

Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula

Adriana Richit ^a
Mauri Luís Tomkelski ^b
Andriceli Richit ^c

^a Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-graduação em Educação e Programa de Pós-graduação Interdisciplinar em Ciências Humanas, Erechim, RS, Brasil

^b Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

^c Instituto Federal Catarinense, Concórdia, SC, Brasil

Recebido para publicação 28 de out. 2020. Aceito após revisão 6 set. 2021.

Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: A abordagem exploratória, tema crescentemente investigado em Educação Matemática, vem sendo examinado como abordagem pedagógica subjacente à aula de investigação em estudos de aula. **Objetivo:** O artigo dedica-se a evidenciar e discutir as compreensões sobre área e perímetro mobilizadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental a partir da abordagem exploratória, a qual embasou a aula de investigação de um estudo de aula (lesson study). **Design:** Investigação qualitativa e interpretativa, baseada na análise de conteúdo. **Ambiente e participantes:** As atividades foram desenvolvidas em duas aulas, de duas horas cada, a partir das quais os alunos foram solicitados a resolver uma tarefa sobre os tópicos “área e perímetro”, elaborada por uma equipe de professores participantes em um ciclo de estudo de aula, justificando as suas estratégias, resultados e conclusões. **Coleta e análise de dados:** A análise baseou-se no material empírico constituído dos materiais relativos às resoluções apresentadas pelos alunos e das transcrições das gravações em áudio das discussões durante a resolução da tarefa e da discussão coletiva (momento final da aula de investigação). **Resultados:** A análise explicita aspectos relativos às compreensões sobre os tópicos área e perímetro, mobilizadas a partir da abordagem exploratória, que compreendem as seguintes categorias: medida, operação matemática e propriedade geométrica. **Conclusão:** A abordagem exploratória, subjacente à aula de investigação, favoreceu o aprofundamento das compreensões sobre área e perímetro, pois oportunizou aos alunos explorar e confrontar estes conceitos a partir de diferentes representações mobilizadas em uma tarefa aberta e, também, comunicar suas ideias e conclusões matemáticas

Palavras-chave: Abordagem exploratória; Compreensões sobre área e perímetro; Estudo de aula.

Autor para correspondência: Adriana Richit. Email: adrianarichit@gmail.com

Understandings of perimeter and area mobilized with an exploratory approach in a lesson study

ABSTRACT

Background: Exploratory teaching, a theme increasingly investigated in mathematics education, has been examined as a pedagogical approach underlying the research lesson in lesson studies. **Objective:** The purpose of this article is to present and discuss the understandings of area and perimeter mobilized by 8th-grade elementary school students based on an exploratory approach, which was the basis for the research lesson in the lesson study. **Design:** The research was qualitative and interpretive, based on content analysis. **Setting and participants:** The activities were conducted in two classes, of two hours each, in which the students were invited to resolve an exploratory task about the topic “area and perimeter”, which was prepared by a group of teachers participating in a cycle of a lesson study. The students were asked to explain their strategies, results, and conclusions. **Data collection and analysis:** The analysis was based on empirical material composed of the materials related to the solutions presented by the students and transcriptions of audio recordings of the students’ discussions as they solved the tasks and of group discussions (the final moments of the research lesson). **Results:** The analysis presents aspects related to understandings of the topics area and perimeter, mobilized by the exploratory approach, which comprise the following categories: measure, mathematical operation and geometric property. **Conclusion:** The exploratory approach, underlying the research lesson, favored a deepening of understandings about area and perimeter, because it gave students the opportunity to explore and confront these concepts from different representations mobilized in an open task and to communicate their mathematical ideas and conclusions.

Keywords: Exploratory approach; Understandings of area and perimeter; Lesson study.

INTRODUÇÃO

A abordagem dos conceitos de área e perímetro reveste-se de relevância, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental, por constituírem as bases para o desenvolvimento das relações entre conceitos situados em distintos subcampos da Matemática, tais como Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, os quais são aprofundados no nível de ensino seguinte (Ensino Médio). Além disso, estudos que focam as relações entre estes conceitos constituem uma frente de pesquisa consolidada em Educação Matemática, contribuindo fortemente para a compreensão dos fenômenos associados ao ensino e à aprendizagem destes tópicos curriculares e, também, por

estabelecerem alguns princípios epistemológicos e metodológicos para estes processos.

Por outro lado, a abordagem desses conceitos tem se mostrado complexa em face das dificuldades no processo de ensino reveladas por professores, a exemplo das abordagens caracterizadas pelo uso excessivo de fórmulas sem compreensão dos conceitos (Teles, 2007) e, especialmente, pelas dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos mesmos (Lima, 1991). Estes aspectos têm mobilizado pesquisadores ao redor do mundo, os quais buscam compreender as dificuldades associadas aos processos de ensino e aprendizagem desses tópicos (Artigue, 1990; Baltar, 1996; Facco, 2003; Pessoa, 2010).

Nesta direção, D'Amore e Pinilla (2006) destacam que a abordagem das noções de área e perímetro nos anos finais do Ensino Fundamental é marcada pelas dificuldades de aprendizagem dos alunos. O trabalho aponta que as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão das relações entre área e perímetro são de naturezas didática e epistemológica. Didática porque as abordagens frequentemente desenvolvidas pelos professores não oportunizam aos alunos identificar e compreender estas noções (D'Amore & Pinilla, 2006). Epistemológica porque os estudantes, por não compreenderem estes conceitos, os confundem (Ventura, 2013; Zils, 2018), ou por não reconhecerem as medidas de uma forma geométrica como um de seus elementos constituintes (Baltar, 1996). Além disso, Teles (2007) acrescenta que os alunos apresentam dificuldades em utilizar corretamente unidades de medida, enquanto que Melo (2003) aponta a dificuldade em dissociar os conceitos de área a perímetro. Estas dificuldades, segundo D'Amore e Pinilla (2006), acompanham muitos estudantes durante a trajetória escolar, até mesmo na universidade.

Dentre as dificuldades mais frequentes dos alunos na aprendizagem destes tópicos, French (2004) situa a dificuldade em dissociar área e perímetro e acrescenta que este fenômeno pode estar associado à simples confusão entre os termos que definem esses conceitos. Outras vezes, a dificuldade decorre de equívocos conceituais na medida em que os alunos concebem perímetro e área como grandezas indissociáveis, de tal maneira que a variação de uma delas implica na variação diretamente proporcional da outra (French, 2004; Ventura 2013). Nesta perspectiva, Lopes et al. (2008) destacam fragilidades associadas ao ensino e à aprendizagem de área: no ensino são apontados aspectos de natureza didática, tais como o reduzido tempo dedicado ao tema e o ensino precoce do conceito de área; na aprendizagem destacam principalmente as dificuldades de compreensão conceitual pelos alunos. Também Ventura (2013)

ressalta dificuldades conceituais relativas à área e perímetro e Zils (2018) evidencia dificuldades associadas ao entendimento e manipulação de definições e conceitos, equívocos entre definições e utilização de fórmulas.

Estes aspectos nos motivaram a desenvolver uma investigação centrada no objetivo de evidenciar e discutir as compreensões sobre área e perímetro mobilizadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental a partir da abordagem exploratória, a qual embasou a aula de investigação de um estudo de aula (lesson study). A análise faz parte de uma pesquisa interinstitucional, conduzida pelos autores do artigo, que tem se dedicado a examinar as possibilidades e os desafios da implementação de estudos de aula no contexto sul brasileiro. O estudo de aula, em face ao qual propomos a abordagem exploratória para os tópicos ‘área e perímetro’, envolveu oito professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, pertencentes a escolas públicas do Rio Grande do Sul, Brasil. Centramo-nos no 8º ano porque, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), recentemente instituída no sistema educativo brasileiro, ao final do referido ano escolar os estudantes devem ser capazes de determinar expressões de cálculo de perímetro e área de figuras geométricas planas, analisar relações entre estes conceitos e resolver problemas cotidianos relacionados a estes tópicos (Brasil, 2017). Portanto, os alunos do 8º ano precisam ter desenvolvido aspectos conceituais, operatórios e práticos sobre área e perímetro.

Além disso, consideramos relevante investigar esta questão no contexto da abordagem exploratória devido às possibilidades de explicitar o pensamento e as estratégias dos estudantes para expressar suas compreensões sobre estes tópicos, mediante a resolução de um problema cuidadosamente elaborado para este fim. Por fim, as representações e os significados atribuídos aos conceitos de área e perímetro por alunos da educação básica, em especial dos anos finais do Ensino Fundamental, constituem as bases para o aprofundamento do conhecimento geométrico e algébrico nas etapas escolares seguintes.

ABORDAGEM EXPLORATÓRIA, LESSON STUDY E ENSINO DE PERÍMETRO E ÁREA

A abordagem exploratória, também denominada ensino exploratório, constitui-se em uma perspectiva consolidada e crescentemente investigada em pesquisas no campo da Educação Matemática (Cyrino, 2015). No Brasil, houve um crescimento significativo nas duas últimas décadas de pesquisas sobre esta

temática, que resultaram em dissertações, teses e artigos científicos, influenciadas pelos trabalhos dos pesquisadores portugueses João Pedro da Ponte, Ana Paula Canavarro, Hélia Oliveira e Luís Menezes.

Ponte (2005) concebe a abordagem exploratória como um contexto em que os alunos se envolvem com tarefas para as quais não têm uma estratégia de resolução imediata e, portanto, precisam construir estratégias próprias e recorrer a conhecimentos prévios para resolvê-las. Esta abordagem, de acordo com esse autor, representa uma mudança significativa em relação ao ensino em que o professor começa por demonstrar previamente o método de resolução e, depois, apresenta exercícios para o aluno resolver.

Canavarro (2011, p.11), por sua vez, caracteriza o ensino exploratório como uma abordagem em que os alunos “aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva”. A partir do envolvimento em tarefas exploratórias, instigantes e desafiadoras, os alunos têm a oportunidade de ver surgir, com significado, “procedimentos, conceitos e conhecimentos matemáticos e, simultaneamente, desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” (Canavarro, 2011, p.11). Nesta perspectiva, Oliveira, Canavarro e Menezes (2013) complementam que o ensino exploratório assume natureza interativa e, como tal, “não depende apenas da natureza da tarefa matemática e do objetivo com que é proposta ou da experiência anterior dos alunos, mas essencialmente da forma como estes vão interagindo com a professora e entre eles nos vários momentos da aula (p.49)”.

O envolvimento ativo e intenso do aluno na realização de tarefas exploratórias constitui-se em elemento marcante desta abordagem (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2011). Entretanto, os momentos de discussão, nos quais os alunos apresentam o trabalho realizado, relatam as suas conjecturas e conclusões, expõem as suas justificações e questionam-se uns aos outros, constituem-se em situações valiosas para a aprendizagem matemática, à medida que o professor procura esclarecer os conceitos e procedimentos mobilizados pelos alunos, bem como avaliar os argumentos por eles apresentados e estabelecer relações dentro e fora da Matemática. Ou seja, os “momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento” (Ponte, 2005, p.16), bem como para promover e potencializar a comunicação no ensino exploratório (Rodrigues, Cyrino, & Oliveira, 2018). Uma estratégia de ensino-

aprendizagem exploratória valoriza mais a reflexão e a discussão (Ponte, 2005). Entretanto, o sucesso desta abordagem pressupõe o papel e a ação do professor, que principia com a seleção ou elaboração criteriosa da tarefa a ser proposta para os alunos e com o delineamento da atividade exploratória (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013).

A tarefa exploratória se difere do exercício e do problema por sua natureza e seu potencial. O exercício cumpre o papel de levar o aluno a exercitar, praticar procedimentos e processos (Dante, 1998), consolidar conhecimento (Ponte, 2005), sem precisar decidir sobre o procedimento a ser utilizado para se chegar à solução (Pozo & Angón, 1998) e trabalhando frequentemente de forma individualizada. Um problema, por sua vez, é a descrição de uma situação por meio da qual se procura algo desconhecido e que não há, previamente estabelecido, nenhum algoritmo ou estratégia para resolvê-la, exigindo, portanto, iniciativa, criatividade, conhecimentos prévios de estratégias (Dante, 1998). Ao resolver problemas, os alunos são desafiados nas suas capacidades matemáticas e experimentam o gosto pela descoberta (Polya, 1975). A tarefa exploratória, por sua vez, aproxima-se da perspectiva de problema, mas agrega o aspecto da exploração em que os alunos assumem papel ativo ao envolverem-se com atividades mais abertas, estruturadas e com equilibrado nível de desafio (Ponte, 2005), elaboradas a partir das características e necessidades da turma e com a finalidade de tratar questões específicas de aprendizagem. Assim, a abordagem exploratória pode favorecer o trabalho com diferentes representações sobre os tópicos 'perímetro e área', envolvendo as distintas compreensões (medida, propriedade e operação matemática) e tipos de grandeza a ele associadas, favorecendo a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

Além disso, de acordo com Ponte (2005), a abordagem exploratória prioriza o desenvolvimento do raciocínio matemático mediante tarefas desafiadoras e abertas, pois tarefas exploratórias oportunizam aos alunos construir ou aprofundar a compreensão sobre conceitos, procedimentos e representações matemáticas. Nesta direção, os alunos são convidados a assumir papel ativo na interpretação das tarefas, na representação da informação apresentada e na concepção e concretização de estratégias de resolução, as quais eles devem ser capazes de apresentar e justificar. O professor, por sua vez, assume o papel de promover um contexto para a descoberta, a negociação de significados, a argumentação e a discussão coletiva, levando os alunos a desenvolverem o raciocínio e a compreensão matemática, assim como a capacidade de usá-la em situações diversas (Ponte, 2005). Ponte e Quaresma (2011) complementam que a abordagem exploratória propicia aos alunos

experiências de aprendizagem significativas, as quais potencializam o desenvolvimento do raciocínio matemático e a resolução de problemas. Além disso, tais experiências promovem a comunicação matemática mediante a valorização do trabalho em duplas e grupos e a realização da discussão coletiva ao final da aula (Quaresma & Ponte, 2012).

Portanto, na abordagem exploratória, a aprendizagem constitui-se em um processo simultaneamente individual e coletivo, que resulta da interação dos alunos com o conhecimento matemático mediante atividades interessantes e desafiadoras e, também, da interação com colegas e o professor, sobrevivendo processos de negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986; Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Ponte, 2005). Ou seja, representa uma alternativa ao modelo de ensino transmissivo por colocar o aluno no centro do processo e assumir a aprendizagem como um fenômeno decorrente do processo (Estevam, Cyrino, & Oliveira, 2015).

A abordagem exploratória, além disso, caracteriza a perspectiva pedagógica subjacente a estudos de aula desenvolvidos em Portugal e no Brasil (Richit, 2020; Richit & Tomkelski, 2020). O estudo de aula, que consiste em um processo reflexivo e colaborativo de desenvolvimento profissional de professores centrado na prática letiva (Lewis, 2002; Quaresma & Ponte, 2019; Richit, Ponte, & Tomasi, 2021; Yoshida, 1999), surgiu no Japão no início do século XX, no governo de Meiji¹, quando mudanças no sistema educativo fizeram-se necessárias e urgentes. Esta abordagem² consolidou-se como uma forma de preparar os professores para desenvolverem suas práticas pedagógicas (Isoda, 2007) e passou a ser amplamente praticada naquele país desde então (Yoshida, 1999), disseminando-se para países do ocidente a partir do final dos anos 1990 (Richit & Tomkelski, 2020; Stigler & Hiebert, 1999).

Os estudos de aula desenvolvidos no Japão apresentam uma estrutura nuclear comum, que se compõe de quatro etapas: *definição de objetivo* para uma aula (a aula de investigação), *planejamento* colaborativo desta aula, *lecionação da aula de investigação* (que é acompanhada pelos demais membros

¹ A **Era Meiji** constituiu-se na **primeira época do Império no Japão**, entre os anos de 1868-1912. Foi extremamente importante para o desenvolvimento do Japão, uma vez que o tornou uma das grandes potências mundiais capitalistas. Foi marcada por um período de transformações políticas, econômicas e sociais, dentre elas a promulgação do Código de Educação (1972), que instituiu as escolas normais (Isoda, Arcavi, & Mena-Lorca, 2007).

² A disseminação do estudo de aula em países do ocidente ocorreu a partir do final dos anos de 1990, sobretudo mediante a divulgação do livro *The teaching gap* (Stigler & Hiebert, 1999) que creditou à estrutura de resolução de problemas do estudo de aula japonês, e especialmente ao processo de desenvolvimento profissional ao qual todos os professores japoneses estão envolvidos, o sucesso dos alunos em matemática no TIMSS – *Trends in International Mathematics and Science Study* (Stigler & Hiebert, 1999).

da equipe participante, os quais produzem registros sobre as ações dos alunos na realização das tarefas propostas) e *reflexão sobre a aula* a partir dos registros produzidos pelos observadores (Lewis, 2002; Quaresma & Ponte, 2019; Richit, Ponte, & Tomasi, 2021).

Cada uma das quatro etapas que constituem um ciclo de estudo de aula apresenta algumas especificidades. Na *definição de objetivos* para a aula de investigação, há grande preocupação com as necessidades e dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem do tópico curricular escolhido para abordar no estudo de aula. O *planejamento*, que se desenvolve em torno da elaboração da aula de investigação a partir dos objetivos previamente definidos, pressupõe um trabalho colaborativo e reflexivo criterioso em que se busca prever os modos de pensar dos alunos, as suas estratégias de resolução para tarefas propostas, as suas dificuldades, aquilo que vão dizer durante as atividades da aula, etc. Na *lecionação da aula de investigação*, um dos membros do grupo concretiza a aula planejada para uma turma de alunos e os demais, incluindo a equipe que coordena o processo, observam e registram as ações dos alunos. A etapa da *reflexão pós-aula*, em que o grupo se reúne para discutir e refletir sobre aquilo que foi registrado em vídeo e observado pelos demais membros, contribui também para a autocrítica profissional (Richit, 2020; Richit, Ponte, & Tomkelski, 2019).

Um aspecto marcante no estudo de aula refere-se à abordagem pedagógica subjacente à aula de investigação: a *structured problem solving* (SPS), que consiste em promover a aprendizagem da Matemática a partir da resolução de problemas. A SPS, de acordo com Fujii (2013), consiste em “ensinar matemática resolvendo tarefas” focando sobre uma única tarefa, a qual, quando é bem escolhida ou elaborada, permite que importantes e novas ideias matemáticas surjam na discussão coletiva. A *structured problem solving* estrutura-se em quatro processos essenciais: apresentação do problema aos alunos, resolução do problema pelos alunos, comparação e discussão coletiva das soluções (*neriage*) e sistematização das aprendizagens pelo professor (Fujii, 2013). Esta perspectiva está na base dos ciclos estudos de aula promovidos no Japão e tem sido evidenciada em diversos trabalhos ao redor do mundo, por favorecer a aprendizagem mais consolidada da Matemática.

Numa perspectiva próxima ao *structured problem solving*, a *abordagem exploratória* tem sido crescentemente evidenciada em relatos sobre estudos de aula. Ponte et al. (2014) destacam que a abordagem exploratória no ensino da Matemática permite ao professor refletir sobre a prática em sala de

aula, ao mesmo tempo que procura oportunizar aos alunos situações de aprendizagem diferenciadas, melhorando a aprendizagem dos alunos.

De maneira análoga à *structure problem solving*, a aula baseada na abordagem exploratória, segundo Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), pode ser organizada em quatro momentos centrais: introdução da tarefa; realização da tarefa pelos alunos mediante trabalho autônomo; discussão coletiva da tarefa e das resoluções dos alunos e, por último, sistematização das aprendizagens matemáticas. Para tanto, pressupõe um cuidadoso e detalhado processo de planejamento, em face ao qual o professor precisa buscar antecipar as possíveis dificuldades e estratégias adotadas pelos alunos na realização da tarefa proposta (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Além disso, o planejamento consiste na seleção ou elaboração de tarefas adequadas e profícuas para se realizar as explorações almejadas pelo professor. É preciso, ainda, organizar o desenvolvimento da aula, definindo a duração de cada etapa e os recursos necessários. Por fim, para a etapa da discussão coletiva é necessário que o professor, mediante as observações que realiza durante o trabalho autônomo dos alunos, selecione as resoluções que podem trazer contribuições positivas para o debate (Stein et al., 2008).

Portanto, as características associadas à abordagem exploratória, assim como os processos que interferem na concretização de uma abordagem bem-sucedida, a tornam adequada para embasar a aula de investigação (terceira etapa do estudo de aula). A aula de investigação, por privilegiar o trabalho autônomo dos alunos em torno de tarefas de natureza exploratória e a discussão coletiva das estratégias, resoluções e pontos de vista dos alunos, contribui para a modificação e a qualificação dos processos de ensino da Matemática, favorecendo a aprendizagem dos alunos (Richit & Tomkelski, 2020). Da mesma forma, o planejamento prolongado e criterioso da aula de investigação, que abrange a primeira e a segunda etapa do estudo de aula, favorece a seleção e elaboração de tarefas instigantes e desafiadoras, bem como a seleção de recursos adequados ao tópico a ser abordado na referida aula (Ponte et al., 2014). Estes aspectos, por sua vez, corroboram a perspectiva do planejamento cuidadoso que precede a abordagem exploratória (Ponte, 2005).

Por fim, as noções de área e perímetro, centrais na unidade temática Grandezas e Medidas, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), são estreitamente correlacionadas por se referirem a medidas. Ventura (2013) ressalta que o conceito de medida é indissociável da geometria, pois perímetro e área são características mensuráveis de certas figuras. A área é concebida como extensão de uma superfície que é medida em unidades próprias, de modo

que a medida da área de uma determinada região é um número real que resulta da comparação dessa área com uma área tomada como unidade. Assim, a área de uma superfície identifica-se com a medida dessa área (Albuquerque & Carvalho, 1990). O perímetro corresponde, segundo esses autores, ao comprimento da linha que define o contorno de uma figura plana (ou espacial). E possivelmente por serem grandezas de mesma natureza, isto é, grandezas associadas à medida, é que são frequentemente confundidas pelos alunos (Lima, 1991).

De acordo com Serrazina e Matos (1996, p.120), esta dificuldade pode ser minimizada a partir de tarefas que abordem simultaneamente estes conceitos e os coloquem em confronto, favorecendo colmatar as concepções equivocadas dos alunos, como por exemplo, pensar “que se duas figuras têm áreas iguais têm perímetros iguais, e vice-versa. Pensam muitas vezes também que quanto maior é a área maior é o perímetro”. Portanto, a abordagem desses conceitos precisa oportunizar aos alunos expressarem, por meio de linguagem verbal, escrita, numérica, algébrica ou pictórica, suas compreensões sobre estes conceitos e, sobretudo, estabelecer relações e distinções entre os mesmos. Além disso, a partir de tarefas desafiadoras elaboradas como contexto significativo para a abordagem da Matemática, é possível “ajudar os alunos a encurtar o fosso entre o seu conhecimento pessoal e o conhecimento formal da matemática” (Gravemeijer, 2005, p.2).

Nesta perspectiva, a forma de desenvolver os tópicos área e perímetro pode ser modificada a partir da abordagem exploratória, subjacente à aula de investigação do estudo de aula, oportunizando aos alunos superar algumas das dificuldades apresentadas e, sobretudo, podem nos fornecer subsídios que nos permitam compreender as razões associadas a estas dificuldades a partir das diferentes formas de representar e compreender estes tópicos.

METODOLOGIA

A pesquisa³, de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986) consistiu em evidenciar e discutir as compreensões sobre área e perímetro mobilizadas por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental a partir da abordagem exploratória que embasou a aula de investigação em um estudo de aula (lesson study). Guiamo-nos pela seguinte questão: Quais compreensões de área e

³ Aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal da Fronteira Sul, Número do Parecer: 3.997.760.

perímetro são mobilizadas por alunos do 8º ano a partir da abordagem exploratória subjacente a aula de investigação de um estudo de aula?

O estudo de aula foi desenvolvido no segundo semestre de 2019 e envolveu oito ⁴ professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, pertencentes a escolas da rede pública estadual de ensino do Rio Grande do Sul. Os professores foram convidados, mediante envio de e-mail convite às escolas pertencentes a 15ª Coordenadoria de Educação do Rio Grande do Sul (15ª CRE), a participar do estudo de aula e, de acordo com o interesse e disponibilidade, engajaram-se voluntariamente no processo. Após o convite, dez professores manifestaram interesse em participar do estudo de aula, sendo que oito formalizaram inscrição e frequentaram as sessões, não sendo necessário realizar seleção de participantes, uma vez que havíamos definido o máximo de dez docentes. Os professores, todos licenciados em matemática, possuíam mais de cinco anos de experiência no ensino de Matemática.

O estudo de aula constituiu-se de doze encontros de 2,5 horas cada, realizados quinzenalmente nas dependências da 15ª CRE. Ao longo das sessões de planejamento (8 encontros), os professores dedicaram-se a preparação da aula de investigação, centrada nos tópicos ‘área e perímetro’, apoiando-se no estudo das diretrizes curriculares de matemática, em resultados de pesquisa e análise de atividades apresentadas em materiais didáticos, tais como livros. Os encontros do estudo de aula e aula de investigação foram áudio-gravados, transcritos e textualizados.

A tarefa, que foi planejada colaborativamente pelos participantes, tomou por contexto a construção de um mosaico com peças do Tangram para promover o aprofundamento dos tópicos selecionados, os quais ainda não haviam sido estudados naquele ano letivo, embora os alunos já estavam familiarizados por tê-los estudado em anos anteriores. A escolha do tópico curricular abordado foi balizada pelo *programa curricular* porque os professores buscavam aprofundar a compreensão dos alunos sobre área e perímetro. Por isso, a aula de investigação precisou ajustar-se ao cronograma da disciplina. Também foi balizada pelas *dificuldades dos alunos*, visto que os professores consideraram essencial abordar esses tópicos, os quais os alunos apresentam distintas e frequentes dificuldades ao longo da trajetória escolar (Richit, 2021, no prelo).

A aula de investigação, embasada na abordagem exploratória, envolveu duas aulas de duas horas cada e foi realizada em uma turma de alunos do 8º ano

⁴ São eles: Adelle, Ellie, Filipa, Judy, Kadu, Maggie, Marie, Mateus – nomes fictícios.

do Ensino Fundamental de uma escola pública de Gaurama, no norte do Rio Grande do Sul, por ser a turma em que a professora que lecionou a referida aula atua como docente. Sobre isso, esclarecemos que a aula de investigação de um estudo de aula deve ser realizada, preferencialmente, em uma turma em que o professor que se dispõe voluntariamente a lecioná-la, atua como docente. A aula de investigação consiste em uma intervenção única, promovida a partir da aula planejada pelos professores, podendo ser organizada em dois momentos, tal como procedemos em nossa investigação. A turma, constituída de 12 alunos, foi organizada em seis duplas (D1: Adam e Vitor; D2: Assis e Will; D3: Isis e Leon; D4: Jana e Paulo; D5: Samy e Nanda; D6: Sara e Carla – nomes fictícios), as quais trabalharam de forma autônoma na resolução de uma tarefa exploratória envolvendo os tópicos curriculares acima referidos. A tarefa elaborada constituía-se de duas atividades (Atividade 1 sobre perímetro e Atividade 2 sobre área), realizadas em dias subsequentes.

O material empírico da investigação foi constituído a partir dos registros produzidos pelos oito professores, assim como das transcrições das gravações em áudio das discussões dos alunos durante o trabalho autônomo sobre a tarefa proposta e da sessão de reflexão. As resoluções da tarefa também foram incorporadas ao material empírico. A análise, qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), baseada em uma análise de conteúdo (Bardin, 2003), estabeleceu como unidades de referência o conjunto de trechos transcritos das sessões do estudo de aula e resoluções dos alunos que revelavam aspectos caracterizadores das compreensões sobre área e perímetro. A seguir, a partir das unidades de referência, foram definidas as unidades de registro e, por fim, as categorias de análise, que foram assim nomeadas: *medida, operação matemática e propriedade geométrica*.

COMPREENSÕES SOBRE ÁREA E PERÍMETRO MANIFESTADAS PELOS ALUNOS A PARTIR DA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

A análise focou aspectos relacionados a três compreensões sobre os conceitos de área e perímetro – nomeadamente medida, operação matemática e propriedade geométrica –, aspectos estes apoiados em elementos representativos, verbais e textuais produzidos pelos alunos para resolver a tarefa proposta para a aula de investigação.

Área e perímetro como medida

A partir das observações dos professores e dos registros produzidos sobre as ações dos alunos durante o trabalho autônomo na tarefa proposta, foi possível evidenciar, especialmente na abordagem do tópico perímetro, uma compreensão associada à perspectiva de medição de comprimento, tomando como ponto de partida a ideia de contorno (explicitada no enunciado na atividade). O contexto em que esta perspectiva emergiu envolveu a primeira atividade, que foi assim organizada: após os alunos realizarem uma pesquisa na web sobre arte musiva⁵ e relatarem os resultados da busca aos colegas, a professora contou-lhes a lenda do Tangram, jogo chinês disseminado em todo o mundo. A partir desse contexto (arte musiva e Tangram), os alunos foram solicitados a criar uma arte musiva para decorar a sala de aula, utilizando-se de peças do Tangram, conforme descrito na atividade 1.

Com esta atividade, as duplas foram oportunizadas a explorar o conceito de perímetro pela perspectiva de medida. Um aspecto relacionado a esta perspectiva, que emergiu durante o trabalho autônomo de uma dupla, refere-se à ideia de perímetro como a *medida unitária do contorno* de uma forma geométrica ou figura plana. Este aspecto foi destacado na discussão coletiva (etapa final da aula de investigação), em que a dupla Isis e Leon (Dupla 3) explicou o modo como resolveu a primeira atividade da tarefa. A aluna Isis⁶, ao explicar como procedeu para determinar a quantidade de fio dourado necessária para contornar a arte musiva criada, revelou um procedimento associado à ideia de comprimento unitário, conforme relato:

⁵ A Arte Musiva, relativa a mosaicos, de acordo com registros históricos, surgiu com os mesopotâmicos por volta do ano 3000 a.C. Porém, no ocidente, os maias e astecas já conheciam o mosaico e por isso, há controvérsias quanto ao seu surgimento. O mosaico é uma arte decorativa milenar que reúne pequenas peças de diversas cores para formar uma grande figura. Do grego, o termo mosaico (*mouseîn*) é relativo às musas. Representa a colagem próxima de pequenas peças, formando um efeito visual (seja um desenho, figura, representação) que envolve organização, combinação de cores, de materiais e de figuras geométricas, além de criatividade e paciência. (Adaptado da Wikipédia para a aula de investigação pelos professores).

⁶ Visando preservar a identidade dos alunos e professores mencionados no texto, usamos nomes fictícios. A notação D1, D2... é adotada para indicar as duplas, assim D1 indica Dupla 1 e assim sucessivamente.

Figura 1

Atividade 1 da tarefa – perímetro.

AULA DE INVESTIGAÇÃO: Atividade 1 da tarefa exploratória

- 1) Com as peças do Tangram disponibilizadas (cada dupla recebeu vários conjuntos de peças), crie um ou mais motivos decorativos (arte musiva) para os cartões em branco (cartões quadrados de cartolina branca) entregues ao grupo, utilizando no mínimo quatro (4) peças para formar a figura de cada cartão.
- 2) Em seguida, junte os cartões formando um mosaico. Desenhe abaixo como ficou o mosaico.
- 3) Reproduza, em desenho, as figuras (motivos decorativos) definidas para cada cartão.
- 4) Vamos colorir/decorar os cartões destacando o contorno da figura em cada cartão.
- 5) Supondo que fossemos decorar o contorno de cada figura com fio dourado, quantos centímetros de fio seriam necessários? Explique sua estratégia.

Eu calculei a quantidade de fio usando uma régua para medir o ‘tamanho’ do contorno da figura. Eu fui medindo cada lado da figura e no final cheguei na medida 42 cm. (Isis, D3, dez. 2019).

A professora que conduzia a discussão coletiva solicitou que Isis explicasse melhor o procedimento para que os colegas compreendessem a estratégia adotada. Ela acrescentou:

Primeiro eu medi um lado e contei 9 cm. Depois mudei a régua para o segundo lado e continuei contando do nove para frente. E fui contando os centímetros até o fim. (Isis, D3, dez. 2019).

O professor Mateus, que observou a dupla na realização da atividade, confirmou o procedimento bastante peculiar apresentado por Isis.

Eu percebi que ela calculou a quantidade de fio de uma maneira diferente. Primeiro ela sobrepôs a régua sobre o primeiro lado da figura e contou os centímetros. Em seguida, deslocou a régua sobrepondo outro lado da figura e fez a contagem a partir do valor encontrado no primeiro lado. Na primeira medida ela achou 9 cm, então depois de colocar a régua sobre o segundo lado da figura ela falou em voz alta: 10,

11, 12, 13, 14.... Deu 17 cm. Em seguida deslocou a régua para o terceiro lado da figura e narrou: 18, 19.... No final do processo de medição chegou à medida de 42 cm. Isso foi diferente! É mais comum os alunos medirem cada um dos lados e depois somarem as medidas. Ela fez diferente. (Mateus, dez.2019).

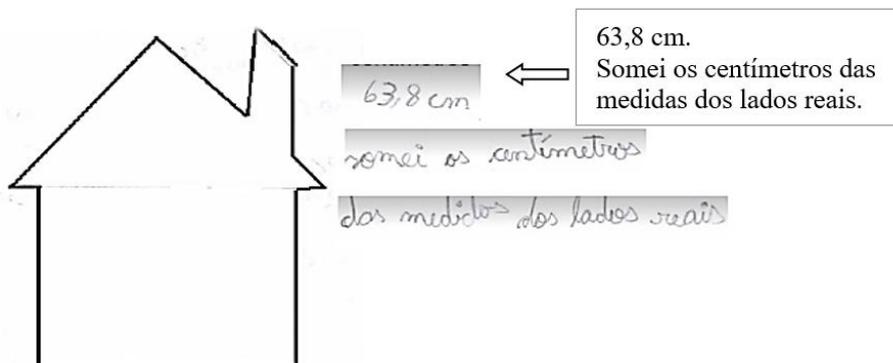
O procedimento usado por Isis revela que, pelo fato da tarefa solicitar a quantidade total de fio dourado, esta medição (processo de medir) não poderia ser fracionada, uma vez que ela pretendia cobrir o contorno com um pedaço único de fio. Para a aluna, o contorno da figura não poderia ser feito com pedaços fracionados de fio, mas sim, com um comprimento integral que deve ser colocado gradualmente sobre o contorno da figura, sem parti-lo. Este aspecto é relevante porque corrobora a noção de perímetro como totalidade, a qual precede às abordagens baseadas na realização de operações matemáticas e que muitas vezes é suplantada nas práticas de sala de aula.

A Dupla 2 (Assis e Will) recorreu à estratégia da *planificação da arte musiva* para representar a ideia de contorno, desenhando apenas a linha externa da arte e informando a medida total, estratégia que corrobora o aspecto da integralidade do comprimento do contorno. A Figura 2 ilustra este aspecto.

Em relação à quantidade de fio necessária para cobrir o contorno, embora a Dupla 2 tenha indicado a medida total, ao explicar o procedimento adotado, os alunos revelam ter recorrido à soma das medidas dos lados, estratégia confirmada por Adelle (professora que observou a dupla durante a aula de investigação). Esta estratégia associa perímetro à *medida unitária obtida pela soma das partes do contorno*.

Figura 2

Representação do contorno da arte musiva. (Assis e Will)

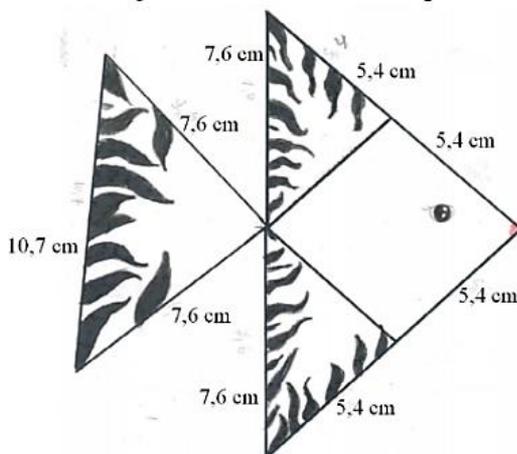


De maneira similar, a Dupla 5 (Samy e Nanda) expressou a ideia de perímetro como a *medida do contorno da arte*, obtida a partir da soma das medidas dos lados ao associar a cada um dos lados da figura uma medida em centímetros (Figura 3). O procedimento usado pela dupla predominou nas demais duplas, porém o aspecto marcante é o destaque dado às linhas de cada peça do Tangram usada para compor a arte musiva, sendo que para as linhas que estavam no interior da arte não indicaram nenhuma medida. Este aspecto revela a estratégia da dupla para representar o contorno da arte, sinalizando a compreensão de que o perímetro da arte corresponde ao contorno externo, desconsiderando-se as medidas dos lados das peças do Tangram que estão no interior da figura. Revela, também, a capacidade da dupla em articular as representações numérica e geométrica desses elementos (peças do Tangram e a arte) na resolução da atividade.

O procedimento da dupla explorou a perspectiva de perímetro como medição do contorno externo da arte, a qual foi ampliada ao passo que os alunos compreenderam que era necessário *definir uma unidade de medida* para calcular a quantidade total de fio. Ou seja, devido à necessidade de usar um instrumento de medição para a realização da atividade, os alunos recorreram à régua, o que os levou a concluir que precisavam definir uma unidade de medida (centímetros). A dupla 1, Adam e Vitor, destacou este aspecto ao justificar suas conclusões.

Figura 3

Arte musiva da Dupla 5. (Samy e Nanda)



A gente percebeu que para calcular a quantidade de fio precisava de uma régua. Sem régua não tinha como fazer. E daí a gente contou os centímetros. Se eu tivesse usado outra coisa para medir, seria outra medida [se referindo à unidade de medida]. Na primeira atividade não precisava fazer conta, porque era só medir. Para achar a área foi mais difícil, porque não tinha como medir. A gente tinha só que contar os quadradinhos [se referindo as quadriculas da malha quadriculada colocada como sugestão no verso da folha]. Eu achei diferente. (Gravação áudio, D1, dez. 2019).

Esta perspectiva emergiu também na atividade 2, voltada ao estudo de área, que foi assim apresentada:

Ao resolver a atividade 2, a Dupla 3 (Isis e Leon) explorou a perspectiva de medição para determinar a área. Para tanto, usaram a malha quadriculada, que foi sugerida como instrumento de medida no enunciado da atividade, sobre a qual delimitaram a região ocupada pela arte musiva esboçada nos cartões distribuídos para as duplas (Figura 5).

Figura 4

Atividade 2 da tarefa – área.

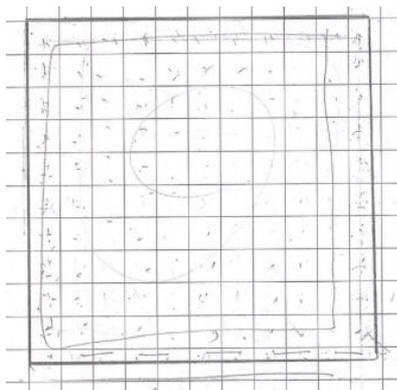
AULA DE INVESTIGAÇÃO: Atividade 2 da tarefa exploratória

[Após distribuir 4 cartões quadrados de cartolina branca às duplas, todos do mesmo tamanho, os alunos foram orientados a desenhar em cada cartão um motivo (figura), de modo que ao agrupar os 4 cartões, constituiriam uma arte musiva]

- 1) Escolha um dos cartões. Quantas quadrículas são necessárias para cobrir a figura nele criada? (Podem utilizar a malha quadriculada no verso).
- 2) Como podemos representar a ideia da questão anterior na linguagem matemática?
- 3) Qual é o espaço em branco do cartão? Como chegaram a este resultado?
- 4) Qual estratégia vocês usariam para determinar quantas quadrículas são necessárias para cobrir o mosaico?
- 5) Como representar matematicamente a questão anterior? Explique.
- 6) Em matemática, como é denominada esse resultado?

Figura 5

Arte musiva da Dupla 3. (Isis e Leon)



Ao explicar o procedimento adotado para resolver a primeira questão da atividade 2, Isis destacou que era preciso contar as quadrículas que estavam dentro do contorno da arte.

Eu desenhei a figura real na folha quadriculada. Daí eu percebi que era só contar os quadradinhos de dentro da figura para saber a quantidade. (Isis, D3, dez. 2019).

A gente usou a malha que estava atrás da folha da atividade, mas a gente poderia ter criado outra coisa, outro material, para fazer isso. Poderia ser uma malha com triângulos. Daí a unidade seria os triangulozinhos. Depois era só contar. (Leon, D3, dez. 2019).

Embora a arte musiva da Dupla 3 era simples [representaram quadrados nos cartões e os agruparam de forma aleatória], permitiu a dupla explorar a noção de área como a medida de uma região delimitada por um contorno, tomando como unidade de medida quadrículas de 1 cm de lado. A malha quadriculada, fornecida no verso da folha da atividade, foi utilizada como instrumento de medição por todas as duplas.

Sumarizando, a análise evidencia que a abordagem exploratória dos tópicos área e perímetro permitiu aos alunos explorar estes conceitos como processos de medida. A partir das duas atividades que embasaram a abordagem exploratória, as duplas recorreram a procedimentos distintos: para o perímetro, definiram o instrumento a ser usado (régua) e a unidade de medida adotada. Para área, o instrumento foi sugerido no enunciado (malha quadriculada) e a unidade de medida eram as quadrículas (cada uma com 1 cm de lado). Perceberam, com isso, que é possível criar instrumentos de medida para definir área e, a partir deles, definir uma unidade de medida para expressá-la. Outro aspecto importante relativo à estimativa da área da arte refere-se à possibilidade das duplas explorarem este conceito pela perspectiva da medição da superfície da arte, que se revelou no procedimento baseado na contagem das quadrículas. Por fim, a abordagem exploratória favoreceu a autonomia dos alunos, evidenciando a sua compreensão sobre o trabalho a ser realizado sobre as tarefas, assim como os oportunizando a comunicar suas ideias matemáticas na discussão coletiva (momento final da aula de investigação).

Área e perímetro como operação matemática

Esta perspectiva predominou nas resoluções da tarefa exploratória (Atividades 1 e 2). A análise das resoluções das duplas, das representações utilizadas e das observações dos professores durante a aula de investigação aponta que os alunos exploraram os conceitos de

área e perímetro pela perspectiva da realização de operações de adição e multiplicação. A figura 6, a seguir, explicita a estratégia usada pela Dupla 6 (Sara e Carla), que determinou o perímetro da arte musiva mediante *adições sucessivas*. Da mesma maneira, a Figura 7, de Adam e Vitor (D1), associa o conceito de área à operação de *multiplicação das medidas dos lados*.

Figura 6

Arte Musiva D6. (Sara e Carla)

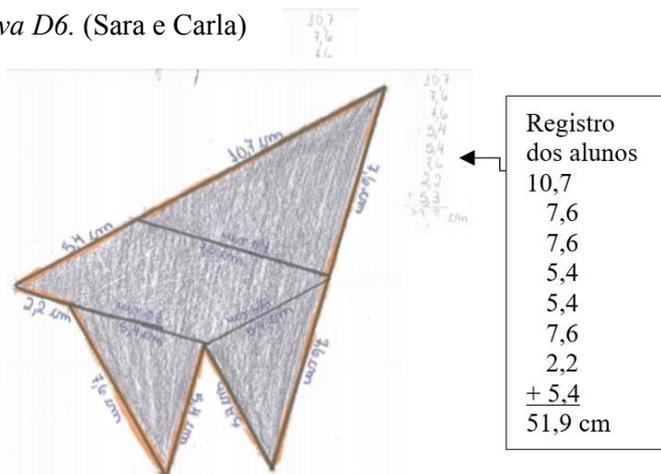
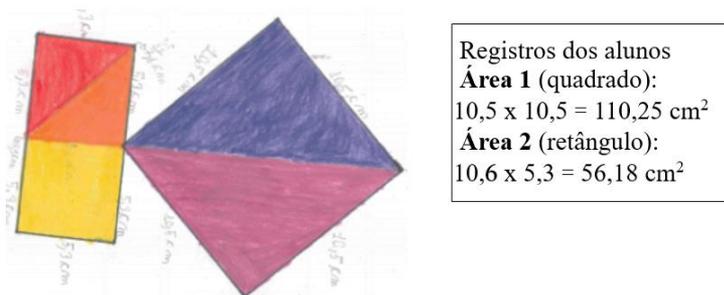


Figura 7

Arte Musiva D1. (Adam e Vitor)



O procedimento adotado pelas duplas D1 e D6 é interessante pelo fato de que os alunos explicitaram *diferentes representações* na resolução das atividades 1 (perímetro) e 2 (área). Primeiramente representaram, nas dimensões reais, as peças do Tangram usadas para compor a arte. Em seguida, representaram as dimensões de cada peça, explicitando a unidade de medida usada (cm). Por fim, para calcular a quantidade necessária de fio dourado para o contorno, efetuaram adições sucessivas apenas das medidas externas da arte, ou seja, das medidas indicadas no contorno (Figura 6 - linha laranja; Figura 7 - linha preta). E para calcular a área, a Dupla 1 realizou a multiplicação das medidas dos lados de cada uma das figuras que compôs a arte (Figura 7). Esta atividade levou-os a perceber a diferença entre unidade de medida de comprimento e unidade de medida de área, porque os elementos considerados eram de natureza distinta, e, também, as notações matemáticas usadas em cada caso, conforme aponta Vitor:

No perímetro, a gente mediu os lados da figura, que são linhas [referindo-se a segmento de reta]. Daí o resultado deu em cm. [...]. Na área, a gente tinha triângulos e retângulos, então, quando a gente multiplicou a base pela altura, a gente ficou na dúvida: não sabia se era só cm. [...]. E na discussão a gente percebeu que era igual àquilo que a gente fazia no ano passado, quando multiplicava x por x e ficava x^2 . Daí eu entendi porque na área fica cm^2 . (Vitor, D3, dez. 2019).

Por exemplo, na estimativa do perímetro, os elementos considerados eram todos segmentos de reta, elementos unidimensionais, cuja dimensão é dada por unidades de comprimento. Na estimativa da área, que envolvia polígonos e formas geométricas planas, o procedimento mais usado pelas duplas recorria à operação de multiplicação da medida da base e da medida da altura, de modo que a unidade de medida precisava considerar a bidimensionalidade das formas usadas na arte.

A ênfase na realização de operações matemáticas aponta para a assimilação prévia, por parte dos alunos, das definições de área e perímetro presentes nos materiais didáticos frequentemente usados nos anos finais do Ensino Fundamental. Este aspecto foi evidenciado especialmente no contexto da realização do item 8 da atividade 1 (perímetro), em que as duplas foram solicitadas a propor uma expressão matemática para representar o contorno da arte musiva criada. A Dupla 5 (Samy e Nanda) propôs a seguinte expressão matemática:

Figura 8

Expressão matemática para representar perímetro. (Samy e Nanda)

8) Proponha uma expressão matemática que represente a medida do contorno da figura de cada cartão, explicando os elementos que compõem essa expressão.

$$\begin{array}{l}
 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5,3 + 8 + 7,9 + 2 = 52,2 \quad | \quad 2 \cdot 10,7 + 7,7 + 2 + 2 \cdot 5 + 2 + 5,3 + 2 + 7,9 = 87,4 \\
 \begin{array}{l} 8 \text{ vezes } 2 \\ \text{menor } 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ vezes } 2 \\ 2 \text{ vezes } 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ vezes } 2 \\ 2 \text{ vezes } 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ vezes } 2 \\ 2 \text{ vezes } 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ vezes } 2 \\ 2 \text{ vezes } 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ vez } 2 \\ 1 \text{ vez } 2 \end{array}
 \end{array}$$

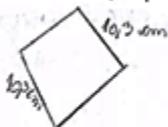
8) Propose a mathematical expression that represents the measure of the perimeter of the shape of each piece of cardboard, explaining the elements that compose this expression.

Esta expressão é interessante porque, além de associar perímetro à realização de adições sucessivas, evidencia os *processos recursivos* identificados pela dupla para determiná-lo. Ao constatar que o contorno da arte constituía-se da soma das medidas de peças iguais do Tangram, que foram usadas repetidamente na composição da arte, a dupla recorreu à representação das somas sucessivas por meio de multiplicação, indicando a medida da peça (5,3 cm, por exemplo) e o número de vezes em que esta medida foi considerada na composição da arte (8 vezes, por exemplo). Outro aspecto, de igual relevância, é o fato de os alunos conseguirem abstrair as noções de perímetro e área de formas geométricas, representando-as por meio de *expressões matemáticas constituídas de adições e multiplicações*. O procedimento apresentado traz indícios da capacidade de generalização do processo matemático utilizado para determinar o perímetro da arte, que se revela pela estratégia de agrupar adições sucessivas por meio de multiplicação. Expressa, ainda, a capacidade de transitar entre a representação geométrica da arte e a representação algébrica da noção de perímetro. A representação a seguir, da dupla Isis e Leon, corrobora este aspecto.

Figura 9

Expressão matemática para representar perímetro. (Isis e Leon)

- 8) Proponha uma expressão matemática que represente a medida do contorno da figura de cada cartão, explicando os elementos que compõem essa expressão.



$$\begin{array}{r} 10,3 \\ 10,3 \\ 10,3 \\ 10,3 \\ \hline 41,2 \end{array}$$

$$L+L+L+L = 4L$$



- 8) Propose a mathematical expression that represents the measure of the perimeter of the shape of each piece of cardboard, explaining the elements that compose this expression.

A expressão formulada pela dupla Isis e Leon explicita, também, a *generalização das operações sucessivas de adição por meio de representação algébrica*, indicando, primeiramente, a representação das dimensões consideradas ($L + L + L + L$) e ao final, pelo fato de tratarem de lados com dimensões iguais, a representação algébrica é resumida pela expressão $4L$. A transição realizada a partir do contexto sugerido na tarefa sinaliza a capacidade da dupla de representar a noção de perímetro de diferentes maneiras.

A Dupla 1 (Adam de Will) associou o cálculo da área da arte a realização da adição sucessiva das quadrículas circunscritas pelo contorno da arte, isto é, pela contagem das quadrículas que estavam no interior da figura, conforme descrição da estratégia da Figura 10.

Figura 10

Descrição da estratégia adotada pela Dupla 1. (Adam e Will)

- 2) Como podemos determinar o espaço ocupado (em quadrículas) pela figura do cartão escolhido? Explique e ilustre sua estratégia.

Area, montamos o tangram com a forma escolhido, chegamos no valor anterior somando todos as quadrículas.

- 2) How can we determine the space occupied (in squares) by the cardboard shape chosen? Explain and illustrate your strategy. Area, we assembled the tangram with the shape chosen, we reached the previous amount adding all the squares.

Ao dizer que depois de construir a arte com o Tangram “chegamos ao valor anterior somando as quadrículas”, a dupla revela que recorreu inicialmente às operações matemáticas para calcular a área e, depois, utilizaram a malha quadriculada. A explicação da estratégia adotada pela dupla corrobora a perspectiva de operação matemática, porém traz um elemento adicional ao

associar o conceito de área à operação de adição. Este entendimento revela uma compreensão ampliada de área uma vez que a dupla superou a ideia de multiplicar as medidas dos lados da arte criada em detrimento da realização da operação de adição envolvendo as unidades de medida adotadas na atividade, nomeadamente, as quadrículas da malha disponibilizada aos alunos.

Em síntese, os aspectos evidenciados na análise apontam para a possibilidade de oportunizar aos alunos ampliar as compreensões sobre área e perímetro a partir da abordagem exploratória, priorizando aspectos relacionados aos modos de concebê-los. Para além de associar os conceitos de área e perímetro às operações de adição e subtração, a abordagem exploratória levou os alunos a transitar entre a representação geométrica da arte criada para uma representação algébrica de perímetro e de área. Avançaram na medida em que propuseram representações pautadas nas propriedades associativas da multiplicação e da adição e, especialmente, pelo fato de representarem os processos recursivos identificados na realização do cálculo do perímetro. Além disso, a abordagem exploratória permitiu que algumas duplas ampliassem a compreensão de área como produto dos lados para uma perspectiva de adição da unidade de medida da região preenchida pela arte. Estes aspectos evidenciam as possibilidades de explorar e aprofundar a generalização matemática da noção de perímetro a partir da tarefa proposta.

Área e perímetro como operação matemática

As discussões dos alunos sobre o que deveriam realizar na tarefa e, principalmente, as justificativas que elaboraram para suas conclusões, evidenciam que as duplas recorreram a aspectos relacionados à compreensão de área e perímetro como propriedade específica das formas geométricas, algo dado *a priori*, que pode validar processos matemáticos e resultados. Esta perspectiva foi manifestada na resolução das questões 7 e 9 da atividade 1. A explicação apresentada pela Dupla 5 (Samy e Nanda) ilustra este aspecto.

Figura 11

Compreensão sobre perímetro da Dupla 5. (Samy e Nanda)

7) Em matemática, qual o nome que se dá para a medida que corresponde ao contorno da figura? Explique.

Perímetro, pois é a soma de todos os lados da figura.

9) Essa expressão pode ser usada para determinar ou calcular o contorno do mosaico? Justifique.

Sim, pois é a soma de todos os lados.

7) In mathematics, what is the name given to the measure that corresponds to the outline of a shape? Explain. *Perimeter, because it is the sum of all the sides of the figure.*

9) Can this expression be used to determine or calculate the outline of the mosaic? Explain. *Yes, because it is the sum of all the sides*

Ao definir o contorno de uma figura como perímetro, todas as duplas apresentaram como justificativa a definição associada a este conceito como uma *propriedade inerente às formas geométricas*. A resposta conclusiva “pois é a soma de todos os lados”, presente nas justificações de todas as duplas, evidencia a compreensão sobre perímetro como uma propriedade que estabelece uma relação de associatividade entre as dimensões dos lados de uma figura ou polígono, mediante um processo operatório aditivo. E, portanto, pode ser utilizado em outras situações ou problemas, cujos contextos envolvem elementos de mesma natureza (lados que são segmentos de reta). Da mesma maneira, a tarefa oportunizou as duplas explorarem os conceitos de perímetro e área como propriedade particular do processo de mensuração (medição) do comprimento do ‘contorno’ e da ‘superfície’.

A atividade 2, por abordar especificamente o conceito de área, solicitou das duplas aprofundar a compreensão do significado de área, na medida em que os alunos foram instigados a expressar seus entendimentos de forma explicativa, levando em consideração os procedimentos concretizados para determinar a região circunscrita pela arte musiva.

Além disso, foram instigados a propor estratégias de resolução e justificá-las a partir de atividades que os levaram a retomar conceitos e propriedades já estudadas e, especialmente, tiveram a oportunidade de comunicar suas compreensões e aprendizagens matemáticas, conforme ilustra a figura seguinte.

Figura 12

Compreensão da dupla sobre perímetro. (Samy e Nanda)

- 5) Qual estratégia vocês utilizariam para determinar quantas quadriculas são necessárias para cobrir o mosaico?

46. Contamos quantas quadriculas foram usadas para cobrir o mosaico.

- 6) Como representar matematicamente a questão anterior? Explique.

Perímetro, ou seja espaço ocupado.

Ao produzir uma arte musiva a partir de peças do Tangram, os alunos foram envolvidos em uma tarefa que os desafiou a formalizar, de maneira descritiva/discursiva, suas compreensões sobre área e perímetro, explicitando os elementos e as operações usadas nesse processo.

A análise sinaliza, portanto, que a abordagem exploratória favoreceu aos alunos ampliar a compreensão sobre os conceitos de área e perímetro, especialmente quando associaram a noção de área ao espaço ocupado por uma determinada forma e a contagem das unidades de medida tomadas na atividade. Levou-os a associar esses conceitos a um processo de medição que pressupõe a identificação/definição da unidade de medida associada, bem como de um instrumento de medição. Porém, consideramos que a relação de proporcionalidade não direta entre área e perímetro foi pouco explorada a partir da tarefa exploratória proposta. Em relação à dinâmica da aula, consideramos que a abordagem exploratória favoreceu a modificação das posturas assumidas pelos alunos nas práticas de sala de aula, na medida em que assumiram papéis ativos, comunicando suas ideias e conclusões matemáticas, questionando, refletindo e complementando as ideias dos colegas.

DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES

A abordagem exploratória constituiu-se em contexto para que os alunos se envolvessem em uma tarefa instigante, relacionada à criação de uma arte musiva a partir de peças do Tangram, para a qual precisaram formular estratégias próprias, recorrer a conhecimentos prévios (Melo, 2003; Ponte, 2005) e apresentar procedimentos de resolução e justificações peculiares em certos aspectos. Esta abordagem representou uma mudança em relação ao ensino destes tópicos (Ponte, 2005; Quaresma & Ponte, 2012), na medida em que os alunos foram oportunizados a explorar e explicitar, de forma

pormenorizada, o processo que envolveu a estimativa da quantidade de fio dourado necessária para contornar a arte (perímetro) e da área correspondente à mesma.

A abordagem exploratória dos tópicos área e perímetro, por sua natureza e características, oportunizou aos alunos desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Ponte & Quaresma, 2011), especialmente na discussão coletiva ao final da aula de investigação (Fujii, 2013; Ponte et al., 2014) e das justificações produzidas para as resoluções apresentadas pelas duplas. A partir do desenvolvimento da tarefa (atividade 1 – perímetro; atividade 2 – área), os alunos foram instigados a propor estratégias e procedimentos que os levaram a explorar diferentes representações matemáticas para estes conceitos e, assim, ver emergir com significado (Canavarro, 2011) aspectos relacionados a três compreensões de área e perímetro (medida, operação matemática e propriedade geométrica). Estes aspectos foram mobilizados mediante o envolvimento ativo e dialogado das duplas na realização da tarefa (Ponte, 2005), os novos significados atribuídos a esses tópicos curriculares da matemática (Canavarro, 2011; Teles, 2007) e, especialmente, a mobilização e articulação de distintas representações matemáticas no processo de formalização dos procedimentos usados para realizar as estimativas requeridas.

Sobre a perspectiva de **perímetro como medida**, um dos aspectos evidenciados a partir da abordagem exploratória diz respeito ao *processo de medição do comprimento da linha que define o contorno* (Albuquerque & Carvalho, 1990; Serrazina & Matos, 1996; Zils, 2018) da arte musiva criada pelas duplas com peças Tangram. A perspectiva de **área como medida** foi explorada a partir da mobilização de representações geométricas, que levaram os alunos a expressá-la como a *medida da região interna circunscrita pelo contorno da arte*. Relativamente ao perímetro, um aspecto peculiar se destacou no procedimento adotado por uma dupla, que expressou perímetro como a *medida unitária correspondente ao comprimento total do contorno*, enquanto as demais duplas o expressaram como a *medida obtida pela soma das partes do contorno*. Ambos os aspectos foram explicitados nos procedimentos das duplas, os quais, mesmo sendo distintos em termos das representações e recursos matemáticos utilizados, recorreram à estratégia da *planificação da arte musiva* para representar a ideia de contorno, desenhando apenas a linha externa da arte.

Além disso, a abordagem exploratória oportunizou aos alunos ampliar a compreensão do conceito de perímetro como medida (Baltar, 1996; Teles, 2007; Ventura, 2013), porque puderam perceber que este processo requer o uso de um instrumento de medida e, dessa forma, pressupõe determinar previamente uma unidade de medida para expressá-lo (Teles, 2007). A atividade sobre área, que sugeria o uso de uma malha quadriculada como instrumento de medida (Pessoa, 2010), possibilitou aos alunos concluir que é possível utilizar outros recursos como instrumento de medida, implicando em novas unidades de medida para expressá-la. Este aspecto sugere, portanto, a possibilidade de superar algumas das dificuldades dos alunos no *uso e conversão* de unidades de medidas (Facco, 2003; Teles, 2007) e na diferenciação entre esses conceitos (D'Amore & Pinilla, 2006; Zils, 2018), dificuldades essas consideradas pelos professores que participaram do estudo de aula na definição do tópico curricular a ser abordado na aula de investigação. Concluíram, assim, que as estimativas da área e do perímetro da arte musiva caracterizavam processos de medição com especificidade própria, que dependiam das dimensões de cada peça que a constituía.

A perspectiva que associa **área e perímetro como operação matemática**, predominante nas resoluções das duplas, foi mobilizada no contexto dos procedimentos adotados e das justificativas dos alunos para suas resoluções e conclusões. As duplas, de maneira geral, recorreram às operações de adição e multiplicação para determinar um número real (resultado), o qual correspondia à medida do comprimento do contorno (perímetro) e da área delimitada pelo desenho (Albuquerque & Carvalho, 1990; Lima, 1991; Pessoa, 2010) da arte. Essas operações, algumas vezes, eram apresentadas como ponto de partida à resolução das atividades, outras vezes foram usadas para confirmar/validar o resultado obtido. A tarefa, especificamente elaborada como contexto significativo para explorar as distintas compreensões de área e perímetro, oportunizou aos alunos mobilizar conhecimentos matemáticos prévios (Gravemeijer, 2005; Ventura, 2013; Zils, 2018) e, mediante representações e estratégias distintas, ampliaram e formalizaram esses conhecimentos (Fujii, 2013), recorrendo, algumas vezes, à representação algébrica para generalizar suas conclusões. Nesta direção, a abordagem exploratória sobre área e perímetro de figuras planas, envolvida pelo contexto da criação da arte, levou os alunos a compreenderem melhor esses conceitos, superando a confusão entre eles (Facco, 2003; French, 2004; Lopes, Salinas, & Palhares 2008; Ventura, 2013). Porém, as resoluções baseadas na aplicação imediata de fórmulas para calcular área e perímetro revelaram a dificuldade dos alunos utilizarem corretamente unidades de medida (Teles, 2007), uma vez que

focavam a atenção nos valores indicados nas representações propostas sem atentar para as unidades que as representam. Este aspecto ressalta a relevância da elaboração cuidadosa da tarefa exploratória (Ponte 2005; Ponte & Quaresma, 2011; Serrazina & Matos, 1996), a qual precisa levar o aluno a compreender as relações e distinções entre esses elementos (French, 2004; Ventura, 2013) e, sobretudo, oportunizá-lo a identificar e explorar os diferentes elementos considerados nesses processos de mensuração, assim como analisar a natureza desses elementos. Por exemplo, na estimativa do perímetro, os elementos considerados eram todos segmentos de reta, elementos unidimensionais, cuja dimensão é dada por unidades de comprimento (cm, m, por exemplo). Na estimativa da área, que envolvia polígonos e formas geométricas planas, o procedimento mais usado pelas duplas recorria à operação de multiplicação das medidas da base e da altura, de modo que a unidade de medida precisava considerar a bidimensionalidade das formas. Esta característica levou-os a perceber a diferença entre unidade de medida de comprimento e unidade de medida de área e, também, as notações matemáticas em cada caso. Entretanto, esse processo pressupõe a intervenção atenta e qualificada do professor, evidenciando a centralidade desse profissional na elaboração de tarefas ricas e desafiadoras (Canavaro, 2011; Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2011), assim como na condução da discussão coletiva buscando estimular a comunicação de ideias e conclusões matemáticas (Ponte, et al., 2014; Richit, 2020) e, a partir disso, a formalização do conhecimento (Fujii, 2013).

Área e perímetro como propriedade das formas geométricas é a perspectiva que foi explorada com menor profundidade nas discussões entre os alunos e nas justificativas das resoluções da tarefa, aspecto que sugere, por um lado, uma limitação da própria tarefa, e por outro, a pouca familiaridade dos alunos com esta compreensão. A tendência predominante em todas as duplas, de formalizar as suas compreensões reproduzindo as definições de área e perímetro presentes em muitos materiais didáticos (perímetro é a soma de todos os lados; área é o produto da base pela altura), evidencia a dificuldade deles em diferenciar os elementos que definem esses tópicos (French, 2004; Lima, 1991; Ventura, 2013), como por exemplo, quando uma das duplas multiplicou, equivocadamente, as medidas dos lados da figura para obter o perímetro. Este aspecto manifestou-se, especialmente, pela dificuldade de distinguir área e perímetro (Facco, 2003; Melo, 2003; Ventura, 2013), que são conceitos de mesma natureza (medidas de grandezas), a partir das propriedades específicas dos elementos que as definem e que são considerados na mensuração. Por fim, este aspecto aponta que os alunos reconheceram as medidas das formas geométricas do Tangram como elementos que as constituem (Baltar, 1996).

A análise evidenciou a possibilidade da abordagem exploratória (Estevam, Cyrino, & Oliveira, 2015), em que os alunos se envolveram em uma tarefa matemática que os desafiou, os mobilizou e os oportunizou explorar e confrontar conceitos a partir de diferentes representações mobilizadas em uma tarefa mais aberta (Ponte, 2005; Ponte & Quaresma, 2011; Richit & Tomkelski, 2020; Serrazina & Matos, 1996). O desenvolvimento de uma tarefa específica para tratar as dificuldades dos alunos na distinção entre área e perímetro, a qual se constituiu em ponto de partida para promover a abordagem exploratória no estudo de aula, oportunizou o crescimento dos alunos (Fujii, 2013) na medida em que exploraram diferentes modos de conceber esses conceitos. Também favoreceu o desenvolvimento dos professores por oportunizá-los a compreender melhor algumas dificuldades dos alunos (Ponte, et al., 2014; Richit & Tomkelski, 2020), identificar e compreender as razões associadas a estas dificuldades e a buscar estratégias para auxiliar os alunos nessas dificuldades. Da mesma forma, o planejamento colaborativo e reflexivo da aula de investigação, permeado pela negociação de ideias e decisões, partilha de experiências e materiais de ensino, reflexão sobre a prática e sobre o ensino da matemática constituiu-se em contexto para a concretização de uma atividade profissional que superou o individualismo predominante na rotina escolar (Richit, Ponte, & Tomasi, 2021). Por fim, o planejamento da aula de investigação centrada em uma tarefa aberta, permitiu aos professores desenvolver a capacidade de promover e potencializar a comunicação no ensino exploratório (Rodrigues, Cyrino, & Oliveira, 2018).

Nesta perspectiva, tarefas mais abertas, como esta envolvendo os conceitos de área e perímetro, se constituem em importantes oportunidades de aprendizagem, pois favorecem a negociação de significados, a construção de conceitos, a articulação de representações (Quaresma & Ponte, 2012) e a comunicação matemática por meio de linguagem verbal, escrita, numérica, algébrica ou pictórica. Além disso, as tarefas oportunizam aos alunos desenvolver suas compreensões sobre conceitos matemáticos e, sobretudo, estabelecer relações e distinções entre os mesmos (Canavarró, 2011; Serrazina & Matos, 1996), a exemplo da experiência que realizamos na abordagem exploratória de área e perímetro.

Portanto, as características e a estrutura da tarefa que embasou a abordagem de área e perímetro favoreceram a concretização de uma experiência positiva sobre estes tópicos, em sinergia com os princípios da aula de investigação do estudo de aula (Fujii, 2013; Richit, 2020). A abordagem exploratória privilegiou o trabalho autônomo dos alunos em torno de uma tarefa especificamente elaborada para aprofundar as compreensões sobre estes

conceitos, bem como a discussão coletiva das estratégias, resoluções e pontos de vista dos alunos, contribuindo para ampliar/aprofundar as compreensões sobre estes tópicos e para a superação de algumas dificuldades relacionadas à distinção entre eles e ao seu uso em situações problema. A discussão coletiva, na qual os alunos expuseram as resoluções da tarefa, apresentaram e argumentaram sobre suas conjecturas e conclusões, expuseram suas justificações e questionaram-se uns aos outros, constituiu-se um contexto de aprendizagem instigante e positivo, que favoreceu o crescimento de todos os envolvidos (alunos, professores e pesquisadores).

CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

AR (primeira autora) projetou a ideia apresentada. AR (primeira autora) desenvolveu a teoria. AR (primeira autora) e MLT adaptaram a metodologia a esse contexto, criaram os modelos, executaram as atividades e constituíram os dados. AR (primeira autora) analisou os dados. Todos os autores discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados desta pesquisa serão disponibilizados pelos autores mediante solicitação razoável.

AGRADECIMENTOS

Nosso agradecimento especial aos professores participantes do estudo de aula e aos alunos do 8º ano em que a aula de investigação foi realizada. Agradecemos também ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo: 305476/2020-3).

REFERÊNCIAS

- Albuquerque, T. O. & Carvalho, R. F. (1990). *Dicionário Elementar: Matemática*.
- Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 10(2/3), 241-286.

- Baltar, P.M. (1996). *Enseignement-apprentissage de la notion d'aire de surface plane: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*. Tese de Doutorado em Didática da Matemática, Universidade Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Bardin, L. (2003). *Análise de conteúdo*. Edições 70.
- Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In: B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte, M. (Eds). *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). D. Reidel.
- Brasil. (2017). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília, DF, Brasil.
- Canavarro, A.P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*. 115, 11-17.
- Cyrino, M.C.C.T. (2015). *Recursos Multimídia para a formação de professores que ensinam matemática: elaboração e perspectiva*. EDUEL.
- D'amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers and students. *Mediterranean journal for research in mathematics education* (Cyprus Mathematical Society), 5(2), 1-29.
- Dante, L.R. (1998). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 2.ed. Ática.
- Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In: *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). 3rd ed. Macmillan.
- Estevam, E. J. G., Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. M. (2015). Medidas de tendência central e o ensino exploratório de Estatística. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(17), 166-191.
- Facco, S. (2003). *Conceito de Área: uma proposta de ensino aprendizagem*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.
- French, D. (2004). *Teaching and learning geometry*. Continuum.
- Fujii, T. (2013). The Critical Role of Task Design in Lesson Study. *ICMI Study* 22.

- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo, J. (Eds.). *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). APM.
- Isoda, M. (2007). Una breve historia del Estudio de Clases de Matemáticas en Japón Dónde comenzó el Estudio de Clases y qué tan lejos ha llegado. In: M. Isoda, M., A. Arcavi, & A. Mena-Lorca. *El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global* (pp. 33-39), 3.ed. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Isoda, M., Arcavi, A., & Mena-Lorca, A. (2007). *El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools
- Lima, E. L. (1991). *Medida e forma em Geometria*. Comprimento, área, volume e semelhança. SBM.
- Lopes, M., Salinas, M. J., & Palhares, P. (2008). O trabalho cooperativo na resolução de problemas de áreas. In: R. Luengo, B. Gómez, Bernardo, M. Camacho, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 647-658). Española de Investigación en Educación Matemática.
- Melo, M. A. P. (2003). *Um estudo de conhecimentos de alunos de 5ª a 8ª série do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 1-25.
- Pessoa, G. S. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.
- Polya, G. (1975). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método*

matemático. Interciência.

- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular Lisboa* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 20(1), 55-81.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., Baptista, M., & Mata-Pereira, J. Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. In: J. Sousa & I. Cevallos (Eds.). *A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina Matemática* (pp. 61-82). CRV.
- Pozo, J. I. & Angón, Y. P. (1998). A solução de problemas como conteúdo Procedimental da Educação Básica. In: J. I. Pozo (org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 139-165). ArtMed.
- Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2019). Dinâmicas de reflexão e colaboração entre professores do 1.º ciclo num estudo de aula em Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 368-388.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a18>
- Quaresma, M. & Ponte, J.P. (2012). As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais. In: A. P. Canavarró, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira H.: L. Menezes, & Carreira, S. (Eds). *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 215-228). SPIEM.
- Richit, A. (2021). *Desenvolvimento Profissional de Professores Universitários em Lesson Study*. Proceedings of 9th International Congress of Educational Sciences and Development. [s.l.]: [s.n.].
- Richit, A. (2020). Lesson study from the perspective of teacher educators. *Revista Brasileira de Educação*, 25(2), 1-24.
<https://doi.org/10.1590/s1413-24782020250044>
- Richit, A. & Ponte, J.P. (2017). Teachers' Perspectives about Lesson Study. *Revista Acta Scientiae*. 19(1), 20-30.
- Richit, A., Ponte, J. P., & Tomasi, A. P. (2021). Aspects of Professional Collaboration in a Lesson Study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(2), 1-15.
<https://doi.org/10.29333/iejme/10904>

- Richit, A. & Tomkelski, M. L. (2020). Secondary School Mathematics Teachers' Professional Learning in a Lesson Study. *Revista Acta Scientiae*. 22(3), 2-27. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5067>
- Richit, A., Ponte, J., & Tomkelski, M. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira Estudos Pedagógicos*, 100(254), 54-81. <https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254.3961>
- Rodrigues, R. V. R., Cyrino, M.C.C.T., & Oliveira, H. M. (2018). Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de FP de Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 967-989. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a11>
- Serrazina, L. & Matos, J. M. (1996). *O Geoplano na sala de aula*. APM.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. The Free Press.
- Teles, R. A. (2007). M. *Imbricações entre Campos Conceituais na Matemática Escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas*. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Ventura, S. R. R. (2013). *O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro: um estudo no 2.º Ciclo do ensino básico*. Mestrado em Educação, Universidade de Lisboa.
- Yoshida, M. (1999). *Lesson study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Dissertation. University of Chicago, Chicago.
- Zils, M. I. E. (2018). *Uma análise das abordagens desenvolvidas em livros didáticos sobre os conteúdos escolares "área" e "perímetro"*. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco.