ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6302

O conhecimento matemático de futuras educadoras e professoras sobre sequências repetitivas e a capacidade de *perceber* o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância

Joana Cabral [a]
Hélia Oliveira [b]
Fátima Mendes [c]

[a] Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, UIDEF, Lisboa, Portugal
[b] Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, Portugal
[c] Instituto Politécnico de Setúbal, Escola Superior de Educação, Setúbal, Portugal

Recebido para publicação 30 nov. 2020. Aceito após revisão 26 jul. 2021.
Editora designada: M. Cinta Muñoz-Catalán.

ABSTRACT

Contexto: Diversos estudos têm mostrado que muitos futuros educadores e professores (FEPs) dos anos iniciais possuem um conhecimento superficial das sequências repetitivas (SRs), o que afeta o seu conhecimento sobre o pensamento algébrico das crianças. **Objetivo**: Este artigo tem como principal objetivo compreender o pensamento algébrico de FEPs e a sua capacidade de perceber (*noticing*) o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância, bem como a articulação entre esses dois domínios, no contexto de uma experiência de formação. **Design**: O estudo segue uma metodologia qualitativa, assente na observação participante, complementada com recolha documental. **Ambiente e participantes:** O estudo decorre de uma experiência de formação realizada numa unidade curricular de Padrões e Álgebra de uma Licenciatura em Educação Básica e tem como participantes dois pares de FEPs. **Coleta e análise de dados:** Os dados provêm das produções escritas e discussões entre os elementos de cada par de formandas no âmbito de tarefas de formação, adotando um *framework* de análise original. **Resultados**: Evidencia-se que as FEPs identificam com sucesso a estrutura das SRs, bem como a posição geral de cada termo, contudo, um dos pares ainda indicia dificuldades na compreensão plena do objeto matemático. Os pares atendem a aspetos relevantes do pensamento algébrico das crianças, ainda que, por vezes, com limitações na sua interpretação. **Conclusões:** Este estudo realça a importância de criar, na formação inicial, oportunidades para os FEPs desenvolverem o pensamento algébrico numa perspetiva de *Early Algebra* e de analisarem, neste âmbito, o trabalho de alunos dos anos iniciais.

Corresponding author: Joana Cabral. Email: joanacabral@campus.ul.pt

Palavras-chave: formação inicial de FEPs; pensamento algébrico; *noticing*; sequências repetitivas; educação de infância.

O conhecimento matemático de futuras educadoras e professoras sobre sequências repetitivas e a capacidade de *perceber* o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância

RESUMO

Contexto: Diversos estudos têm mostrado que muitos futuros educadores e professores (FEPs) dos anos iniciais possuem um conhecimento superficial das sequências repetitivas (SRs), o que afeta o seu conhecimento sobre o pensamento algébrico das crianças. **Objetivo**: Este artigo tem como principal objetivo compreender o pensamento algébrico de FEPs e a sua capacidade de perceber (*noticing*) o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância, bem como a articulação entre esses dois domínios, no contexto de uma experiência de formação. **Design**: O estudo segue uma metodologia qualitativa, assente na observação participante, complementada com recolha documental. **Ambiente e participantes:** O estudo decorre de uma experiência de formação realizada numa unidade curricular de Padrões e Álgebra de uma Licenciatura em Educação Básica e tem como participantes dois pares de FEPs. **Coleta e análise de dados:** Os dados provêm das produções escritas e discussões entre os elementos de cada par de formandas no âmbito de tarefas de formação, adotando um *framework* de análise original. **Resultados**: Evidencia-se que as FEPs identificam com sucesso a estrutura das SRs, bem como a posição geral de cada termo, contudo, um dos pares ainda indicia dificuldades na compreensão plena do objeto matemático. Os pares atendem a aspetos relevantes do pensamento algébrico das crianças, ainda que, por vezes, com limitações na sua interpretação. **Conclusões:** Este estudo realça a importância de criar, na formação inicial, oportunidades para os FEPs desenvolverem o pensamento algébrico numa perspetiva de *Early Algebra* e de analisarem, neste âmbito, o trabalho de alunos dos anos iniciais.

Palavras-chave: formação inicial de FEPs; pensamento algébrico; *noticing*; sequências repetitivas; educação de infância.

INTRODUÇÃO

A introdução do pensamento algébrico nos anos iniciais tem vindo a ser discutida amplamente na literatura e, em particular a *Early Algebra*, caracterizada como uma proposta curricular que consiste na integração de modos de pensamento algébrico desde os primeiros anos da educação básica (Carraher & Schliemann, 2007), tem-se destacado face às reconhecidas dificuldades de muitos alunos na aprendizagem da álgebra. Neste sentido, o pensamento algébrico nos anos iniciais envolve a análise de relações entre quantidades, o desenvolvimento da consciência das estruturas numéricas e propriedades, o estudo de relações funcionais, os processos de generalização e justificação e a resolução de problemas focados em relações (Kieran et al., 2016). Como contexto para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais, em especial do pensamento funcional, destacam-se as sequências, nomeadamente as sequências repetitivas (SRs) (Clements & Sarama, 2009; Threfall, 1999; Tirosh et al., 2019).

A literatura evidencia a necessidade de estudos que investiguem o conhecimento matemático dos educadores e professores[1] (EPs) sobre as SRs, bem como o conhecimento que estes têm acerca do conhecimento das crianças neste âmbito (Tirosh et al., 2019, Tsamir et al., 2019). Assim é essencial que os EPs e os FEPs (futuros educadores e professores) percebam o pensamento das crianças no que se refere às SRs e, para isso, devem identificar as estratégias que utilizam e o modo como percecionam a estrutura da sequência e a generalizam e, ainda, interpretar estes aspetos com vista a compreender o desenvolvimento do pensamento das crianças acerca de SRs (Tirosh et al., 2019). Vários estudos têm vindo a evidenciar a inter-relação entre o conhecimento acerca do pensamento das crianças e o conhecimento matemático, apontando que, ao melhorar a componente matemática, se os EPs e os FEPs se tornam mais eficientes em reconhecer os processos de aprendizagem das crianças nesta temática (Branco, 2013; Tsamir et al., 2019).

Perceber o pensamento dos alunos é um domínio específico da capacidade de *noticing* (Jacobs et al., 2010). Embora tal capacidade não tenha uma caracterização única, parece reconhecer-se globalmente que esta remete para atender a momentos importantes, raciocinar acerca dos mesmos e decidir como agir (van Es et al., 2017). A investigação tem vindo a destacar a importância desta capacidade para as práticas do professor (Jacobs et al., 2018; Mason, 2002) e a relevância e a necessidade de estudos que analisem o *noticing* dos FEPs e EPs em domínios matemáticos específicos e, em particular, no âmbito da álgebra (El Mouhayar, 2019; Llinares, 2019; Walkoe et al., 2020).

Neste estudo, atendendo à particularização da capacidade de *noticing* ao pensamento dos alunos e à caracterização de Sherin e van Es (2009), entendemos *noticing* como capacidade de descrever e interpretar o pensamento

---

[1] Em Portugal a designação *educador* refere-se a profissionais da educação no ensino pré-escolar e creche. A designação *professor* é referente a docentes que lecionam a partir do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

algébrico dos alunos, sendo designado por *perceber* o pensamento algébrico dos alunos.

Em particular, o presente artigo enquadra-se numa investigação mais abrangente acerca de uma experiência de formação, numa perspetiva de *Early Algebra*, dirigida a FEPs dos anos iniciais. Este estudo tem como objetivo compreender o pensamento algébrico de FEPs e a sua capacidade de perceber (*noticing*) o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância, no contexto das SRs. Para tal procuramos responder às seguintes questões: (i) Como se caracteriza o pensamento funcional das FEPs nesse contexto? (ii) Como se caracteriza a capacidade das FEPs de descrever e interpretar o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância no âmbito das SRs? (iii) Como se relaciona a capacidade de *noticing* das FEPs com o seu conhecimento matemático sobre SRs?

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Pensamento algébrico e sequências repetitivas

Nos últimos anos a investigação tem vindo a evidenciar que alunos dos anos iniciais, inclusive crianças em jardim de infância têm sucesso em tarefas relacionadas com o pensamento algébrico e, em particular, com o pensamento funcional (Blanton et al, 2015; Castro et al., 2017; Oliveira & Mestre, 2014). Blanton e Kaput (2011) conceptualizam o pensamento funcional de um modo amplo que incorpora a generalização de padrões e relações, usando diversas linguagens e ferramentas representacionais, e a exploração de relações generalizadas, ou funções, resultando em objetos matemáticos úteis por si só. Apesar de o pensamento funcional poder ser desenvolvido em vários contextos, a investigação tem dado particular destaque à exploração de sequências (Carraher et al., 2008; Radford, 2014). No âmbito da educação de infância e dos primeiros anos do ensino básico, as SR são as mais comuns e aquelas com que as crianças contactam mais cedo, podendo constituir veículos para a compreensão de relações essenciais, uma vez que permitem a descoberta de regularidades e apoiam as crianças no desenvolvimento da capacidade de generalização (Clements & Sarama, 2009; Lynn, 2012; Threlfall, 1999). Uma SR pode ser definida como uma sequência com um ciclo reconhecido de elementos que se repetem, que se designa por unidade de repetição (Lynn, 2012; Threlfall, 1999). A unidade de repetição, caracterizada como o menor subconjunto de elementos que repetidos podem gerar a sequência (Liljedahl, 2004), é o elemento essencial das SR. A partir da unidade de repetição e do seu comprimento (designado como o número de termos da unidade de repetição) é possível determinar qualquer termo da sequência.

Numa fase inicial, as crianças podem ser envolvidas em atividades como continuar e replicar uma sequência e identificar termos em falta (Clements & Sarama, 2009; Rittle-Johnson et al., 2013; Tirosh et al., 2019). No caso de sequências de tipo AB (sequências cuja unidade de repetição é constituída por dois termos diferentes), continuar, replicar ou identificar termos em falta são tarefas em que a grande maioria das crianças do jardim de infância tem sucesso (Rittle-Johnson et al., 2013; Tirosh et al., 2019). Muitas vezes, este sucesso está associado ao uso de estratégias recursivas em que as crianças vão alternando os termos ou optam por uma abordagem rítmica, pelo que é importante que tenham oportunidades de explorar SRs com unidade de repetição de distintos comprimentos e com diferentes disposições dos termos, para evitar que se limitem a este tipo de estratégias (Lynn, 2012; Threlfall, 1999). Para que as crianças possam compreender as SRs numa perspetiva da *Early Algebra* é essencial que as atividades propostas proporcionem um caminho para a generalização, sendo para tal importante a identificação da unidade de repetição (Lynn, 2012; Threlfall, 1999; Tirosh et al., 2019).

Formação do educador/professor em álgebra

Embora o papel dos EPs seja essencial para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos (Carraher & Schliemann, 2019), muitos FEPs tiveram pouco ou nenhum contacto com a *Early Algebra* enquanto alunos (Hohensee, 2017). Deste modo a formação inicial deve promover oportunidades para tal e, em particular, Carraher e Schliemann (2019) defendem a relevância da articulação entre sequências e funções, referindo que é bastante difícil um professor explorar padrões e sequências com os seus alunos sem as conectar com funções e relações. Sendo as SRs um dos primeiros contactos das crianças com atividades que promovem a generalização (Clements & Sarama, 2009; Tirosh et al., 2019), é fundamental que os FEP se envolvam na exploração deste tipo de sequências.

De um modo geral, os estudos têm vindo a mostrar que, maioritariamente, os EPs dos primeiros anos realizam, com sucesso, grande parte das tarefas que se propõe às crianças com SRs. Apesar de grande parte dos EPs serem bem-sucedidos em continuar, replicar e construir uma SR, muitas vezes o conhecimento do objeto matemático, em si mesmo, é bastante limitado (Lynn, 2012; Tirosh et al., 2019; Waters 2004). Muitas vezes, os EPs apresentam uma perceção superficial das SRs, recorrendo, essencialmente, a estratégias recursivas, tal como as crianças, além de manifestarem dificuldades no que se refere à linguagem e ao uso de expressões especificas (Lynn, 2012; Tirosh et al., 2019; Waters, 2004). Em alguns casos a investigação tem vindo a evidenciar que, quando envolvidos em intervenções focadas em SRs, os EPs e FEPs se tornam mais conscientes dos aspetos matemáticos associados a este tipo de sequências, como o reconhecimento da estrutura da sequência (a partir da identificação da unidade de repetição), o estabelecimento de relações entre variáveis e a criação de regras para determinar termos próximos e distantes (Branco, 2013; Tsamir et al., 2019). No entanto, muitas vezes o conhecimento dos EPs é superficial no que se refere às SRs (Lynn, 2012, Tirosh et al., 2019), pelo que é necessário promover uma compreensão profunda das SRs enquanto objeto matemático, de modo a que estes possam apoiar futuramente as crianças no desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular na expressão da generalização (Lynn, 2012).

A capacidade de *noticing* do futuro educador/professor

A investigação tem vindo, nos últimos anos, a debruçar-se sobre a capacidade de *noticing* dos EPs (Callejo & Zapatera, 2017; Jacobs et al., 2010; Walkoe et al., 2020), em contexto de formação inicial e contínua. Embora existam diferentes caracterizações desta capacidade, a maioria dos autores parece concordar que a mesma remete para aspetos a que se presta atenção em contexto educativo e destacam duas componentes essenciais relacionadas com os atos de atender e interpretar (Sherin & van Es, 2009; Walkoe et al., 2020). Vários autores (Buforn et al., 2020; Jacobs et al., 2010; Llinares, 2019; Walkoe et al., 2020) focaram a sua atenção num aspeto particular da capacidade de *noticing* do professor relativa ao pensamento das crianças. De uma forma sintética, a capacidade de *noticing* do professor relativamente ao pensamento dos alunos é caracterizada como a capacidade cognitiva de identificar e interpretar os aspetos salientes da atividade dos alunos para que, desta forma, possa tomar decisões conscientes (Jacobs et al., 2010). De modo a *perceber* o pensamento dos alunos, não é suficiente que o professor identifique os aspetos corretos e incorretos nas respostas, requerendo que determine de que forma estes são, ou não, significativos no contexto matemático e como podem influenciar a compreensão dos conceitos por parte dos alunos (El Mouhayar, 2019; van Es et al., 2017). Em particular, para que o professor possa *perceber* o pensamento dos alunos, é necessário reconstruir e fazer inferências da compreensão dos mesmos a partir das suas produções ou intervenções (Ivars et al., 2020).

Apesar da sua importância para as práticas letivas, a capacidade de *noticing* não é inata aos professores (Ivars et al., 2020; Jacobs et al., 2018), pelo que a formação inicial tem vindo a procurar proporcionar aos FEPs o contacto com o trabalho dos alunos através de meios como a análise de vídeos de sala de aula (Rodrigues et al., 2019; Walkoe et al., 2020). Vários estudos procuram investigar o modo como o conhecimento matemático (CM) se relaciona com a capacidade dos FEPs perceberem o pensamento dos alunos, sendo que os resultados têm evidenciado que, embora o CM seja importante não é suficiente, em especial no que diz respeito à interpretação do pensamento dos alunos (Buforn et al., 2020; Callejo & Zapatera, 2017; Jacobs et al., 2010; Llinares, 2019). No que se refere à capacidade de *noticing* no âmbito do pensamento algébrico e, em particular, no contexto das sequências, alguns estudos têm focado a sua atenção no desenvolvimento das componentes de identificação e interpretação do pensamento dos alunos. Além da perceção de que estas duas componentes estão relacionadas entre si, parece haver um consenso de que a interpretação é um processo mais complexo para os FEPs (Callejo & Zapatera, 2017; Llinares; 2019; Rodrigues et al., 2019).

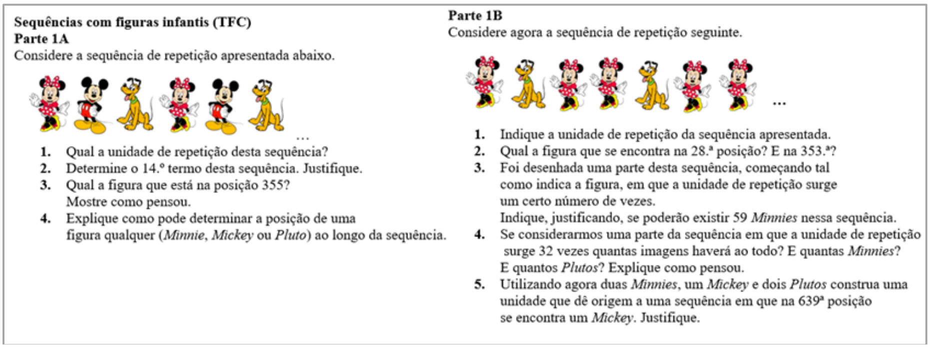
METODOLOGIA

O presente estudo foi desenvolvido no âmbito de uma experiência de formação na unidade curricular (UC) *Padrões e Álgebra* do 3.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB), em Portugal. A experiência de formação, em que a primeira autora assumiu, simultaneamente, o papel de investigadora e de formadora, ocorreu no ano letivo 2018/2019, sob o tema "Da Aritmética à Álgebra: desenvolver o pensamento algébrico e Padrões e Funções". Esta teve a duração de 11 aulas e foi delineada em colaboração com a docente responsável pela UC. O objetivo principal foi promover, simultaneamente, o pensamento algébrico das formandas (futuras educadoras e professoras dos anos iniciais) e a sua capacidade de *perceber* o pensamento algébrico dos alunos, pelo que as tarefas de formação (tarefas de formação com incidência no conhecimento matemático – TFC – e tarefas de formação relativas à capacidade de *perceber* o pensamento algébrico dos alunos – TFP) estão, na sua maioria, inter-relacionadas. Deste modo, as TFC integram questões que visam o aprofundamento do pensamento algébrico das formandas, uma vez que o programa de Matemática vigente quando frequentaram os anos iniciais, enquanto alunas, não contemplava o domínio da *Early Algebra*. Em particular houve uma forte preocupação em articular a noção de sequência repetitiva, enquanto tópico escolar, com a noção de função, de modo a consciencializar as formandas para a natureza desse objeto matemático (Carraher & Schliemann, 2019). As TFP consistem na análise de resoluções escritas de crianças, transcrições de excertos de episódios de sala de aula e vídeos relativos a momentos de trabalho autónomo e de discussão coletiva em turma, tendo por base tarefas matemáticas semelhantes às resolvidas pelas formandas. As tarefas foram realizadas maioritariamente a pares, tendo as aulas um grande foco no trabalho autónomo das formandas, uma vez que a formação adotou, globalmente, uma prática de ensino exploratório (Canavarro et al., 2014; Hohensee, 2017).

Este estudo segue uma metodologia qualitativa, sendo os métodos de recolha de dados a observação participante das aulas, complementada com registo áudio e vídeo, e a recolha documental. No âmbito deste artigo, selecionámos para análise as produções das formandas relativas a duas tarefas de formação: *Sequências com figuras infantis* (TFC – Figura 1), constituída por duas partes, e *Sequências com figuras infantis* (TFP – Figura 2).

Figura 1

Sequências com figuras infantis (TFPC)


Sequências com figuras infantis (TFC)
Parte 1A
Considere a sequência de repetição apresentada abaixo.

1. Qual a unidade de repetição desta sequência?
2. Determine o 14.º termo desta sequência. Justifique.
3. Qual a figura que está na posição 355? Mostre como pensou.
4. Explique como pode determinar a posição de uma figura qualquer (*Minnie*, *Mickey* ou *Pluto*) ao longo da sequência.

Parte 1B
Considere agora a sequência de repetição seguinte.

1. Indique a unidade de repetição da sequência apresentada.
2. Qual a figura que se encontra na 28.ª posição? E na 353.ª?
3. Foi desenhada uma parte desta sequência, começando tal como indica a figura, em que a unidade de repetição surge um certo número de vezes. Indique, justificando, se poderão existir 59 *Minnies* nessa sequência.
4. Se considerarmos uma parte da sequência em que a unidade de repetição surge 32 vezes quantas imagens haverá ao todo? E quantas *Minnies*? E quantos *Plutos*? Explique como pensou.
5. Utilizando agora duas *Minnies*, um *Mickey* e dois *Plutos* construa uma unidade que dê origem a uma sequência em que na 639ª posição se encontra um *Mickey*. Justifique.

Figura 2

Sequências com figuras infantis (TFP)

Sequências com figuras infantis (TFP) Um grupo de crianças do jardim de infância, com idades compreendidas entre os 4 e os 6 anos, realizou algumas tarefas de sequências de repetição, tendo por base as mesmas figuras que lhe foram apresentadas na parte 1. **1.** O vídeo ***Descobre a unidade*** mostra algumas situações em que as crianças tiveram de identificar a unidade de repetição das sequências que lhes foram apresentadas. Compare as quatro situações, indicando de que forma pensa que as características particulares das sequências construídas influenciaram a resposta das várias crianças. **2.** No vídeo ***O que vem a seguir*** as crianças tentam identificar qual a figura que se encontra numa determinada posição, para algumas das sequências apresentadas. 2.1. Explique como lhe parece que as crianças terão pensando em cada uma das situações. 2.2. Compare os raciocínios evidenciados pelas crianças, em cada situação, procurando explicar que aprendizagens estas revelam no que se refere a sequências de repetição. **3.** O vídeo ***Descobre o que falta*** mostra como as crianças identificaram as figuras em falta quando a educadora construía uma sequência e virava algumas das cartas para baixo. Compare as duas situações apresentadas, neste vídeo, referindo diferenças entre os conhecimentos que as crianças têm de mobilizar em cada uma delas. **4.** Analise o vídeo ***Qual o padrão***. Comente os aspetos que considera mais significativos no episódio que visionou.

Ambas as tarefas foram realizadas após o contacto inicial das formandas com as SRs e a discussão de conceitos associados. Na TFP, realizada após a TFC, as formandas analisaram as intervenções de crianças de um grupo do jardim de infância (Apêndice), com idades compreendidas entre os 4 e os 6 anos, acerca de SRs semelhantes às que constam da TFC.

Como participantes para este estudo foram selecionados dois pares de formandas: Anabela e Bianca e Beatriz e Júlia, que no momento da recolha de dados tinham entre 20 e 21 anos. A escolha destes pares teve por base o seu desempenho em tarefas de diagnóstico realizadas no início da experiência de formação e a diversidade dos seus percursos no ensino secundário, sendo que Anabela e Bianca frequentaram, com sucesso, a disciplina de Matemática A, enquanto Beatriz e Júlia não frequentaram qualquer disciplina de Matemática no ensino secundário.

Tendo em conta a reduzida investigação que integre os domínios do pensamento algébrico no âmbito das SRs e a capacidade de *noticing* sobre o pensamento algébrico dos alunos, nesse âmbito, elaborámos um *framework* específico para análise de dados e que constitui uma contribuição original deste estudo. Este *framework* resulta do cruzamento dos dois domínios considerados no estudo: (1) conhecimento matemático (pensamento funcional no campo das SRs) e (2) capacidade de *perceber* o pensamento algébrico dos alunos, no campo das SRs.

A tabela 1 apresenta as categorias e subcategorias de análise de pensamento funcional, no contexto das SRs.

Tabela 1

Categorias de análise relativas ao pensamento funcional: SRs

Categorias	Subcategorias
Explorar Relações	Identificar a estrutura da sequência Identificar as variáveis e estabelecer uma relação entre elas Estabelecer uma relação entre as variáveis
Generalizar	Estender o raciocínio a partir do domínio inicial Expressar a regra geral

Explorar Relações, no contexto das SRs*,* refere-se à identificação da estrutura da sequência, em particular da unidade de repetição e da relação sequencial cíclica entre termos, das variáveis presentes e do modo como estas se relacionam, isto é, da relação entre ordem e termo (Lynn, 2012; Threlfall, 1999; Tirosh et al., 2019).

Generalizar, no contexto das SRs*,* remete para a extensão do raciocínio a partir do domínio inicial, através da identificação da comunalidade entre casos, e para a formulação de uma regra geral que permite determinar qualquer termo da sequência dada a sua ordem (Branco, 2013; Liljedahl, 2004).

As categorias de análise de dados relativas à capacidade de *perceber* o pensamento dos alunos (Tabela 2) resultam do cruzamento das dimensões do pensamento funcional no contexto das SRs, assumidas na tabela 1, e das duas dimensões de *perceber* o pensamento algébrico descritas na literatura, isto é, *descrever* e *interpretar* (Callejo & Zapatera, 2017; Jacobs et al., 2010; Rodrigues et al., 2019; Walkoe et al., 2020).

Tabela 2

Categorias de análise de perceber o pensamento algébrico dos alunos: SRs

			***Perceber* o pensamento algébrico dos alunos**	
			Descrever	**Interpretar**
Pensamento Funcional	Explorar Relações	Reconhecer a identificação da unidade de repetição	Indicar se (e de que modo) as crianças identificam a unidade de repetição	Fazer inferências sobre aspetos subjacentes à identificação da unidade de repetição e o que estes revelam acerca do conhecimento matemático das crianças
	Explorar Relações e Generalizar	Reconhecer o estabelecimento de relações entre termos	Identificar se (e de que modo) as crianças percecionam relações entre termos das SRs	Fazer inferências sobre aspetos subjacentes à determinação de termos e o que estes revelam acerca do conhecimento das crianças
		Reconhecer o estabelecimento de relações entre ordens e termos	Indicar se (e de que modo) as crianças determinam um termo dada a sua ordem.	Fazer inferências sobre aspetos subjacentes à determinação de termos dada a sua ordem e o que estes revelam acerca do conhecimento das crianças

De um modo geral, *descrever* corresponde à identificação dos aspetos matemáticos relevantes presentes nas resoluções/intervenções dos alunos e nas suas estratégias (Jacobs et al., 2010) associando-se ao reconhecimento dos elementos matemáticos essenciais das produções e/ou intervenções dos alunos, ao reconto e à explicação dos aspetos que despertam a atenção (Estapa et al., 2018, Ivars et al., 2020; Walkoe et al., 2020). Para a análise relativa a esta dimensão incluem-se, ainda, os comentários das formandas sobre a correção ou incorreção das respostas (van Es et al., 2017). *Interpretar* remete para o modo como as formandas raciocinam acerca dos elementos que identificaram e descreveram (Sherin & van Es, 2009; Walkoe et al., 2020), olhando para além do que foi escrito ou dito pelos alunos (Jacobs et al., 2010). Esta componente envolve explicar os procedimentos usados, os motivos pelos quais uma resposta está correta ou incorreta e inferir a origem dos erros ou dificuldades (Ivars et al., 2020). Esta dimensão assenta particularmente nas inferências das formandas sobre o pensamento algébrico dos alunos, em que procuram compreender os motivos que os levaram a apresentar determinada produção escrita ou oral.

RESULTADOS

Pensamento algébrico das formandas

A análise de dados que se apresenta em seguida está organizada por pares de formandas e incide sobre as suas produções relativamente à TFC, bem como sobre os diálogos ocorridos no seio de cada par aquando resolução da mesma. A TFC apresenta duas SRs de comprimento 3 (uma de tipo ABC e outra ABA) com questões que incidem na identificação das respetivas unidades de repetição, na determinação de termos próximos e distantes, do número de figuras dado um certo número de ocorrências e de uma regra geral, e na construção de uma nova sequência dadas algumas condições.

Anabela e Bianca

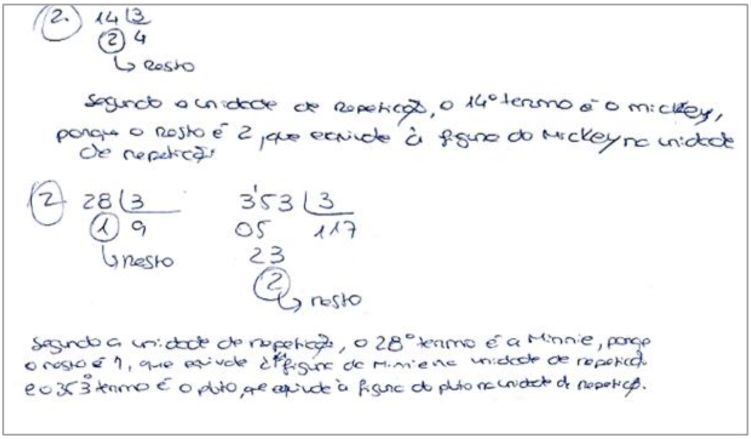
*Explorar relações***.** As formandas identificam com sucesso a estrutura das duas sequências apresentadas, indicando que a unidade de repetição da SR de tipo ABC é "Minnie, Mickey, Pluto" e que a de tipo ABA é "Minnie, Mickey, Minnie".

O par identifica também a composição da unidade de repetição de tipo ABA e o número de figuras de cada tipo que a constituem. Quando questionadas acerca da possibilidade de existir uma "parte" da sequência com 59 Minnies, as formandas mostram compreender que o número de Minnies é sempre par (desde que a unidade de repetição seja apresentada de forma completa), como verbalizado por Bianca: "Nunca vai haver [59 Minnies] porque é um número ímpar. Tu, na repetição da unidade, tens sempre um número par de Minnies". No entanto, na sua produção escrita, recorrem a um raciocínio proporcional, apresentando uma regra de três simples, o que parece indicar que sentem necessidade de justificar através de cálculos o modo como pensam. As formandas identificam, também sem dificuldade, o número de figuras de cada tipo quando a unidade de repetição ocorre 32 vezes, indicando que seriam 32 Plutos, 64 Minnies e 96 figuras no total.

As formandas identificam o comprimento da unidade de repetição, como referido por Anabela, na discussão entre o par: “para saber o décimo quarto termo temos de dividir o catorze pelo três, que é o comprimento”. O par utiliza este conhecimento na determinação de termos da sequência, evidenciando atender a uma relação entre as variáveis, ainda que não as identifique explicitamente. A produção escrita das formandas (Figura 3) permite inferir que estabelecem uma relação entre a posição (ordem) de uma figura na sequência e o respetivo termo (tipo de figura), tanto para uma SR de tipo ABC (primeira resolução – Figura 3) como ABA (segunda resolução – Figura 3).

Figura 3

Resolução de Anabela e Bianca da TFC– Q2 (1A) e Q2(1B)


2. 14 |3
2 4
↳ resto

Segundo a unidade de repetição, o 14º termo é o mickey, porque o resto é 2, que equivale à figura do Mickey na unidade de repetição.

2 28 |3
1 9
↳ resto

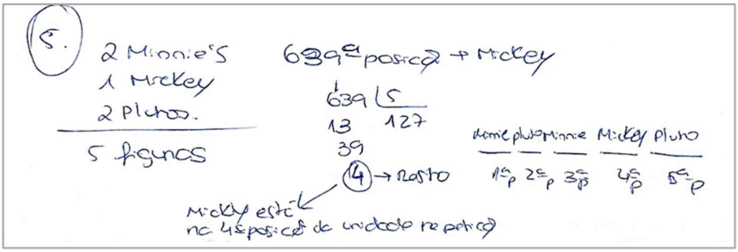
353 |3
05 117
23
2 ↳ resto

Segundo a unidade de repetição, o 28º termo é a Minnie, porque o resto é 1, que equivale à figura da Minnie na unidade de repetição e o 353º termo é o pluto, que equivale à figura do pluto na unidade de repetição.

Generalizar. A partir da resolução apresentada na figura 3, é possível depreender que as formandas compreendem que há uma igualdade entre cada termo das SRs e um dos três primeiros termos. Na determinação dos termos solicitados recorrem ao algoritmo da divisão de modo a obter o valor do resto. Embora na explicação que apresentam por escrito não refiram de modo explícito a posição que cada figura ocupa na unidade, o diálogo entre o par evidencia que relacionam inequivocamente cada figura com a sua posição, como expresso por Anabela: “Como o resto é dois equivale ao segundo termo da unidade de repetição”. Assim, as formandas evidenciam compreender a correspondência entre cada termo e a sua ordem, estendendo o raciocínio para além do domínio inicial, e identificam um processo que lhes permite determinar qualquer termo de uma SR através do algoritmo da divisão. Baseando-se no facto de saberem que conhecendo a unidade de repetição e o seu comprimento podem determinar qualquer termo, o par é bem-sucedido na construção da unidade de repetição de uma nova SR que lhes foi solicitada (Figura 4).

Figura 4

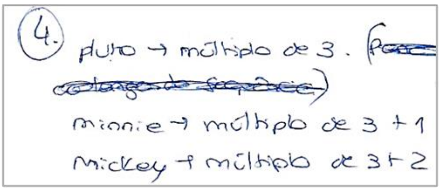
Resolução de Anabela e Bianca da TFC – Q5(1B)



A sua produção escrita, bem como o diálogo entre o par, reforçam a conjetura de que as formandas identificam um procedimento geral que adotam para todos os casos, como referido por Bianca: “Eles querem uma sequência em que o Mickey esteja nessa posição, por isso vamos fazer a regra para ver em que posição se encontra o Mickey na unidade de repetição”. O discurso da formanda em conjunto com a resolução e, em particular, o facto de utilizar a palavra “regra”, mostra que identificam a validade das relações que podem ser estabelecidas entre ordens e termos para qualquer SR.

Figura 5

Resolução de Anabela e Bianca da TFC– Q(1B)



Além de mostrarem identificar uma relação geral entre os termos e as ordens nas SRs, as formandas são bem-sucedidas na expressão da regra geral, que relaciona um termo com a sua ordem (Figura 5).

No caso da SR de tipo ABC, o par apresenta uma regra em que identifica Pluto como a figura que se encontra sempre nas posições múltiplas de três, estabelecendo a partir daí as posições gerais das restantes figuras. O facto de recorrerem à adição do resto para determinar o termo de determinada ordem e não à subtração possivelmente indica que as formandas estão focadas no procedimento que consideram geral, à semelhança do que já tinham evidenciado na construção de uma nova sequência (Figura 4).

Beatriz e Júlia

Explorar relações. As formandas identificam a estrutura das sequências em questão, indicando que a unidade de repetição da primeira SR apresentada (de tipo ABC) é “Minnie, Mickey, Pluto” e a da segunda (de tipo ABA) é “Minnie, Mickey, Minnie”.

Este par de formandas nunca faz referência direta ao comprimento da unidade de repetição, mas o diálogo ocorrido entre elas permite inferir que o identificam, ao reconhecerem que, no caso da unidade de repetição de tipo ABC, as posições múltiplas de três correspondem à figura Pluto, como referido por Beatriz: “O Pluto é sempre um múltiplo de três certo? Três, seis, nove?”. O discurso da formanda evidencia que através da continuação da sequência (possivelmente feita sem necessidade de recorrer a representações externas), identifica uma relação entre os termos cuja figura é o Pluto e a sua ordem, estabelecendo uma relação entre as variáveis. O par recorre a esta informação para determinar o 14.º termo indicando, na sua produção escrita, que “Sendo que o Pluto é sempre um múltiplo de 3, o 14.º termo será o Mickey, pois é anterior ao múltiplo de 3”. A análise desta produção escrita permite inferir que compreendem que a figura antes do Pluto corresponde ao Mickey, o que evidencia a identificação de relações entre termos.

As formandas relacionam corretamente o número de figuras de cada tipo com a unidade de repetição, mas evidenciam algumas dificuldades, no que se refere à perceção da relação cíclica entre termos. Inicialmente, quando questionadas acerca da possibilidade de uma sequência em que a unidade de repetição se repete um certo número de vezes ter 59 Minnies, começam por confundir o número de Minnies existente com a ordem na sequência, procurando, através da calculadora o múltiplo de três mais próximo de 59. A partir da conversa entre as formandas é possível inferir que, inicialmente, não compreendem a questão apresentada e tentam relacionar o número indicado com a multiplicidade dos termos, com base na relação que identificam para os múltiplos de três. No entanto, acabam por reconhecer que não estavam a pensar de forma correta e Beatriz assume que o número de Minnies seria sempre par "Não, não, cada unidade de repetição tem sempre duas Minnies, por isso o número de Minnies vai ser sempre par" e Júlia identifica que o número de Minnies só seria ímpar caso a unidade de repetição não fosse apresentada de forma completa: "Se não a sequência era incompleta". Embora verifiquem que cada unidade de repetição tem duas Minnies, Beatriz e Júlia voltam a evidenciar dificuldades em relacionar o número de termos com a constituição da unidade de repetição, quando lhes é proposto que determinem o número de figuras de cada tipo que surgem na sequência quando a unidade de repetição ocorre 32 vezes. Ainda assim, as formandas identificam facilmente que o número total de figuras é 96 e também que o número de Minnies é sempre o dobro do número de Plutos, evidenciando o reconhecimento de relações entre os termos, mas tal não é suficiente para determinarem diretamente o número de Minnies, necessitando de recorrer à diferença entre o total de termos e as figuras que correspondem ao Pluto. Na sua produção escrita (Figura 6) explicam o modo como pensaram, não permitindo inferir se compreendem a relação entre o número de vezes que a unidade de repetição surge e o número total de Minnies.

Figura 6

Resolução de Beatriz e Júlia da TFC – Q4(1B)

4. Imagens ao todo: 32 x 3 = 96

Minnies: 96 - 32 = 64 → total de Minnies

total de termos; Total de Plutos

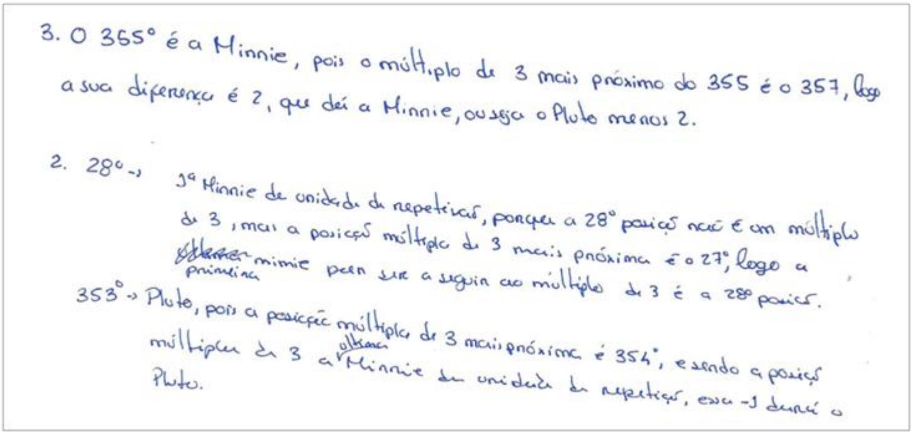
(Se cada sequência te 1 pluto e saõ 32 sequências, então há 32 plutos. Logo, o número total de termos menos o número de plutos vai dar o número de minnies.)

O facto de as formandas escreverem "cada sequência" indicia alguma falta de rigor na utilização de expressões matemáticas específicas. O par conhece e usa a expressão "unidade de repetição" e na resolução desta questão aparentemente assume que é indiferente recorrer a esta expressão ou a "sequência", o que indicia uma noção pouco clara dos conceitos envolvidos.

Generalizar. As formandas, em consonância com o facto de terem identificado que a figura nas posições múltiplas de três corresponde sempre à última figura da unidade de repetição, desenvolvem um procedimento que lhes permite determinar qualquer termo, dada a sua ordem. O par identifica o múltiplo de três mais próximo da ordem solicitada e recua ou avança uma ou duas unidades para chegar à ordem pretendida (Figura 7), tanto para a SR de tipo ABC (Questão 3 – 1A) como ABA (Questão 2 – 1B).

Figura 7

Resolução de Beatriz e Júlia da TFC– Q3(1A), Q2(1B)


3. O 355° é a Minnie, pois o múltiplo de 3 mais próximo do 355 é o 357, logo a sua diferença é 2, que dá a Minnie, ou seja o Pluto menos 2.

2. 28° → 1ª Minnie da unidade de repetição, porque a 28° posição não é um múltiplo de 3, mas a posição múltiplo de 3 mais próxima é o 27°, logo a ~~última~~ primeira minnie para ser a seguir ao múltiplo de 3 é a 28° posição.

353° → Pluto, pois a posição múltipla de 3 mais próxima é 354°, e sendo a posição múltipla de 3 a última Minnie da unidade de repetição, esse -1 dará o Pluto.

Na sua produção escrita, as formandas não explicam qual a estratégia utilizada para determinar o múltiplo mais próximo, no entanto, o diálogo ocorrido entre elas permite afirmar que recorrem a uma estratégia de tentativa e erro, com recurso à calculadora. Por exemplo, na determinação do 355.º termo da SR de tipo ABC apresentada, após descobrirem que o múltiplo de três mais próximo é 357, Júlia afirma: "Então é menos dois, logo é a Minnie, certo? (…) porque a Minnie é os múltiplos de três menos dois". O diálogo entre as formandas, em especial a afirmação de Júlia, evidencia que relacionam com sucesso qualquer termo com a sua posição geral, no entanto, a sua produção escrita realça essencialmente a relação entre termos. As formandas identificam, por escrito, uma regra geral que relaciona os termos e as posições, mas voltam a centrar-se na relação entre termos, usando o Pluto como referência para determinar qualquer termo: "Como sabemos que a figura do Pluto é sempre um múltiplo de 3, as outras figuras serão sempre -1 ou -2 que o Pluto ou +1 ou +2 que o mesmo". Embora sejam bem-sucedidas na expressão da regra geral, as formandas mostram bastantes dificuldades quando lhes é solicitado que construam uma outra SR com uma nova unidade de repetição, dados o comprimento da mesma e um termo distante (Questão 5 – 1B), possivelmente por terem estado, até ali, muito focadas no procedimento para encontrar termos distantes. As formandas evidenciam dúvidas sobre se devem dividir 639 por quatro ou por cinco, parecendo procurar um conjunto de formas diferentes para construir a nova SR. Possivelmente devido ao facto de a questão ser bastante mais complexa que as restantes e a algumas dificuldades associadas à compreensão das características essenciais de uma SR como objeto matemático, o par acaba por desistir da resolução da questão sem fazer qualquer registo.

Perceber o pensamento algébrico das crianças

A análise de dados apresentada em seguida está organizada por pares de formandas e incidiu sobre as suas produções relativamente à TFP, bem como sobre os diálogos ocorridos entre os elementos de cada par aquando resolução da mesma. Esta tarefa de formação apresenta um conjunto de vídeos de crianças do jardim de infância em que as mesmas exploram SRs. As questões colocadas às crianças incidem sobre a identificação da unidade de repetição das várias sequências apresentadas e a determinação de termos.

Anabela e Bianca

*Explorar relações***.** Na análise do vídeo "Qual o padrão?" (Apêndice) as formandas, ao verem a sequência apresentada, consideram que a mesma tem comprimento 6. A partir da sua perceção acerca da estrutura da sequência, o par analisa a intervenção das crianças, assumindo que as ações das mesmas decorrem de dificuldades em identificar o comprimento da unidade de repetição. Na sua produção escrita afirmam:

> O grupo de crianças refere que não se trata de um padrão porque […] percebem que uma das figuras não se encontra na posição correta, porque não são capazes de reconhecer a unidade de repetição com 6 termos, mas apenas com 3 termos.

Possivelmente por assumirem que a intervenção das crianças resulta da não identificação de uma unidade de repetição com seis termos, as formandas não atendem a aspetos fundamentais deste episódio, como o facto de as crianças verbalizarem o reconhecimento de relações relativamente à posição das figuras na unidade de repetição, o que evidencia que a sua análise é bastante condicionada pela perceção que as próprias fazem da sequência apresentada.

Na análise do vídeo "O que vem a seguir?" (Apêndice) as formandas recorrem também à identificação da unidade de repetição por parte das crianças para justificar de que modo determinam termos de algumas SRs. Na primeira situação apresentada, o par considera que as crianças determinam um termo próximo através da repetição da unidade de repetição de tipo AB e assumem, na produção escrita, que estas "conhecem e sabem o que é uma unidade de repetição, uma vez que para chegarem ao resultado repetem sempre a unidade de repetição". Esta afirmação sobre o "conhecimento" da unidade de repetição é, talvez, consequência do facto de, no vídeo, as crianças, aparentemente, recorrerem a uma estratégia rítmica em que repetem o "nome" das figuras. No diálogo entre o par, Bianca refere: "eu acho que é pela repetição, porque eles estão sempre a dizer "Minnie, Mickey, Minnie, Mickey". Nesta situação chegaram ao resultado através da repetição da unidade de repetição". O discurso da formanda evidencia que associa a repetição cíclica correta dos termos com a identificação da unidade de repetição. As formandas assumem, deste modo, que ao "lerem" corretamente a sequência, as crianças identificam a unidade de repetição, não se interrogando se esta leitura correta decorre da perceção do conjunto de termos que se repete ciclicamente ou apenas de uma estratégia recursiva em que alternam os termos.

Na análise da terceira situação, o diálogo entre o par mostra que, a partir das ações das crianças, as formandas assumem que estas identificam a posição de cada figura na unidade de repetição, tal como refere Bianca: "Acho que conseguem perceber que na unidade de repetição a segunda figura é sempre o Pluto. Podemos dizer que elas chegaram ao resultado certo a partir da unidade de repetição, pela posição que cada figura ocupa na unidade". O seu discurso permite inferir que reconhece que as crianças percecionam uma relação entre os termos da sequência e, em particular, a igualdade entre um determinado termo e um dos três primeiros. No entanto, não registam nenhum destes aspetos limitando-se, na sua produção escrita, a recontar o que as crianças fizeram, sem fazer inferências acerca do seu conhecimento matemático.

Generalizar. Anabela e Bianca analisam a situação 2 do vídeo "O que vem a seguir?" (Apêndice), em particular a intervenção de Maria, focando-se no modo como a criança determina os termos solicitados. O diálogo entre as formandas evidencia a compreensão de que a criança, possivelmente, pensa de um modo mais abstrato do que as restantes. Em particular, surgem as afirmações: “[A Maria] não recorre à unidade de repetição” e “parece que ela percebe o padrão em si”. Embora não expliquem exatamente o que pretendem dizer, o comentário acerca da unidade de repetição indicia que consideram que Maria não necessita de seguir a unidade de repetição termo a termo, tendo uma visão da unidade de repetição como um todo. A afirmação sobre a perceção do padrão aparentemente remete para a compreensão da estrutura da sequência e relações gerais. Assim, o par reconhece que Maria estende a relação entre termos do domínio inicial para uma relação entre quaisquer termos da sequência e assume também que a criança tem a noção de uma regularidade a cada quatro termos, como referido por Anabela: “ela vê que de quatro em quatro também vai ser igual”. Na sua produção escrita, as formandas procuram identificar a estratégia utilizada, indicando que “Maria chega ao resultado fazendo contas/através de cálculos”, o que possivelmente remete para a decomposição de oito (ordem do termo solicitado) que faz em dois grupos de quatro. Referem também que “Maria consegue identificar que antes e depois da Minnie vem sempre um Mickey”, o que reforça a ideia de que inferem que a criança reconhece a comunalidade entre casos e a generaliza para qualquer caso. Ao longo da análise da produção das crianças, as formandas recorrem à expressão “padrão” aparentemente como sinónimo de SR e também como forma de expressar a estrutura de uma SR, quando se referem à intervenção de Maria [“parece que ela percebe o padrão em si”], o que permite inferir que por vezes não utilizam as expressões específicas das SRs com total precisão.

Beatriz e Júlia

Explorar relações. Ao analisarem o vídeo “Qual é padrão?” (Apêndice) as formandas, tal como Anabela e Bianca, assumem que a unidade de repetição da sequência apresentada tem comprimento 6. As formandas consideram, na sua produção escrita que as crianças:

> apresentam dificuldades em identificar a unidade de padrão, pois esta é composta por 6 termos, mas o mesmo termo aparece 3 vezes só que em posições diferentes (…) não conseguem perceber que na mesma unidade de padrão os termos podem ser repetidos em posições diferentes.

Uma vez que, para o par, a unidade de repetição é constituída por seis termos com figuras não consecutivas idênticas entre si, acabam por associar as dificuldades das crianças à complexidade da estrutura da sequência. A sua perceção acerca da intervenção das crianças é fortemente condicionada pelo seu próprio conhecimento matemático, focando-se essencialmente no comprimento da unidade de repetição sem considerarem aspetos fundamentais da situação, como o facto de as crianças reconhecerem relações entre termos e estabelecerem relações entre as figuras e a sua posição na unidade de repetição.

Na análise do vídeo "O que vem a seguir?" (Apêndice) as formandas atendem, essencialmente, às estratégias utilizadas pelas crianças na determinação de termos e comparam o conhecimento matemático destas no âmbito das SRs. Na primeira situação Beatriz e Júlia consideram, na sua produção escrita, que as crianças determinam o nono termo através da repetição, indicando que "vão contando os termos pelos dedos até ao 9 (…) revelando um conhecimento mais elementar". As formandas evidenciam associar o recurso a uma representação ativa (contar pelos dedos) a um conhecimento menos desenvolvido que as restantes intervenções. Embora considerem aspetos importantes da intervenção das crianças, o par não reconhece que estas inicialmente determinam o nono termo sem necessitar de contar pelos dedos, evidenciando o estabelecimento de relações entre termos. Por comparação, na análise da terceira situação as formandas atendem ao facto de as crianças não necessitarem de "contar pelos dedos" e de se basearem na composição da unidade de repetição para a determinação do oitavo termo. Em particular, na discussão entre o par, Beatriz refere que as crianças "vão ver a unidade de padrão, sabem que seria o Mickey a seguir, logo a seguir era o Pluto (…) sabem porque seria aquele [termo]", o que indicia que considera que as crianças estabelecem uma relação entre a figura e a sua posição na unidade de repetição, o que, na produção escrita, associam a um "conhecimento das sequências de padrão (…) mais desenvolvido que o 1[Situação 1]". As formandas utilizam expressões como "unidade de padrão" ou "sequências de padrão", o que, à semelhança da resolução da TFC, evidencia algumas dificuldades no uso de expressões associadas às SRs.

Generalizar. Na análise da situação 2 do vídeo "O que vem a seguir?" (Apêndice), a conversa entre as formandas sobre a intervenção de Maria permite concluir que reconhecem elementos importantes e que relacionam o modo como a criança determina os termos solicitados com uma capacidade de pensar de um modo mais abstrato que as restantes. O par infere que Maria entende que há uma regularidade, tanto a cada dois termos, como a cada quatro, como indiciado por Júlia, ao referir que "[Maria] viu que precisava de um par igual a esse" e, por Beatriz, ao indicar que a criança "parece que está a perceber que de quatro em quatro vai ser sempre o Mickey". Relativamente ao facto de Maria identificar que entre duas Minnies existe sempre um Mickey, Beatriz refere: “e aquilo de o Mickey estar sempre entre duas Minnies. (…) ela aí faz logo por pensamento lógico (…) ela pensa logo automático sem fazer contas”. O excerto aparenta o reconhecimento de que Maria ultrapassa o domínio dos termos já conhecidos, para indicar uma relação para quaisquer dois termos. Possivelmente devido ao discurso de Maria, Júlia assume que “ela já consegue fazer uma regra” e na produção escrita enfatizam essa questão, indicando que Maria:

> percebe que se o termo 11 é uma Minnie o 10 e 12 têm obrigatoriamente de ser Mickey para respeitar a unidade de padrão. Isto revela um pensamento sobre sequências de repetição mais desenvolvido que o anterior pois já consegue formar uma regra”.

O discurso das formandas e sua produção escrita permite conjeturar que, para o par, a “expressão de uma regra” significa um conhecimento mais desenvolvido neste âmbito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, a partir da análise apresentada procurámos compreender o pensamento algébrico de dois pares de FEPs – Anabela e Bianca e Beatriz e Júlia – no que se refere ao pensamento funcional no contexto das SRs, à sua capacidade de perceber (*noticing*) o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância e ao modo como os dois domínios (conhecimento matemático e *noticing*) se relacionam entre si.

Relativamente ao conhecimento matemático no âmbito das SRs, os dois pares identificam a estrutura das sequências com sucesso. No que se refere à identificação das unidades de repetição das sequências apresentadas, ambos os pares o fazem sem dificuldade e de um modo imediato. Já o estabelecimento de relações entre o número de elementos de cada tipo e a unidade de repetição é problemático para Beatriz e Júlia que, embora acabem por responder corretamente às questões associadas a estas relações, não mostram compreendê-las em profundidade. Os dois pares determinam com sucesso qualquer termo, dada a sua posição na sequência, estabelecendo uma relação entre termos e respetivas ordens, à semelhança dos resultados do estudo de Branco (2013). Ambos evidenciam compreender a igualdade entre cada termo das SRs e um dos três primeiros termos, identificando corretamente a posição geral de cada termo. Anabela e Bianca focam-se na relação identificada e a perceção acerca da estrutura das SRs permite que construam, com sucesso, uma outra sequência com determinadas características, dadas as figuras que a constituem e o seu número. Beatriz e Júlia centram-se no procedimento que lhes permite, a partir da identificação de um múltiplo de três, retirar ou acrescentar unidades até obter a ordem pretendida. O facto de se focarem no procedimento influencia o seu entendimento do processo de construção de uma nova SR, o que indicia dificuldades na compreensão das SRs enquanto objeto matemático, o que vai ao encontro dos estudos de Lynn (2012) e Tirosh (2019). As dificuldades do par na identificação de aspetos centrais das SRs enquanto função, que acabam por impedi-las de ter sucesso na resolução de questões mais complexas, realçam a importância e a necessidade de realçar a articulação entre sequências e funções na formação inicial de FEPs (Carraher & Schliemann, 2019).

No que se refere à capacidade de *perceber* o pensamento algébrico das crianças, os dois pares atendem a aspetos importantes relativos às intervenções das crianças nos vídeos e, a partir dos mesmos, fazem inferências acerca da compreensão destas no âmbito de SRs. Os dois pares *descrevem* as intervenções das crianças, recontando as situações apresentadas e atendendo a aspetos relevantes. Embora ambas as análises incluam elementos de *interpretação* do pensamento algébrico das crianças, em que os pares procuram explicar como estas terão pensado, por vezes, em especial no caso de Anabela e Bianca, acabam por se centrar no recontar das situações. Esta dificuldade em *interpretar* aspetos a que se atendeu vai ao encontro de vários estudos (Callejo & Zapatera, 2017; Llinares, 2019; Walkoe et al., 2020), que realçam a dificuldade acrescida da componente interpretativa.

Apesar de apresentarem mais dificuldades no que se refere ao conhecimento matemático no âmbito de SRs, Beatriz e Júlia *percebem* as intervenções das crianças de forma mais profunda e, em particular, são as únicas que comparam o desempenho das crianças nas diferentes situações e associam as estratégias utilizadas ao desenvolvimento do conhecimento matemático no domínio de SRs. Embora estes resultados sejam muito específicos, contribuem para reforçar a conjetura de que o conhecimento matemático, por si só, não é suficiente para *perceber* o pensamento dos alunos, como também referido nas investigações de Callejo e Zapatera (2017) e Jacobs et al. (2010). No entanto, ainda que não seja o único fator determinante na capacidade de *perceber* o pensamento algébrico das crianças, os resultados evidenciam que o CM condiciona a análise das formandas, em particular, na análise de um dos vídeos em que os pares acabam por não identificar e, consequentemente, não interpretar (Llinares, 2019), elementos centrais acerca do pensamento algébrico das crianças por estarem condicionadas pela sua própria identificação da estrutura da sequência. À semelhança dos estudos de Lynn (2012) e Waters (2004), dificuldades associadas ao uso de expressões matemáticas específicas do pensamento algébrico e, em particular, das SRs, são evidentes nos resultados, sobretudo no caso de Beatriz e Júlia, e influenciam tanto as resoluções no que se refere ao conhecimento matemático, como a análise do pensamento algébrico das crianças.

Os resultados evidenciam também que, embora os pares referiram aspetos importantes nas suas produções escritas, em vários casos, as formandas evidenciam uma perceção bastante mais profunda das intervenções das crianças nos diálogos do que revelam as suas produções escritas. O facto de estas, por vezes, não serem bem-sucedidas em registar aspetos a que atendem, deve ser considerado na promoção da capacidade de *noticing* e na própria investigação sobre esta capacidade. As conversas entre os FEPs acerca das intervenções ou produções de alunos podem permitir aos formadores e investigadores aceder a aspetos que, apenas pelas produções escritas, não seria possível e apoiá-los de forma mais efetiva no desenvolvimento da capacidade de *noticing*.

Ao contactarem com as intervenções das crianças, as formandas aprofundaram necessariamente aspetos do pensamento algébrico associados às SRs, o que as pode ter tornado mais conscientes do seu próprio conhecimento matemático (Appova & Taylor, 2019). Embora esta conjetura necessite de mais elementos, nomeadamente da análise do conhecimento matemático das formandas em tarefas posteriores, inferimos que, tendo em conta as dificuldades dos FEPs apontadas na literatura no âmbito das SRs, a integração da análise do pensamento de alunos (neste caso de crianças do jardim de infância) pode ser uma mais-valia na formação inicial, em disciplinas que visem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Este artigo desenvolveu ainda um *framework* específico e original para a análise da capacidade de *noticing* relativa ao pensamento algébrico de alunos dos anos iniciais no que respeita às SRs. Assumimos como limitação deste estudo o facto de o *framework* estar associado apenas a uma tarefa e, em particular, à análise de intervenções de crianças do jardim de infância num primeiro contacto com SRs, em que emergem poucos aspetos associados à generalização. No entanto, consideramos que, tendo em conta a importância do desenvolvimento da capacidade de *perceber* o pensamento algébrico das crianças neste âmbito, este *framework* pode ser uma mais-valia para a formação de professores e para a investigação e que, em particular, pode ser aplicado ou adaptado a outros contextos e níveis de escolaridade.

AGRADECIMENTOS

A pesquisa teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017)

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Os três autores participaram ativamente no desenvolvimento da teoria e da metodologia do estudo, bem como na discussão dos resultados e conclusões.

DECLARAÇÃO DE PARTILHA DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Appova, A., & Taylor, C. E. (2019). Expert mathematics teacher educators' purposes and practices for providing prospective teachers with opportunities to develop pedagogical content knowledge in content courses. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*, 179-204. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9385-z

Blanton, M., & Kaput. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-24). Springer.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46,* 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/8860

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., & Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 217-236). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Infancia y Aprendizage: Journal for the Study of Education and Development, 42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Information Age Inc.

Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Clements D., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

El Mouhayar, R. (2019). Exploring teachers' attention to students' responses in pattern generalization tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22,* 575-605. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9406-6

Estapa, A. T., Amador, J., Kosko, K. W., Weston, T., Araujo, Z., & Aming-Attai, R. (2018). Preservice teachers' articulated noticing through pedagogies of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(4), 387-415. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9367-1

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. A. (2020). Learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 529–548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Jacobs, V. R., Philipp, R.A., & Sherin, M. G. (2018). Noticing of mathematics teachers. In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_120-4

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer International Publishing.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics, 26*(3), 24-42.

Llinares, D. (2019). Descriptores del desarrollo de la mirada profesional en el contexto de la generalización de patrones. *Bolema, 33*(65), 1464-1486. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a23

Lynn, M. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge-Falmer.

Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds), *Transforming Mathematics Instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 173-197). Springer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-Year-Olds, *Journal of Cognition and Development*, *14*(3), 376-396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rodrigues, R. V. R., Cyrino M. C. C. T., & Oliveira, H. (2019). Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia. *Quadrante*, *28*(1), 100-123. https://doi.org/10.48489/quadrante.22975

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education, 60,* 20-37. https://doi.org/10.1177/0022487108328155

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Cassell.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2019). Preschool teachers' knowledge of repeating patterns: Focusing on structure and the unit of repeat. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(3), 305-325. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9395-x

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., & Barkai, R. (2019). Shedding light on preschool teachers' self-efficacy for teaching patterning. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2365-2372). Utrecht, The Netherlands.

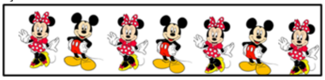
van Es., E.A., Cashen, M., Barnhart, T., & Auger, A. (2017). Learning to notice mathematics instruction: Using video to develop preservice teachers' vision of ambitious pedagogy. *Cognition and Instruction, 35*(3), 165-187. https://doi.org/10.1080/07370008.2017.1317125

Walkoe, J., Sherin, M., & Elby, A. (2020). Video tagging as a window into teacher noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 385-405. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09429-0

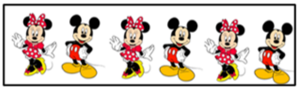
Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. In I. Putt & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium* (pp. 565-572). Townsville: Mathematics Education Research Group of Australia.

APÊNDICE – DESCRIÇÃO DOS VÍDEOS ANALISADOS

Vídeo "O que vem a seguir?" O vídeo "O que vem a seguir" apresenta três situações em que alguns grupos exploram sequências repetitivas, com foco na determinação de termos.



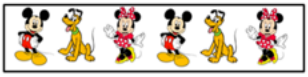
Situação 1 - É apresentada às crianças a sequência repetitiva ao lado. As crianças "leem" o padrão e a educadora pergunta o que virá a seguir à Minnie ao que de imediato respondem, em conjunto, "Mickey". Em seguida a educadora explica que vão associar um número a cada carta e as crianças contam em conjunto até sete, apontando para cada uma das figuras (na mesa estão dispostas sete cartas). A educadora questiona: "Então o número nove qual seria? Qual seria a imagem número nove" e duas crianças respondem imediatamente "Minnie". A educadora refere que "só consegue ver" contando através dos dedos e pede a uma das crianças para colocar nove dedos em cima da mesa. A educadora vai apontando para cada dedo e dizendo "Minnie, Mickey…" até chegar à nona posição e diz "Minnie, foi o que vocês disseram?" ao que as crianças respondem em coro "Sim!".



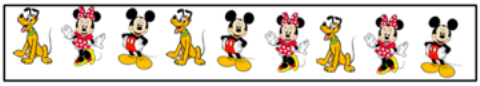
Situação 2 - Num outro momento, a pedido da educadora, Maria, uma das crianças de um outro grupo, constrói uma sequência repetitiva à sua escolha (sequência apresentada ao lado).
A educadora pergunta a Maria qual a base do padrão e a criança responde "Minnie, Mickey (pausa), Minnie, Mickey, (pausa), Minnie, Mickey". Em seguida a educadora questiona a criança sobre a oitava posição: "qual será o oito?". A criança aponta para cada uma das figuras, ficando bastante claro que está a associar um número a cada carta e aponta para a parte da mesa vazia, com gestos que indiciam que está a contar as posições que faltam para oito. Maria olha durante algum tempo para as cartas e diz: "fazendo contas eu consigo". A educadora pergunta-lhe qual o número da última carta ao que Maria responde "Seis". Em seguida a educadora pergunta "Então qual seria oito?"

e a criança refere "o Mickey". Quando questionada acerca do modo como determinou este termo, Maria responde: "Quatro mais quatro é oito (…) tínhamos de pôr mais dois". A educadora congratula a criança e refere que "se já tínhamos este par, tínhamos de pôr outro par, não é?" e Maria refere que sim, que tinha de colocar a Minnie e o Mickey. Depois disto a investigadora questiona a criança acerca da figura 10, sabendo que a 11 seria a Minnie, ao que esta responde que seria o Mickey. Quando a investigadora a questiona acerca da justificação, surge o seguinte diálogo:

> Inv: Porquê?
> Maria: Porque a Minnie é o onze e o Mickey é o doze…Não, é o dez!
> Inv: É o doze, mas também é o dez, porquê? Entre duas Minnies está sempre…
> Maria: Um Mickey.



Situação 3 - É apresentada às crianças a sequência repetitiva ao lado. A educadora pergunta às crianças quantas cartas são apresentadas ao que estas respondem seis e também "qual é a base?". Uma das crianças responde de imediato "Três" e separa as duas unidades de repetição. A educadora volta a referir que são seis cartas e pergunta qual seria a "carta oito". As crianças apontam para o Pluto que se encontra na quinta posição e a educadora confirma, dizendo que na posição oito se encontra o Pluto. A investigadora pede que as crianças apresentem uma justificação e uma delas aponta para o Mickey que se encontra na quarta posição referindo "Porque a sete era o Mickey".



Vídeo "Qual o padrão?" O vídeo "Qual o padrão?" mostra uma situação em que um grupo de três crianças é confrontado com a sequência repetitiva apresentada ao lado. A educadora pede às crianças para olharem para as cartas e dizer "qual é o padrão". As crianças começam a "ler": "Pluto, Minnie, Mickey, Pluto, Mickey…". De imediato olham umas para as outras, "desconfiando" da sequência que lhes foi apresentada e surge o diálogo:

> Maria: Aqui está trocado, aqui é que é o Mickey (Maria e as outras duas crianças apontam para a sexta posição, onde acreditam que deveria estar o Mickey).
> Educadora: Será? Então façam lá a leitura toda.
> Maria: Porque a Minnie é o segundo e agora é que é o Mickey.
> Isabel: A Minnie tem de estar ao lado do Pluto
> Maria: Aqui é que é Minnie (aponta para a quinta posição).
> Educadora: Será? Poderia não ser…
> Maria: Para ser um padrão aqui (aponta para a quinta posição) tinha de ser a Minnie.