. Tradução de Higino H. Domingues.

Beck, V. C., & Silva, J. A. (2015). Pensamento Algébrico Funcional: O Uso da Previsão de Resultados em Problemas Aditivos. *Teoria e Prática da Educação*.18, 69-78.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*. 36(5), 412-446.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S.(2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher.

Brasil. (2012). *Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental*. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília.

Canavarro, A. P. (2007). O Pensamento Algébrico na Aprendizagem Matemática nos Primeiros Anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 53-59.

Delval, J. (2002). *Introdução à Prática do Método Clínico:* descobrindo o pensamento das crianças. Tradução de FátimaMurad. Porto Alegre: Artmed.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In: Greenes, C.; Rubenstein, R. (Eds). *Algebra and algebraic thinking in school:* Seventieth Yearbook, (127-149). National Council of Teachers of Mathematics. VA, Reston.

Irwin, K. C., & Britt, M. S. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zeland Numeracy Project. *EducationStudies in Mathematics*, *58*(2), 169-188.

NCTM. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. (2008). (1.ed. 2000). Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2.ed., APM, Lisboa.

Piaget, J. (1971). *A Epistemologia Genética*. Editora Vozes, Petrópolis.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *Gênese das Estruturas Lógicas Elementares*. Editora Zahar, Rio de Janeiro.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1979). *Memória e Inteligência*. Editora Artenova, Brasília.
Stephens, M., & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education*, *1*(1), 28-39.
Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 3.ed. Curitiba: Editora da UFPR.
Vergnaud, G. (1990). La théorie dês champsconceptuels. *Recherches em Didactique dês Mathématiques*, *10*(2,3), 133-170.
Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In: Nunes, T. & Brynt, P. (Eds.) *Learning and teaching mathematics, an international perspective*. Psychology Press Ltd, Hove (East Sussex).