ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5795

Uma Engenharia Didática no Processo de Investigação da Generalização da Sequência de Padovan: Uma Experiência em um Curso de Licenciatura

Renata Passos Machado Vieira[a]
Francisco Regis Vieira Alves[b]
Paula Maria Machado Cruz Catarino[c]

[a] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, CE, Brasil.
[b] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Departamento de Matemática, Fortaleza, CE, Brasil.
[c] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – UTAD, Departamento de Matemática, Vila Real, Portugal.

Recebido para publicação 9 abr. 2020. Aceito, após revisão 29 jun. 2020
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Obstáculos são encontrados durante pesquisas referentes a construção epistemológica de conceitos matemáticos, contribuindo com a Didática da Matemática por meio de um estudo da sequência de Padovan. **Objetivos:** descrever elementos de um estudo sistemático, fundamentado na Engenharia Didática em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas, referente ao modelo de generalização da sequência de Padovan, promovendo ainda uma compreensão histórico-evolutiva e, as suas propriedades matemáticas. **Design:** apresenta os dados mais representativos de uma investigação amparada pelos fundamentos de uma Engenharia Didática, utilizada como design de pesquisa, em associação com a Teoria das Situações Didáticas, como metodologia de ensino. **Ambiente e participantes:** a pesquisa foi desenvolvida em 2019 e aplicada no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de História da Matemática, com os oito estudantes matriculados. **Coleta e análise de dados:** a validação dos dados ocorreu de forma interna, devido ao curto período temporal da pesquisa. **Resultados:** descreve uma investigação em torno do objeto de estudo, denominado de sequência de Padovan, com enfoque no processo de generalização dessa sequência e de suas propriedades. Assim, são elaboradas três situações-problema e analisadas com base nas metodologias de pesquisa e ensino assumidas, buscando examinar as suas propriedades e o pensamento intuitivo do estudante, diante da inserção de uma concepção histórica-epistemológica dessa investigação. **Conclusões:** a pesquisa possibilita extrair repercussões, sugerir e promover roteiros de investigação visando a formação de professores (inicial) no âmbito do ensino de História da Matemática.

Palavras-chave: Engenharia Didática; História da Matemática; generalização; sequência de Padovan; Teoria das Situações Didáticas.

Autor correspondente: Renata Passos Machado Vieira. Email: re.passosm@gmail.com

A Didactic Engineering in the Research Process of the Generalization of the Padovan Sequence: An Experience in a Pre-Service Teacher Training Course

ABSTRACT

Background: Obstacles are found during the epistemological construction of mathematical concepts research, aiming to contribute to the Didactics of Mathematics through a study of Padovan sequence. **Objectives**: describe elements of a systematic study, based on Didactic Engineering in conjunction with the Theory of Didactic Situations. I addition, referring to the generalization model of Padovan sequence and promoting a historical-evolutionary understanding and its mathematical properties. **Design:** it presents the most representative data of an investigation supported by the foundations of Didactic Engineering research design, in association with the Theory of Didactic Situations teaching methodology. **Setting and Participants:** the research was developed in 2019 and applied in a Pre-Service Mathematics Teacher Training Course in the History of Mathematics discipline, with the eight students enrolled. **Data collection and analysis:** data validation occurred internally due to the short period of the research. **Results:** it describes an investigation around the object of study, the Padovan sequence, focusing on the generalization process of this sequence and its properties. Thus, three problem situations are elaborated and analyzed based on the assumed research and teaching methodologies, seeking to examine their properties and the student's intuitive thinking, before the insertion of a historical-epistemological conception of this investigation. **Conclusions:** the research makes it possible to extract repercussions, suggest and promote research scripts aiming at the formation of teachers (initial) in the context of the teaching of History of Mathematics.

Keywords: Didactic Engineering; History of mathematics; generalization; Padovan sequence; Theory of Didactic Situations.

INTRODUÇÃO

Atualmente, muitas são as pesquisas que investigam o ensino/aprendizagem dos conceitos matemáticos e a sua correspondente disposição no plano pedagógico, contribuindo assim para a Didática da Matemática (Oliveira & Alves, 2019). Ressalta-se que muitos pesquisadores franceses consideram essa didática como um campo científico, com as metodologias alinhadas, possuindo o viés de estudar a dimensão do conhecimento matemático, através de sistemas didáticos associados à processos de ensino e de aprendizagem (Artigue, 2015). Com isso, reúnem-se ainda, inúmeras investigações referentes aos obstáculos existentes na sua construção epistemológica.

Diante do cenário indicado, foi realizado um levantamento em livros de História da Matemática, trazendo a sequência de Fibonacci como conteúdo referente às sequências lineares e recorrentes. Porém, essa sequência possui a sua relação de convergência como sendo o número de ouro, onde este e o número plástico são as duas únicas soluções dos números mórficos (Ferreira, 2015; Spinadel & Buitrago, 2009). Feito isso, buscou-se uma sequência em que apresentasse a sua relação de convergência relacionada ao número plástico, descobrindo então a sequência de Padovan.

Portanto, nesse contexto que é realizamos um estudo sobre a evolução histórica e investigativa da sequência de Padovan, transformando-a num conteúdo a ser ensinado. Durante o processo de ensino dos conceitos matemáticos referentes a esse objeto de estudo, podem surgir alguns obstáculos, sendo superados através do processo de evolução dessa sequência, com ênfase na sua generalização.

Para tanto, são considerados os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, visando estruturar este estudo investigativo, fundamentado na metodologia ou *design* de pesquisa da Engenharia Didática (ED) de Artigue (1988), em caráter de complementaridade a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1976) em torno do contexto histórico dos números de Padovan.

Assim, é apresentada a justificativa inicial para este trabalho, seguindo com as análises prévias apoiada na (ED). Com base nisso, justifica-se a presente pesquisa fundamentada na seguinte pergunta norteadora: como desenvolver situações didáticas que oportunizem a investigação sobre os números de Padovan, de seus teoremas e de suas propriedades, explorando ainda a sua representação matricial numa perspectiva epistemológica, em relação a sua origem e evolução histórica?

Assim, oferecendo as ferramentas necessárias para um aperfeiçoamento das práticas em sala de aula, pretende-se apresentar uma abordagem didático-matemática aos professores de Matemática em formação inicial. Visando, ainda, superar os eventuais obstáculos, são traçados os objetivos gerais e específicos destacando os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática, fundamentados na (ED). Temos então o objetivo geral da pesquisa, como sendo: descrever elementos de um estudo sistemático, fundamentado na (ED) em conjunto com a (TSD), referente ao modelo de generalização da sequência numérica de Padovan, promovendo ainda uma compreensão histórico-evolutiva e, também, explorando as suas propriedades matemáticas (Alves, 2015; 2017).

A partir do objetivo geral, foram traçados os objetivos específicos, a saber: 1) investigar os teoremas e propriedades inerentes à generalização das representações matriciais, fórmula de Binet da sequência de Padovan; 2) explorar, através de situações de ensino, o processo de generalização da sequência de Padovan; 3) aplicar o desenvolvimento histórico-evolutivo da sequência de Padovan em relação ao seu processo de generalização, através de situações-problema em sala de aula.

Ressalta-se que este trabalho é um recorte da pesquisa realizada no Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), fundamentada na metodologia de pesquisa (ED), em associação com a metodologia de ensino (TSD). Vale salientar que, este artigo possui o parecer aprovado no Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (parecer: 3.314.835), sendo então elaboradas situações didáticas estruturadas de ensino, motivando os estudantes a desenvolverem o raciocínio intuitivo durante a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

ANÁLISES PRELIMINARES

Baseada na (ED), as análises preliminares desta pesquisa foram divididas em duas etapas, a saber: na primeira, realiza-se um sistemático levantamento bibliográfico da metodologia de pesquisa utilizada (ED), da metodologia de ensino TSD e do objeto de estudo, que é a sequência de Padovan; na segunda etapa, procede-se uma abordagem didático- metodológica sobre a sequência de Padovan, correlacionando-a com a sua aplicação e o seu planejamento e desenvolvimento em sala de aula. Por exemplo, Maschietto (2008) realizou uma análise das diferentes maneiras de utilização de uma determinada função: local, pontual, global, ideia de retidão local e modo de pensar. As análises epistemológicas desenvolvidas propositaram compreender a linguagem utilizada e mobilizada pelos sujeitos participantes do estudo, identificando o emprego de regras matemáticas.

Ao construir o referencial teórico, realizaram-se aprofundamentos matemáticos sobre os números de Padovan para, posteriormente, desenvolver o processo histórico-evolutivo, enfatizando a generalização dos seus termos iniciais e dos coeficientes da fórmula de recorrência, com base nos trabalhos de: Vieira e Alves (2018; 2019), Seenukul Seenukul, Netmanee, Panyakhun, Auiseekaen, e Muangchan (2015), Sokhuma (2013), Gulec e Taskara (2012), Spinadel e Buitrago (2009), Civciv e Turkmen (2008) e Stewart (1996). Vale ressaltar que, o desenvolvimento da generalização da sequência de Padovan, foi baseado nos trabalhos científicos descritos e que, alguns dos conteúdos matemáticos apresentados possuem um certo grau de ineditismo, uma vez que algumas propriedades discutidas nesta pesquisa não foram encontradas na literatura científica até o presente momento.

Por fim, análises referente às metodologias (ED) e (TSD), foram executadas, com o viés de investigar as situações de ensino, diante da vertente francesa da Didática da Matemática, ressaltando outras pesquisas desenvolvidas em um contexto similar ao nosso: Oliveira, Alves e Silva (2019), Vieira, Alves e Catarino (2019), Alves e Dias (2018), Artigue (2018; 2015; 2014; 1995; 1988), Oliveira (2018), Alves e Catarino (2017), Santos (2017), Almouloud (2016; 2007), Perrin-Glorian e Bellemain (2016), Alves (2016; 2014), Kidron (2014), Teixeira e Passos (2013), Margolinas (2012), Oliveira e Araújo (2012), Brousseau (2008; 2002; 2000; 1997; 1986; 1982; 1976), Laborde (1997).

Ainda na segunda etapa de análises preliminares, foram examinadas a matriz curricular e ementas das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), no ano de 2019, selecionado por ofertar curso de formação inicial para professores de Matemática. Sendo, portanto, a mais adequada para esta pesquisa a disciplina de História da Matemática, por ser obrigatória no curso, por abranger assuntos inerentes ao conceito de números e o sistema de numeração, apresentar a biografia dos matemáticos que contribuíram para o processo histórico da matemática no Brasil e realizar um estudo histórico de sequências numéricas e recorrentes (Alves, 2015; Alves; Vieira; Catarino & Mangueira, 2020).

Apesar do conteúdo de sequências ser estudado na seção que discute a História da Matemática, este retrata apenas a sequência de Fibonacci, negligenciando um exame sobre a sequência de Padovan. Pode-se notar ainda, que em nenhum dos livros adotados na disciplina nessa instituição, apresentam os números de Padovan, encontrando este conteúdo apenas na *internet*, através de artigos científicos em matemática pura, publicados em jornais nacionais e internacionais, revistas, entre outros.

ENGENHARIA DIDÁTICA

Visando o aperfeiçoamento de determinadas práticas no sistema de ensino, surgiu nos anos 80 na França, a (ED), desenvolvida para a compreensão de fenômenos derivados do ensino e da aprendizagem em Matemática. Segundo Artigue (1988), essa metodologia representa um trabalho comparável ao de um engenheiro (*l´ingénieur*), em que necessita apoiar-se em conhecimentos científicos de seu domínio técnico, sendo ainda obrigado a trabalhar com objetos mais complexos do que os depurados das Ciência. Com isso, o docente assume o papel de um engenheiro, realizando planejamentos para que os estudantes possam compreender determinados saberes científicos.

Durante o seu surgimento, observaram-se alguns riscos referentes as transformações de ensino, havendo indagações que o sistema não estava preparado para tal mudança substancial, tornando o papel do professor como objeto de estudo (Perrin-Glorian & Bellemain, 2016). Porém, atualmente é considerada uma importante metodologia de pesquisa ou *design* investigativo, desenvolvendo um expediente de análise e estudo do comportamento dos estudantes e do professor, possuindo um interesse em modelizar as atividades desses, durante o processo de aprendizagem.

Alves e Catarino (2017) afirmam ainda que, a (ED) possibilita o estudo dos fenômenos que acontecem em sala de aula, desenvolvendo recursos para a formação do docente. Assim, permite-se analisar a importância da atividade do professor e sua ação de transposição didática (Chevallard, 1991) dos saberes científicos. Esses estudos desenvolvidos no campo da vertente francesa da Didática da Matemática, em torno do interesse do papel do professor, consideram as condições e experimentações científicas ocorridas em sala de aula (Artigue, 2018). Com origem nessas perspectivas, assumimos o caráter de relevância para abordar o processo de generalização da sequência de Padovan com a metodologia de (ED) em associação com a (TSD) no curso de formação inicial de professores de matemática, dando ênfase na atividade de formação e aprendizagem do professor de Matemática.

Portanto, esta pesquisa adotou a metodologia da (ED), podendo ser apresentada através de dois níveis de pesquisa, microengenharia e macroengenharia. Em que a primeira, possui uma visão mais limitada em relação aos fenômenos da sala de aula. Já a segunda, retrata uma visão mais global desses fenômenos. Diante de tal categorização, este trabalho é realizado com base em uma microengenharia, desenvolvendo uma (ED), objetivando o ensino e a generalização da sequência de Padovan. Esse nível de pesquisa é considerado complexo, uma vez que os fatos e fenômenos vistos e registrados em sala de aula "não são fáceis de se desenvolver na prática" (Artigue, 1995, p. 36).

Estudando a relação entre a teoria e a prática, esta metodologia é dividida então em quatro fases clássicas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e a validação interna e validação externa (Laborde, 1997). Alves (2014) considera ainda que a aplicação das fases da (ED) é indispensável para o processo de investigação e interpretação dos dados. Na análise preliminar, com a identificação dos problemas relevantes de ensino e aprendizagem, é realizado um levantamento bibliográfico em torno do tema a ser investigado. De acordo com Artigue (1995), esta etapa é analisada em três dimensões: em relação a epistemologia, comparando-a com um jogo; cognição, sendo então relacionada com as características dos estudantes em análise; e a didática, referente ao sistema de ensino. Ressalta-se que esta fase (de análise preliminar) foi introduzida na seção anterior, compreendendo investigações na literatura inerente e a sobre a sequência de Padovan.

Na segunda etapa, a concepção e análise *a priori* envolve o momento onde são escolhidas as variáveis, podendo ser de natureza macrodidáticas ou microdidáticas, das quais serão discutidas mais adiante, durante a concepção das situações didáticas produzidas em nosso estudo. Após a escolha das variáveis didáticas, o professor-pesquisador deverá então construir as situações-problema de acordo com o campo epistêmico-matemático desenvolvido, para então serem aplicadas posteriormente com os estudantes, visando alcançar o objetivo da pesquisa. Almouloud (2007) afirma ainda que:

> A análise *a priori* é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico (Almouloud, 2007, p.176).

Na terceira fase, a experimentação, é o momento onde são aplicadas as situações-problema desenvolvidas na fase anterior. Artigue (2015) comenta ainda durante esta fase, os pesquisadores serão observadores, podendo ainda realizar adaptações do *design* da aplicação, principalmente quando a (ED) não está evoluindo conforme o planejado, devendo essas serem documentadas e justificadas para que sejam levadas em consideração quando ocorrer a análise *a posteriori* ao final.

Nesse momento deve ser estabelecido o contrato didático, onde o docente e o estudante assumem as suas respectivas responsabilidades, sendo este, portanto, os comportamentos esperados dos estudantes pelos professores e vice-versa. Deve-se haver ainda um acordo entre o professor e os estudantes, durante as situações didáticas de ensino ocorridas em sala de aula (Brousseau, 1986). Ressalta-se que nem sempre esse contrato didático é consolidado, uma vez que existem casos em que os estudantes não possuem interesse pelas atividades propostas, ocorrendo uma ruptura do contrato. Por outro lado, desde que consideramos um grupo de professores em formação inicial, prevemos a não ocorrência de rupturas, tendo em vista o interesse dos sujeitos pelo ensino no contexto histórico.

Por fim, a última fase da ED, na análise *a posteriori* e na validação, os dados coletados durante a experimentação são analisados, sendo registrados através de fotos, gravações de áudios, escritas, entre outros. É então realizada uma comparação desses dados com as definições estabelecidas na análise *a priori*, validando as hipóteses assumidas durante a investigação, através de dois tipos de validação: interna e externa. A primeira envolve uma análise somente dos estudantes que participaram da pesquisa, enquanto a segunda analisa não só os participantes da pesquisa, como também os que não participaram da sequência didática, dependendo também da quantidade de participantes (Laborde, 1997). Artigue (2014), afirma ainda que a validação das hipóteses formuladas pode ocasionar em uma coleta de dados complementares aos dados já coletados durante a fase da experimentação, uma vez que é necessário que haja uma apreciação dos resultados durante o processo de aprendizagem. Com isso, os registros dos dados devem ser feitos de maneira minuciosa, detalhando e registrando todos os processos realizados pelos estudantes em sala de aula, no momento de suas resoluções.

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

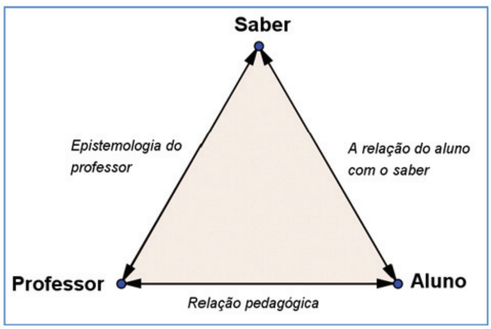
Durante a fase da experimentação da (ED), momento em que são aplicadas as sequências de ensino, necessita-se que essas sejam fundamentadas em situações didáticas estruturadas de ensino, sendo portanto direcionadas ao processo de ensino e aprendizagem. À vista disso, destaca-se a (TSD), desenvolvida por Brousseau, como sendo uma clássica teoria da vertente francesa da Didática da Matemática, cujo um dos objetivos principais envolve a modelização de saberes. (Santos, 2017).

Sua ocorrência na França, na década de 60, essa metodologia foi desenvolvida diante de uma análise da transição entre a escola secundária e o *locu*s universitário. Assim, os pesquisadores franceses realizaram um estudo referente à abordagem de ensino da área de Matemática, considerando as práticas socioculturais e institucionais (Kidron, 2014). Com isso, Brousseau (2000) afirma que:

> Trata-se de construir um modelo de situações usadas para introduzir ou ensinar noções matemáticas (e criticá-las), além de imaginar outras mais apropriadas. Ao colocar os problemas desta maneira, é possível analisá-los, de modo particular o seu cálculo, juntamente com os argumentos da organização lógico-matemática do conhecimento, argumentos econômicos e ergonômicos. Mas também, é possível considerar outras restrições, em particular, aquelas que podem aparecer como conclusões de obras da psicologia ou sociologia, com a condição de torná-los funcionais, ou seja, de especificar como eles intervêm efetivamente (Brousseau, 2000, p. 11, tradução nossa).

Com isso, essa metodologia tem como característica, a elaboração de um conjunto de situações estruturadas, que serão aplicadas em sala de aula, visando investigar o comportamento dos estudantes durante a resolução dos problemas propostos. Almouloud (2007) destaca ainda, que nessa metodologia de ensino, os professores, alunos e o meio (*milieu*) são elementos indispensáveis para que exista a relação de ensino e aprendizagem. Representada através do triângulo didático, essa tríade (ver Figura 1), tem o meio como o principal elemento, permitindo a evolução do conhecimento.

Figura 1
Triângulo didático. (Oliveira & Araújo, 2012, p. 214)



É com base nessa tríade ou "trinômio clássico", que são realizadas as trocas de informações e o debate científico, através de uma linguagem matemática e codificada, analisando o comportamento dos estudantes. Oliveira e Araújo (2012), consideram ainda que o sujeito deve aprender de acordo com a adaptação do meio, existindo assim dificuldades a serem superadas durante as situações.

Uma situação, segundo Brousseau (2008) é "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, reunindo as circunstâncias nas quais uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao *milieu*". Essas situações são elaboradas como uma espécie de jogo, onde o aluno é motivado a participar do processo de aprendizagem, desenvolvendo o seu próprio domínio e controle do jogo, conhecida como situações didáticas, a qual será utilizada nessa pesquisa. Porém, pode-se ainda existir uma outra situação, em que o estudante possui uma estratégia básica para assumir o conhecimento, proporcionando condições necessárias para adquirir o novo saber, sendo chamada de situação adidática. Estabelecida a noção de situação, o docente - pesquisador deverá analisar os elementos existentes nas etapas didáticas de ensino, com base em suas fases: ação, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 1986). Uma situação de ação, segundo Brousseau (2002):

A sequência de 'situações de ação' constitui o processo pelo qual o aluno elabora estratégias, ou seja, 'ensina a si mesmo' um método de resolver seu problema. Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio, constitui a dialética da ação. Usamos a palavra 'dialética' em vez da palavra 'interação' porque, por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições validadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação (Brousseau, 2002, p. 9, tradução nossa).

Nesse momento o estudante se depara com uma atividade proposta e busca em seus conhecimentos prévios, resoluções tácitas para uma situação - problema. Esse resultado obtido, não necessita seguir regras, pois poderão reajustá-los e corrigi-los posteriormente. Além disso, nessa fase dialética não existe a intervenção do docente. Alves (2016) considera essa fase como o momento em que o aluno se empenha para resolver a atividade proposta, produzindo um conhecimento específico, de uma natureza preliminar operacional. Em seguida, visando o emprego adequado de um sistema de símbolos, na situação de formulação, Vieira, Alves e Catarino (2019) resumem da seguinte forma:

> Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático (Vieira, Alves & Catarino, 2019, p. 268).

Durante esta etapa, o estudante apresenta uma linguagem mais formal e mais elaborada, formalizando as suas tentativas de resoluções desenvolvidas na fase anterior, para que, posteriormente esse argumento possa ser validado. Partindo do princípio de que o raciocínio é um experimento, temos que evoluir em cada uma das fases dessa teoria, aplicando assim as informações obtidas anteriormente.

Situação de validação, Oliveira, Alves e Silva (2019) reconhecem que:

> Tem-se a validação, na qual as conjecturas elaboradas são verificadas a fim refutá-las ou validá-las. Para isso, o aluno passa a apresentar uma linguagem mais teórica e formal, fazendo uso de propriedades e métodos de demonstrações matemáticas (Oliveira, Alves & Silva, 2019, p.4).

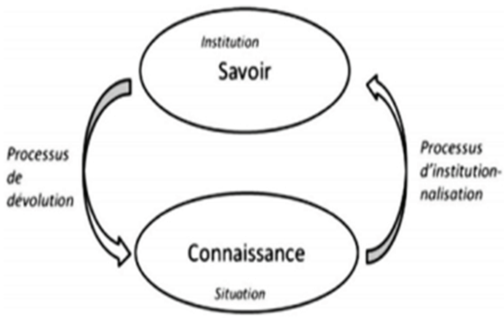
Na validação, os estudantes irão utilizar métodos matemáticos para demonstrar a validade das suas resoluções, apropriando-se de uma linguagem mais formal e científica, convencendo os interlocutores de seus argumentos. O objetivo dessa etapa é validar/confirmar as formulações realizadas durante as fases antecedentes de de ação e formulação, com a intenção de concluir o debate científico entre os estudantes (Alves & Dias, 2018). Situação de institucionalização, Brousseau (1997)

> O objetivo dos diferentes tipos de situações, cuja devolução nós abordamos, é que o próprio aluno dê sentido às peças de conhecimento que ele manipula, combinando esses diferentes componentes, dando sentido ao conhecimento adquirido. (Brousseau, 1997, p.235, tradução nossa).

Teixeira e Passos (2013) relatam que, nesta fase o professor reassume a responsabilidade da prática, que até então estava cedida aos estudantes, verificando as produções desenvolvidas pelos alunos, formalizando o objeto de estudo, revelando a sua intenção e, explicitando a sua função. Nessa última etapa, o professor assume novamente a situação, identificando e reconhecendo o saber construído nas demais etapas discutidas. As resoluções são conferidas, e é então revelada a real intenção da atividade proposta, avaliando a passagem do conhecimento (*connaissances*) e do saber científico (*savoir scientifique*). Margolinas (2012) difere o saber e o conhecimento, como sendo um ponto fundamental da Didática da Matemática. Assim, ela relata que o saber é o equilíbrio alcançado entre o sujeito e o local da aplicação, incluindo uma série de fatores, tais como: conhecimento corporal, conhecimento de ação, de interação, entre outros. Já o conhecimento, é considerado como uma construção social e cultural, sendo então descontextualizado, formalizado, memorizado, correspondendo à natureza textual. Temos, com isso, na Figura 2, o processo de devolução do saber e do conhecimento, não sendo considerado de forma trivial durante a intenção de ensinar. Com isso, o professor - pesquisador deve propor aos estudantes as situações de ensino, permitindo buscar conhecimentos correspondente ao saber (*le savoir mathematique*) já existente.

Figura 2

Modificações envolvendo o saber (le savoir) e conhecimento (connaissance) matemático previsto pela (TSD). (Margolinas, 2012, p. 8)



Contudo, destaca-se ainda que a (TSD) serve como base para a concepção e proposição das situações-problema que serão elaboradas, formando uma realização didática e estimulando o conhecimento dos estudantes e da construção do saber. Esse processo dar-se-á de uma forma não visível, onde as respostas não são obtidas de forma fácil. Por fim, vale ressaltar que é necessário comparar os resultados e as condições de sala de aula, as quais os dados foram coletados, visando uma eventual replicação da pesquisa. Com isso, existe a possibilidade de replicar o trabalho para a área de ensino de Matemática, de acordo com uma ação planejada pelo docente (Alves, 2016).

À seguir, é então iniciado e demarcado um campo epistêmico-matemático de interesse, referente à sequência de Padovan, com ênfase no processo de generalização desses números. Assim, são apresentados alguns teoremas e propriedades, bem como um breve histórico dessa sequência numérica, para posteriormente serem elaboradas as situações de ensino.

CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO

Com o intuito de investigar o processo de generalização da sequência de Padovan, enfatizando a generalização dos termos iniciais e dos seus coeficientes, estudos com base nos levantamentos bibliográficos são realizados. Assim, considerada parente da sequência de Fibonacci, a sequência de Padovan é uma sequência linear e recorrente de números inteiros, a qual o seu nome foi atribuído ao arquiteto italiano Richard Padovan, nascido na cidade de Pádua no ano de 1935 (Stewart, 1996). O matemático francês Gerard Cordonnier (1907-1977) também contribuiu para o estudo dessa sequência, descobrindo o número radiante ou número plástico. Com isso, essa sequência também é conhecida como sequência de Cordonnier, possuindo a sua fórmula de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ e com $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. O seu polinômio característico é dado pela seguinte equação $x^3 - x - 1 = 0$, possuindo três raízes, uma sendo real e duas complexas e conjugadas.

Ao contrário dos números de Fibonacci, em que possui a sua gênese na problemática reprodução dos coelhos imortais (Singh, 1985; Stakov, 2009), os números de Padovan não possuem uma situação-problema inicial. Contudo, durante o seu processo de desenvolvimento histórico e matemático, pode-se perceber uma evolução dessa sequência, surgindo formas de representações matriciais de sua generalização, registradas em trabalhos recentes e outras ainda não registradas.

No trabalho de Spinadel e Buitrago (2009), é realizado um estudo sobre a convergência entre os termos vizinhos e a sua relação com o número plástico. Sokhuma (2013) e Seenukul et al. (2015), desenvolveram algumas propriedades da forma matricial da sequência de Padovan. Por sua vez, Vieira e Alves (2018), definem uma generalização para os valores iniciais da sequência, denominando-a de Padovan Afim. Por fim, Gulec e Taskara (2012) e Turkmen (2008), generalizam os coeficientes de uma outra sequência linear e recorrente, porém neste trabalho, é então apresentado o mesmo raciocínio analítico para a sequência de Padovan, em sua forma matricial.

Propriedade 1. A relação de convergência entre os termos vizinhos de Padovan é (Spinadel & Buitrago, 2009):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx 1,32 = \psi$$

Teorema 1. A fórmula de Binet da sequência de Padovan é dada por:

$$P(n) = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n$$

em que $n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, x_3$ são as raízes do polinômio característico e sendo os seus respectivos coeficientes $A = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$.

Teorema 2. A matriz geradora da sequência de Padovan, é dada por (Sokhuma, 2013; Seenukul et al., 2015):

$$\text{Para } Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \text{ tem-se } Q^n=\begin{bmatrix}P_{n-2}&P_{n-3}&P_{n-4}\\P_{n-1}&P_{n-2}&P_{n-3}\\P_{n-3}&P_{n-4}&P_{n-5}\end{bmatrix}, \text{ para todo } n\geq 5.$$

Definição 1. A sequência de Padovan Afim é definida por (Vieira & Alves, 2018):

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3},$$

$n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ e com $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$ em que $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema 3. A matriz geradora da sequência de Padovan Afim, com w sendo o vetor de inicialização e $n \in \mathbb{N}$, é dada por (Vieira & Alves, 2018):

$$wQ^n = \begin{bmatrix}a_2 & a_1 & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}P_{n+2} & P_{n+1} & P_n\end{bmatrix}, n>0.$$

Teorema 4. A fórmula de Binet da sequência de Padovan Afim é dada por (Vieira & Alves, 2018):

$$P(n) = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n,$$

em que $n \in \mathbb{N}$, x_1, x_2, x_3 são as raízes do polinômio característico e sendo os seus respectivos coeficientes $A = \dfrac{a_2 - a_1x_2 - a_1x_3 + a_0x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B = \dfrac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_3 + a_0x_1x_3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C = \dfrac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_2 + a_0x_1x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$.

Definição 2. Para $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, a sequência (s_1, s_2)-Padovan, representada por $P_n(s_1, s_2)$ com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida pela recorrência:

$$P_{n(s_1,s_2)} = s_1P_{n-2(s_1,s_2)} + s_2P_{n-3(s_1,s_2)},$$

com os valores iniciais $P_{0(s_1,s_2)} = P_{1(s_1,s_2)} = P_{2(s_1,s_2)} = 1$. Para efeito de notação, utiliza-se $P_{n(s_1,s_2)} = B_n$

Teorema 5. A matriz geradora da sequência (s_1, s_2)-Padovan, para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$vQ^n = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\s_1&0&1\\s_2&0&0\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}B_{n+2} & B_{n+1} & B_n\end{bmatrix},$$

em que v representa o vetor linha com os valores iniciais da sequência de Padovan.

Visando realizar uma transposição didática desses conteúdos matemáticos, foram selecionadas algumas propriedades para serem exploradas em situações de ensino, oportunizando aos estudantes uma compreensão dessas relações e investigando seu o pensamento intuitivo. Diante disso, as situações didáticas propostas, são analisadas e discutidas com referência na (TSD).

CONCEPÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A concepção da situação didática presente neste trabalho, apresenta-se como um processo de generalização da sequência de Padovan transformando-o num conteúdo a ser ensinado em sala de aula, uma vez que o campo epistêmico-matemático desenvolvido nessa pesquisa, é discutido apenas em cursos de Matemática Pura. Contudo, para investigar e explorar os teoremas e propriedades matemáticos, é então elaborada uma hipótese didática referente ao objeto matemático em estudo, fundamentado na (ED) com enfoque na (TSD), isolando certas noções e propriedades matemáticas transpondo-o para um contexto existente em sala de aula. Esse fato, é definido, segundo os epistemológos, como uma transposição didática (Brousseau, 1997; 2002).

Assim, durante a concepção das situações didáticas, as variáveis são definidas, podendo ser microdidáticas ou macrodidáticas. A primeira, prever o comportamento dos estudantes e os possíveis obstáculos que podem ser encontrados durante a situação didática. A segunda, as escolhas da pesquisa são direcionadas de acordo com a estrutura geral da (ED) (Santos & Alves, 2017). Com isso, nesta pesquisa é então utilizada a variável microdidática, para que ocorra uma relação entre o conteúdo matemático referente à sequência em estudo, com as situações-problema propostas. Uma situação-problema consta de uma questão discursiva, apresentando os seus enunciados de forma clara e objetiva, utilizando o objetivo matemático implícito, para que seja alcançado durante a sua resolução (Almouloud, 2016). A escolha dos teoremas e propriedades, exigem pouco conhecimento matemático dos estudantes, visto que as suas demonstrações são realizadas por meio de passos indutivos.

ANÁLISE *A PRIORI* DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Visando prever o possível comportamento dos estudantes em cada uma das fases previstas pela (TSD), foi realizada uma ação descritiva e preditiva, levantando algumas hipóteses didáticas de acordo com as situações-problema, sendo, portanto, caracterizada como uma análise preliminar. Nesse sentido, o lado cognitivo do aluno é então estimulado, para que seja desenvolvido um conhecimento matemático teórico, diante das fases de ação, formulação e validação fundamentadas na metodologia de ensino da (TSD) (Oliveira & Alves, 2019).

Para explorar o processo de generalização da sequência de Padovan, foram elaboradas três situações-problema de acordo com as definições e propriedades estudadas no campo epistêmico-matemático. Com isso, será investigado esse processo em torno desses números originados da recorrência, relacionando-os com outros conteúdos matemáticos elementares (matrizes, sistemas, equações etc.) e relacionados com a atividade do professor de Matemática, visando elaborar um plano de ação para atender os objetivos assumidos na pesquisa.

Situação-problema 1: Seguindo a mesma perspectiva de evolução do conteúdo matemático, serão desenvolvidos estudos em relação a novas propriedades de sequências com características semelhantes à sequência de Padovan. Assim, denominada por Vieira e Alves (2018) de Padovan Afim, temos os seguintes termos dessa sequência: a_0, a_1, a_2, $a_0 + a_1$, $a_1 + a_2$, ... utilizando a matriz geradora base de Seenukul et al. (2015) e Sokhuma (2013), como podemos obter os termos dessa sequência, através dessa matriz?

Nessa primeira situação-problema, no momento da ação, deve-se buscar a fórmula de recorrência dessa sequência, para posteriormente obter a sua forma matriz. Durante a formulação, os estudantes deverão ter em mente a matriz geradora de Seenukul et al. (2015) e Sokhuma (2013), e a sua regra de construção, criando assim um vetor de inicialização, contendo esses valores iniciais. Assim, esse vetor deverá ser multiplicado à esquerda da matriz geradora, construindo o Teorema 3, $wQ^n = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}, n > 0$. Na validação, deve-se realizar a demonstração através do princípio da indução finita, comprovando a validade da matriz geradora.

Na última fase, na institucionalização, o professor reassume a situação didática e confere as resoluções dos estudantes, discutindo a importância da utilização da matriz geradora para a sequência de Padovan Afim, onde os seus termos iniciais são generalizados.

Situação-problema 2: Podemos então escrever uma função em que seja possível encontrar os termos dessa sequência, denominada de Padovan Afim, sem a necessidade de conhecer os seus termos anteriores? (Fórmula de Binet).

Durante a resolução dessa situação-problema, na ação, os estudantes deverão basear-se na fórmula de Binet geral, em que $f(n) = Ax_1^n + Bx_2^n + \ldots + Zx_z^n$, onde *A, B, ..., Z* são os coeficientes da fórmula de Binet e x_1, x_2, ..., x_z são as raízes do polinômio característico da sequência. A formulação, inicia-se com a construção do sistema de equações lineares, inserindo os valores iniciais dessa sequência, os seguintes termos $P_0 = a_0$, $P_1 = a_1$, $P_2 = a_2$.

Na fase da validação, deve-se resolver o sistema de equações e obter a fórmula $P(n) = Ax_1^n + Bx_2^n + Cx_3^n$ com $A = \dfrac{a_2 - a_1x_2 - a_1x_3 + a_0x_2x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$, $B = \dfrac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_3 + a_0x_1x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$, $C = \dfrac{a_2 - a_1x_1 - a_1x_2 + a_0x_1x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$ com x_1, x_2, x_3 as raízes da equação característica, e $n \in$ □.
Finalizando a última fase da (TSD), a institucionalização, o professor deverá formalizar essa situação, relatando a existência da representação dessa fórmula para a sequência de Padovan Afim.

Situação-problema 3: Baseado em trabalhos de Gulec e Taskara (2012) e Civciv e Turkmen (2008) e, de acordo com a Tabela 1, são representados os termos da sequência (S_1, S_2) - Padovan. Com isso, verifique se existe alguma relação dessa tabela com os termos (1,1,1,2,2,3,4,...). Caso exista, explique-a detalhadamente e determine alguns termos dessa sequência.

Tabela 1

Termos da sequência (S_1, S_2)*-Padovan.* (Elaborado pelos autores)

N	$B_n(s_1,s_2)$
0	1
1	1
2	1
3	s_1+s_2
4	s_1+s_2
5	$s_1(s_1+s_2)+s_2$

É possível obtermos uma matriz geradora para esta sequência estudada? Se sim, demonstre-a.

De acordo com a Tabela 1, os estudantes deverão relacionar esses números com a sequência de Padovan, durante a fase da ação, estabelecendo a relação $B_n = s_1 B_{n-2} + s_2 B_{n-3}, n \geq 3$, com $s_1, s_2 \in$ □ e apresentando os valores iniciais $B_0 = B_1 = B_2 = 1$, generalizando assim os coeficientes da fórmula de recorrência da sequência de Padovan. Dando continuidade à esse processo de generalização, temos que na formulação, deve-se então obter a matriz geradora com base nas matrizes estudadas anteriormente por Seenukul et al. (2015) e Sokhuma (2013) e, na obtenção da matriz da sequência de Padovan Afim (Situação-problema 1). Contudo, tem-se que na primeira coluna da matriz, é construído o operador, trazendo consigo os coeficientes da fórmula de recorrência da sequência. As demais linhas e colunas, permanecem de modo similar à matriz de Padovan estudada. É necessário que seja inserido um vetor com os valores de inicialização da sequência, sendo portanto, multiplicado à esquerda da matriz, de modo similar à situação-problema 1. Finalizando esta fase, os estudantes deverão obter a seguinte matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix}$, em que ao ser elevada à *n*-ésima potência, tem-se que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B_{n+2} & B_{n+1} & B_n \end{bmatrix}$.

Na validação, deve-se demonstrar por indução matemática, a matriz geradora encontrada, validando assim o teorema matemático formulado nessa atividade proposta. Por fim, na institucionalização, o docente deverá explicitar a construção de uma matriz geradora de uma sequência linear e recorrente, além do vetor de inicialização. Diante de uma perspectiva de evolução do conhecimento, segundo a (TSD), mostra-se um modelo de generalização da sequência de Padovan, provindo da compreensão dos estudantes em torno dos conteúdos abordados.

EXPERIMENTAÇÃO

Na terceira fase da (ED) de experimentação, segundo Lopes, Palma e Sá (2018):

> inicialmente é constituída pelo período de aplicação e experimentação das atividades anteriormente planejadas, colhendo dados sobre a investigação. Em um segundo momento, refere-se a análise dos resultados que serão obtidos na investigação. Esta fase baseia-se na análise do conjunto dos dados obtidos na experimentação durante as sessões de ensino, assim como produções dentro ou fora de sala (Lopes, Palma & Sá, 2018, p. 164).

É nesse momento em que ocorre a aplicação das atividades elaboradas, porém a ED deixa livre a maneira como esses dados serão coletados e analisados, sentindo a necessidade de utilizar uma metodologia de ensino. Após estudos realizados com base nos trabalhos de Brousseau (2008, 1986, 1976), foi então selecionada a (TSD) como a metodologia de ensino para esta pesquisa, pelo fato de instigar o lado intuitivo do estudante.

Portanto, esta fase aconteceu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza, no ano de 2019, durante a disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática, contendo oito estudantes (professores) que estavam matriculados na disciplina, dos quais se propuseram a participar da presente pesquisa. A aplicação aconteceu através de três situações-problema, discutidas e resolvidas em grupos, elaborando estratégias de resoluções, sendo, portanto, descritas em papéis e/ou quadro branco. Ressalta-se que a elaboração e a análise dessas atividades, foram fundamentadas na (TSD), realizando registros fotográficos e de gravações de áudios durante as produções síncronas e atividades dos sujeitos (professores em formação inicial).

ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO INTERNA

Durante a aplicação, Almouloud (2007) afirma que pode haver a necessidade de possíveis correções e ajustes, considerando os elementos mais relevantes durante o processo de experimentação. Após isso, ocorre a análise a posteriori, avaliando e analisando os resultados que são obtidos, para que ocorra uma contribuição de conhecimento didático durante a transmissão do conteúdo. Contudo, concluindo essa análise, ocorre então a validação dos elementos na fase de experimentação da (ED), realizando uma comparação com os resultados discutidos pelos estudantes, além de argumentar a evolução ou não da engenharia nessa pesquisa. As situações-problema que serão analisadas a seguir, são examinadas diante de uma variável microdidática, visto que são referentes à organização de uma fase da experimentação, como prevista por uma (ED) (Almouloud, 2016).

Com o desenvolvimento das situações didáticas, diante das atividades propostas, ocorreu a validação desta pesquisa. Com o objetivo de motivar o lado investigativo dos estudantes, induzindo-os a resolver os problemas apresentados, através de um contrato didático. As três situações-problemas proporcionaram o entendimento e compreensão dos conteúdos referentes ao processo de generalização da sequência de Padovan, de acordo com as variáveis didáticas. Essas variáveis são então selecionadas de acordo com a maneira como as questões são propostas.

Dando início à esse processo, temos a forma matricial da sequência de Padovan Afim, generalizando os termos iniciais da sequência. Seguindo o raciocínio, é então analisada a fórmula fechada para os termos de Padovan Afim, conhecida como fórmula de Binet. Por fim, é então estudada a forma matricial da sequência, com a generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência. Ressalta-se que durante a fase de validação da (TSD), o método indutivo foi utilizado para validar os teoremas e propriedades, por ser um método de demonstração conhecido pela turma analisada.

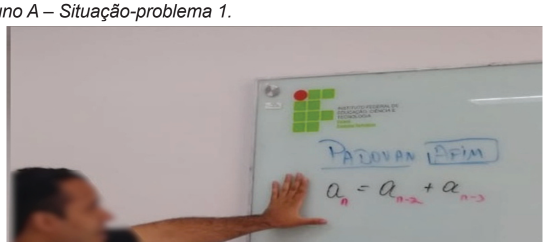
Dando início a aplicação dos dados, iniciamos com a distribuição de uma lista de exercícios para os estudantes, além de orientá-los que realizassem interações entre si. Essas atividades são, portanto, examinadas e discutidas no momento da resolução, formulando argumentos, visando o seu exame posterior, sendo então registradas por meio de gravações e fotos (Oliveira, 2018).

Na situação-problema 1, o objetivo geral é obter a forma matricial da sequência de Padovan Afim, a partir da matriz geradora de sequência de Padovan, definida por Seenukul et al. (2015) e Sokhuma (2013), oferecendo aos estudantes, uma base matemática, para que seja possível resolver a atividade proposta. Durante a coleta de dados, foram observadas, algumas dificuldades para criar o vetor com os termos iniciais da sequência. Porém, com a ajuda dos demais colegas durante as discussões, foi possível estabelecer esse raciocínio e resolver a questão.

Na Figura 3, é possível perceber a fase da ação acontecendo, no momento em que os estudantes conseguem compreender que a fórmula de recorrência será a mesma, possuindo somente os termos iniciais diferentes, logo: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$ e $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. Percebe-se na Figura 3, que o Aluno A nomeou o n-ésimo termo da sequência de Padovan Afim como sendo a_n, não havendo prejuízo no desenvolvimento de sua resolução.

Figura 3

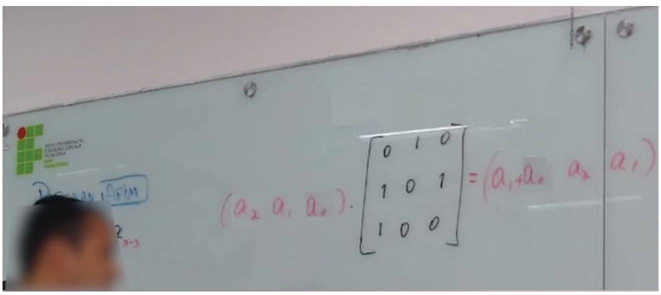
Fase da ação pelo Aluno A – Situação-problema 1.



Durante a fase da formulação, percebemos que o Aluno A conseguiu construir um vetor, contendo os valores iniciais da sequência, a partir da fórmula de recorrência verificada na fase anterior. Ao realizar, portanto, a sua multiplicação, obtêm-se a matriz geradora dos números de Padovan Afim, como mostrado na Figura 4. Somando o primeiro elemento dessa matriz e aplicando a recorrência, conclui-se que $a_1 + a_0 = a_3$, simplificando o resultado final. Ressalta-se a única dificuldade encontrada nesta fase, foi em relação a construção do vetor de inicialização, sendo portanto sanada ao realizar a interação com os demais colegas sobre definições e conceitos de álgebra linear.

Figura 4

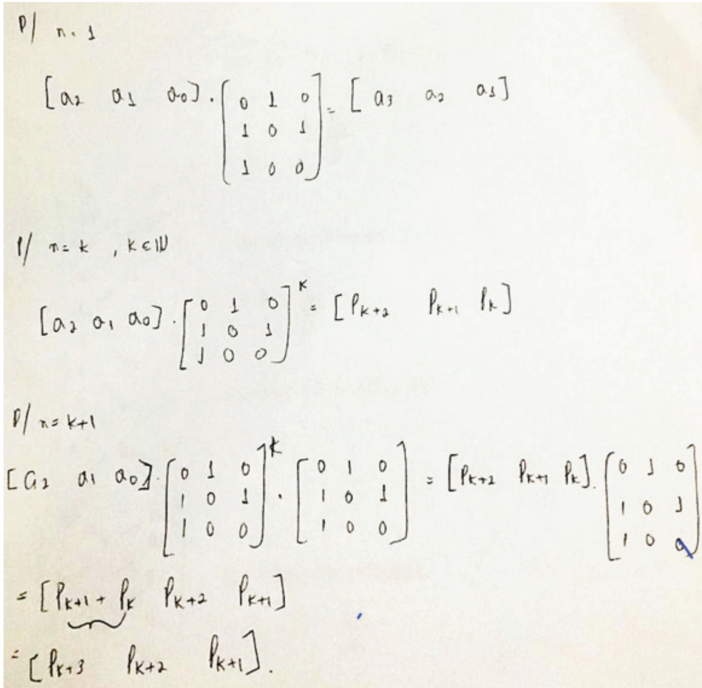
Fase da formulação pelo Aluno A – Situação-problema 1.



Para validar essa matriz, todos os estudantes participaram desse processo, realizando o passo indutivo matemático para demonstrar a matriz geradora de Padovan Afim. Nesse sentido, temos na Figura 5, esta fase realizada pelo Aluno C, sendo então selecionada por questões de organização matemática e escrita. Percebe-se que esse estudante, já simplificou a matriz de ordem 3x3, além de substituir o *n*-ésimo da sequência por P_n. Logo, abaixo, indicamos elementos de sua resolução.

Figura 5

Fase da validação pelo Aluno C – Situação-problema 1.

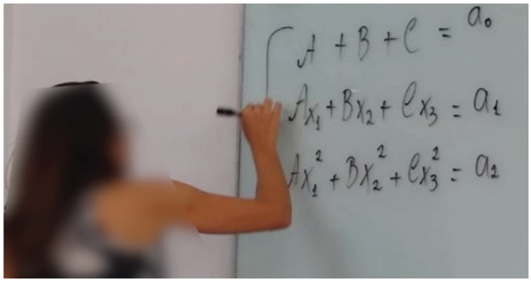


Dando continuidade, temos a resolução da situação-problema 2, em que os estudantes se deparam com a fórmula variante de Binet, onde baseados para a sequência de Padovan, deverão obter essa fórmula para os números de Padovan Afim. Com isso, temos o relato de um estudante:

> Aluno B: [...] essa fórmula será basicamente igual a de Padovan, sendo que durante a resolução do sistema de equações lineares, devemos inserir os valores iniciais generalizados para obter a nova fórmula de Binet desses números similares aos de Padovan [...].

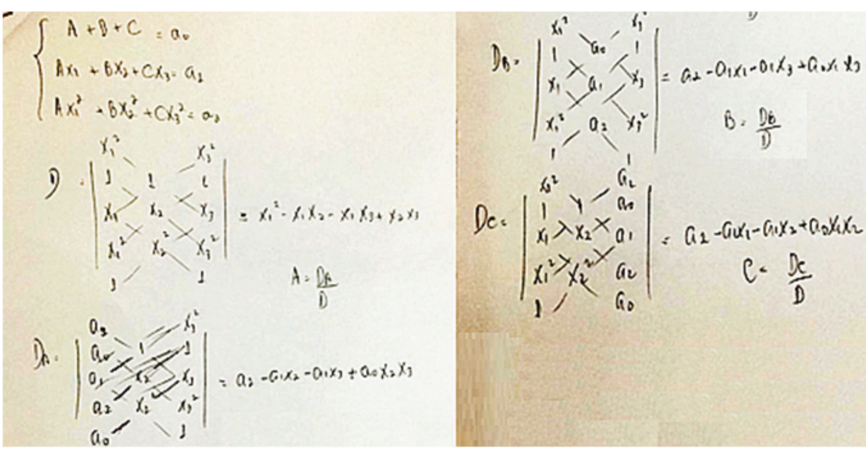
Essa afirmação, mostra um certo domínio em relação ao conhecimento dos estudantes referente à fórmula variante de Binet, iniciando a fase da ação, visto que essa discussão serve como base para a montagem do sistema de equações. Na Figura 6, percebemos a fase da formulação acontecendo pelo Aluno F, onde é realizada a descrição desse sistema, com três equações e três incógnitas, inserindo os valores iniciais generalizados. Visualizamos sua atividade na figura 6.

Figura 6
Fase da formulação pelo Aluno F – Situação-problema 2. (Dados da pesquisa)



Algumas dificuldades foram encontradas para resolver o sistema de equações com três variáveis, porém com a participação e ajuda dos demais estudantes, foi possível chegar a resolução dessa atividade, como mostrada na Figura 7, durante a fase da validação pelo Aluno E. Os coeficientes do sistema foram calculados através da regra de Cramer, e as raízes da equação característica foram mantidas com as suas respectivas nomenclaturas (x_1, x_2, x_3), não sendo usados os seus valores para o cálculo dos coeficientes, no momento resolução. Vale salientar que, os estudantes estavam cientes de que para calcular um termo da sequência, utilizando a fórmula de Binet, é necessário conhecer os valores dessas raízes da equação.

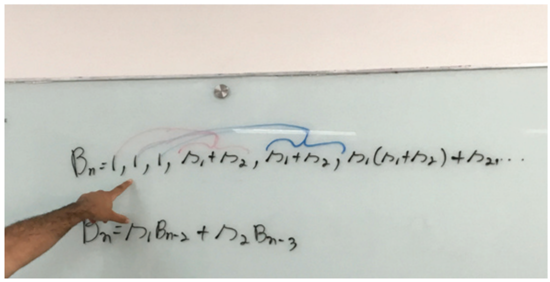
Figura 7
Fase da validação pelo Aluno E – Situação-problema 2.



Por fim, analisando a situação-problema 3, em que foram generalizados os coeficientes da sequência, pode-se identificar a fase da ação na Figura 8. O Aluno D, consegue estabelecer a fórmula de recorrência dessa sequência, comparando-a com a sequência de Padovan, percebendo assim a inserção de duas variáveis, s_1, s_2, nos coeficientes.

Figura 8

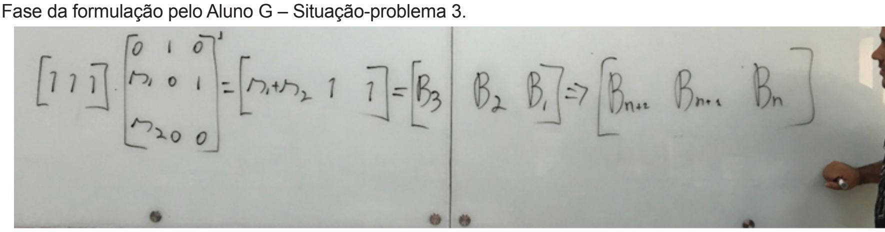
Fase da ação pelo Aluno D – Situação-problema 3.



Na fase de formulação, percebe-se a obtenção da forma matricial dessa sequência, com base na matriz geradora de Padovan e, no vetor de inicialização estudado na primeira situação-problema. O Aluno G, consegue compreender que a primeira coluna da matriz geradora, carrega consigo os valores dos coeficientes da fórmula de recorrência, como mostrado na Figura 9.

Figura 9

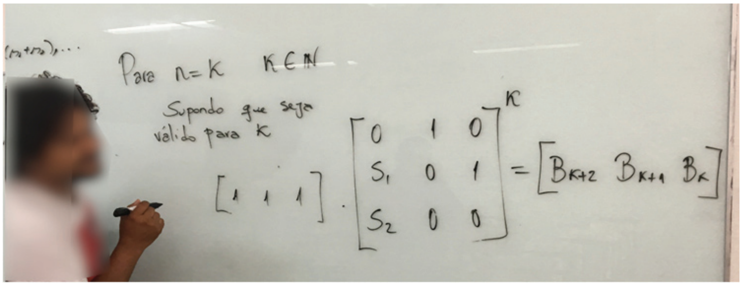
Fase da formulação pelo Aluno G – Situação-problema 3.



Na Figura 10, temos o Aluno H iniciando o processo de validação da matriz, através do passo indutivo matemático, sendo o primeiro passo realizado, para $n = 1$, quando o Aluno G obteve um matriz linha, após empregar o modelo indutivo (ver Figura 9).

Figura 10

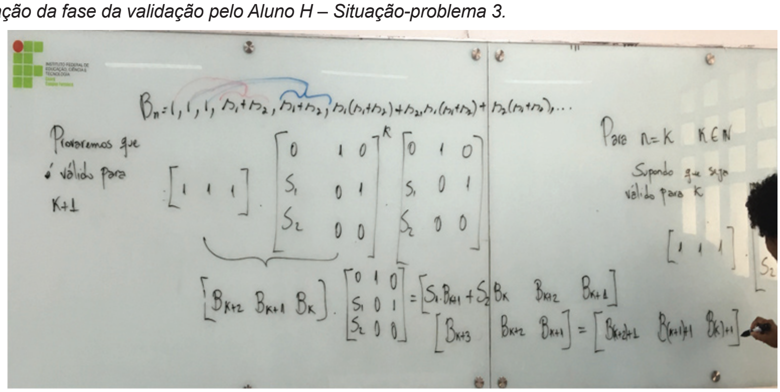
Fase da validação pelo Aluno H – Situação-problema 3.



Finalizando essa fase, temos o Aluno H, na Figura 11, dando continuidade ao processo de validação, verificando a validade para $n = k + 1$. Com isso, consegue-se validar um teorema não encontrado, até então, na literatura e em artigos científicos de Matemática Pura, referentes aos números de Padovan.

Figura 11

Finalização da fase da validação pelo Aluno H – Situação-problema 3.



Durante a institucionalização, realizada pelo docente - pesquisador, ao final de cada resolução das situações-problema propostas, foram analisadas as produções dos estudantes, destacando o processo evolutivo da sequência em torno da sua generalização. Na primeira situação-problema, foi possível validar o Teorema 3, obtendo a forma matricial da sequência de Padovan Afim, vista no trabalho de Vieira e Alves (2018). Ainda em relação ao trabalho desses autores, foi possível, na situação-problema 2, demonstrar o Teorema 4, a partir do Teorema 1, estudando os conceitos referentes à fórmula variante de Binet (Alves, 2015; 2017). Na terceira e última situação-problema, foi inserido um conteúdo novo em relação à generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência da sequência de Padovan, sendo, portanto, demonstrado o Teorema 5.

A validação dessa pesquisa aconteceu de forma interna (Laborde, 1997), visto que foram analisados somente as produções observadas neste trabalho e do grupo dos professores envolvidos, não as comparando com outras produções externas e, ainda pelo fato da quantidade de participantes ser considerada pequena (oito professores em formação inicial). Nesse processo, ocorreu uma comparação entre as fases de análise *a priori* e análise *a posteriori*, onde na primeira é realizada uma introdução do campo epistêmico-matemático, inserindo algumas propriedades e teoremas matemáticos. Na segunda, são selecionados alguns teoremas formais e elaboradas situações-problema, e analisadas as resoluções dos estudantes durante a fase da experimentação da (ED).

Ressalta-se que os estudantes manifestaram grande interesse pela pesquisa, como evidenciamos em comentários, um sentimento de descoberta de propriedades, como por exemplo:

> Aluno A: [...] me senti construindo o meu próprio conhecimento, ainda mais porque eu nunca tinha visto essa sequência antes, nem na matemática e muito menos dessa forma que está sendo repassado para a gente [...] . Alguns desses assuntos não são encontrados na literatura, isso mostra mais interesse da gente diante da resolução dos exercícios [...].

A fase da institucionalização da (TSD), possui importância nesse processo de validação dessa pesquisa, uma vez que, diante de uma perspectiva epistemológica, é nesse momento que acontece a comprovação e a construção dos conceitos matemáticos abordados em sala de aula. Foi possível perceber que os estudantes (professores em formação inicial), conseguiram construir o processo de generalização da sequência de Padovan, investigando teoremas matemáticos e descobrindo novas definições, além de considerar os seus aspectos cognitivos e didático - metodológicos.

Alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos foram encontrados no momento das resoluções, observando certa dificuldade ou estádios de inercia ou estagnação na formulação de algumas propriedades matemáticas, bem como a sua correspondente validação, visto que alguns estudantes (professores em formação inicial) argumentaram não lembrar do princípio da indução finita e nem do conceito de vetores. Porém, com origem na troca de informações e o debate científico entre os demais participantes, esses obstáculos ou entraves foram pacificados.

Assim, no campo didático, através das situações didáticas, foi possível compreender o processo de construção coletiva pelo grupo dos teoremas selecionados e apresentados, instigando o raciocínio indutivo dos estudantes e o seu entendimento no processo epistemológico evolutivo sobre a sequência de Padovan. Do ponto de vista da cognição, observou-se a evolução matemática dos estudantes nas clássicas fases de ação, formulação e validação previstas pela (TSD).

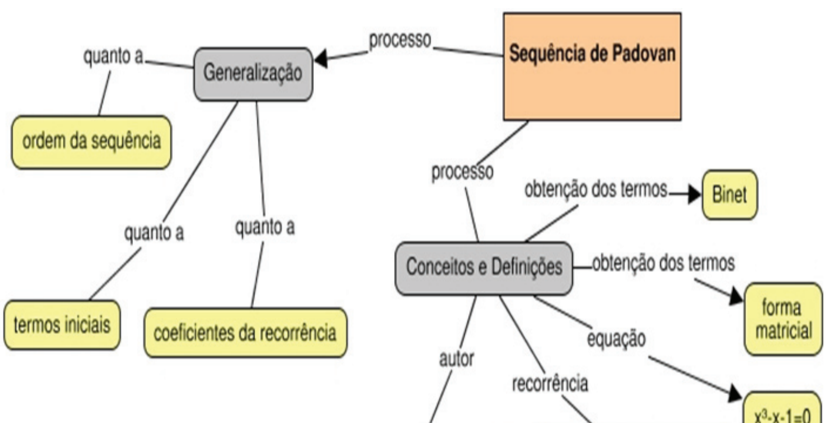
CONCLUSÕES

Com origem nos pressupostos de uma (ED), foi realizada nesta pesquisa, todas as análises internas, verificando as três atividades (situações didáticas estruturadas) propostas durante a fase da experimentação e com base na (TSD), auxiliando a prática do docente diante do ensino de Matemática e da História da Matemática nos cursos de formação inicial de professores. Ressalta-se a importância da influência francesa na cultura didática, uma vez que foi construída baseada na teoria construtivista do conhecimento (Artigue, 1995). Diante das investigações desenvolvidas em sala de aula, situações didáticas estruturadas foram elaboradas, podendo aplicá-las ou replicá-las em outras experimentações.

Na primeira fase, foi realizado um extenso levantamento bibliográfico em torno da (ED), (TSD) e do conteúdo referente ao processo de generalização da sequência de Padovan, selecionando esse objeto de estudo, por apresentar escassez de trabalhos relacionados ao ensino dessa sequência, abordando somente a parte matemática em cursos de Matemática Pura. Com isso, na Figura 12, temos o mapa conceitual dessa sequência de investigação, podendo selecionar conteúdos para serem abordados em cursos de graduação, diante do seu processo evolutivo. Assim, podemos visualizar a existência do processo de generalização matemática, de indução matemática e de descoberta dos conceitos e de novas definições básicas, essenciais para o estudo desses números (ver figura 12).

Figura 12

Mapa Conceitual da sequência de Padovan.



Durante a fase de experimentação prevista pela (ED), os estudantes (professores em formação inicial) puderam perceber o processo indene epistemológico e evolutivo diante da possibilidade de generalização dessa sequência numérica, manifestando surpresa ao determinar teoremas matemáticos e realizar a formulação de novas definições matemáticas ao decurso das situações, até então não estudados e encontrados na literatura científica (Vieira & Alves, 2018; 2019). Apesar das dificuldades ou entraves encontrados no decorrer da resolução das situações-problema, foi possível alcançar o objetivo geral deste trabalho, destacando ser esse um recorte da pesquisa realizada no curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, com o parecer aprovado no Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) (parecer: 3.314.835), uma vez que foram utilizados um conjunto representativos de dados empíricos realizados com a participação de seres humanos.

Ademais, os objetivos específicos foram alcançados, quando pudemos realizar uma transposição didática (Chevallard, 1991) referente ao conteúdo matemático discutido, realizando assim a promoção da compreensão dos estudantes em relação ao processo evolutivo e epistemológico dessa sequência ainda pouco discutida por parte de autores de livros de História da Matemática. Por fim, percebe-se a importância dessas atividades no contexto da História da Matemática, envolvendo ainda a formação de professores de Matemática (Alves, 2015; 2017), aliada com outras possibilidades de utilização da tecnologia. Com a utilização da (ED) e a (TSD), foi possível reconhecer as situações didáticas criadas, podendo ainda serem reproduzidas para outros locais de experimentações e investigações, circunstanciadas pelo *locus* acadêmico.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

F.R.V.A. realizou a supervisão do projeto. F.R.V.A., P.M.M.C.C. e R.P.M.V. conceberam a ideia apresentada e discutida nesta pesquisa. R.P.M.V. desenvolveu a teoria, adaptou a metodologia ao contexto da sala de aula vivenciada, criando modelos e coletando os dados. F.R.V.A., P.M.M.C.C. e R.P.M.V analisaram os dados e discutiram para realizar a contribuição final do manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os autores concordam que os dados que sustentam os resultados deste estudo estão disponíveis mediante solicitação razoável, a critério dos autores.

REFERÊNCIAS

Almouloud, S. A. (2016). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *11*(2), 109-141.

Almouloud, S. A. & Silva, M. J. F. da. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação em Matemática, Florianópolis*, *7*(2), 22-52.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. 3. ed. [S.l.]: Editora UFPR.
Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2017). Engenharia didática de formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no brasil. *Educação Matemática em Revista - RS*, *2*(18), 121-137.
Alves, F. R. V. & Dias, M. A. (2018). Engenharia Didática para o Teorema de Binet, ou Lamé, ou de De Moivre: Análises Preliminares e a *Priori. Rev. Ens. Educ. Cienc. Human. 19*(2), 103-113.
Alves, F. R. V.; Vieira, R. P. M.; Catarino, P. M. & Mangueira, M. M. (2020). Teaching recurrent sequences in Brazil using historical facts and graphical illustrations: an example of scientific cooperation Brazil x Portugal. *Acta Didactica Naposcencia*, *13*(1), 1–25.
Alves, F. R. V. (2017). Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *17*(33), 1–16.
Alves, F. R. V. (2016). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da Tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, *5*(2), 59-68.
Alves, F. R. V. (2015). Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. *VIDYA Revista Eletrônica*, *35*(1), 133-146.
Alves, F. R. V. (2014). Análise preliminar e análise a priori: Situações didáticas envolvendo a noção de integrais múltiplas. *Reportes de Investigación*, 1-9.
Artigue, M. (2018). Didáctica de las matemáticas y reproducibilidad Mathematics Education and reproducibility. *Educación Matemática*, *30*(2), 9-32.
Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. In: A. Bikner-Ahsbahs and C. Knipping, ed., *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education Examples of Methodology and Methods*, 1st ed. Springer, 467-496.
Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education, *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer Netherlands, D, 159-162.
Artigue, M, Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995*). Ingenieria Didactica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericano.
Artigue, M. (1995). Ingenieria Didática. In: Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P.. *Ingeniéria didatica en Educacion Matemática*.
Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308.
Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer
Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* Ática.
Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situationsin Mathematics Didactique de Mathématiques, 1970–1990*. Mathematics Education Library, 19.
Brousseau, G. (2000). Educacíon y didática de las matemáticas. *Educacíon Matemática*, *12*(1), 5-38.
Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.
Brousseuau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1982). *D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique*. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet.
Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement de la mathématiques. In: *Comptes Rendu de la XXVIIIE Reencontre Organisée par la Commission Internationale pour L'etude et L'amélioration de L'enseignement des Mathématiques. Louvain-la-neuve*, S.l., 101-117.
Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
Civciv, H. & Turkmen, R. (2008). On the (s,t)-fibonacci and fibonacci matrix sequences. *Ars Combinatoria*, 87, 161-173.
Ferreira, R. de C. (2015). *Números Mórficos*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
Gulec, H. H. & Taskara, N. (2012). On the (s,t)-pell and (s,t)-pell-lucas sequences and their matrix representations. *Applied Mathematics Letters*, *25*, 1554-1559.
Kidron, I. (2014). Calculus Teaching and Learning. *Encyclopedia of Mathematics Education*, C, 69-75.
Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia*, 1, 97-112.
Lopes, T. B., Palma, R. C. D. da & Sá, P. F. de. (2018). Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos pulicados no EBRAPEM (2014-2016). *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 159-181.
Margolinas, C. (2012). Connaissance et savoir Des distinctions frontalières?. *Sociologie et didactiques: vers une transgression des fronteires*. p. 1-39.
Maschietto, M. (2008). Graphic calculators and micro-straightness: Analysis of a didactical
engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(3), 207-230.
Oliveira, R. R. de; Alves, F. R. V. & Silva, S. A. da. (2019). Uma proposta de atividades com enfoque na Teoria das Situações Didáticas: identidades bi e tridimensionais Fibonaccianas. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, *9*(3), 1-13.
Oliveira, R. R. de & Alves, F. R. V. (2019). Um a Investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci Amparada na Engenharia Didática: uma Aplicação da Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae*, *21*(3), 170-193.
Oliveira, R. R. de (2018). *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais*. (Dissertação) Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.
Oliveira, G. P. & Araújo, P. B. (2012). Uma abordagem para o ensino de lugares geométricos com o GeoGebra. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, *7*(2), 209-222.
Perrin-Glorian, M. J. & Bellemain, P. M. B. (2016). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation desmaîtres. *I Seminário Latino-Americano de Didática da Matemática– LADIMA*, 1-51.

Santos, A. A. dos (2017). *Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como Modelo de Generalização e Extensão da Sequência de Fibonacci.* (Dissertação) Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.
Santos, A. A. dos & Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática, *Acta Scientiae*, *19*(3), 447-465.
Seenukul, P., Netmanee, S., Panyakhun, T., Auiseekaen, R. & Muangchan, S. (2015). Matrices which have similar properties to padovan q -matrix and its generalized relations. *Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology*, *7*(2), 90-94.
Singh, P. (1985). The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India, *Historia Mathematica*, *12*(1), 229–244.
Sokhuma, K. (2013). Padovan q-matrix and the generalized relations. *Applied Mathematical Sciences*, *7*(1), 2777-2780.
Spinadel, V. M. W. de & Buitrago, A. R. (2009). Towards van der Laan's plastic number in the plane. *Journal for Geometry and Graphics*, *13*(2), 163-175.
Stakov, A. (2009). *The Mathematics of Harmony*: *from Euclid to contemporary mathematics and computer science*, Word Scientific.
Stewart, I. (1996). Tales of a neglected number. *Mathematical Recreations – Scientific American*, 274, 102-103.
Teixeira, P. J. M. & Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. *Revista Zetetiké*, *21*(39).
Vieira, R. P., Alves, F. R., & Catarino, P. M. (2019). Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática. *Indagatio Didactica*, *11*(4), 261-279.
Vieira, R. P. M. & Alves, F. R. V. (2018). Sequência Padovan afim e as suas propriedades. *Revista Thema*, *15*(4), 1269-1276.
Vieira, R. P. M. & Alves, F. R. V. (2019). Explorando a Sequência de Padovan através de investigação histórica e abordagem epistemológica, *Boletim GEPEM*, *74*(2), 162–169.