ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6413

Como livros didáticos do Brasil, Estados Unidos e Japão tratam frações?

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza [a]
Arthur Belford Powell [b]

[a] Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Vila Velha, ES, Brasil.
[b] Rutgers University-Newark, Department of Urban Education, Newark, NJ, United States.

Recebido para publicação 25 jan. 2021. Aceito após revisão 24 mar. 2021.
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Pesquisadores reconhecem a importância dos livros didáticos para planejamento de aulas por professores, bem como a relevância do estudo de frações por moldar o desempenho futuro da matemática de alunos a depender da abordagem. **Objetivos**: A constatação de desempenhos discrepantes de alunos brasileiros, estadunidenses e japoneses nas últimas três edições do PISA nos levou a investigar como autores de livros didáticos daqueles países abordam o conteúdo de frações no Ensino Fundamental no que diz respeito à flexibilidade, razoabilidade, senso de magnitude e com o desenvolvimento conceitual e procedimental, nas perspectivas simbólicas e não-simbólicas. **Design**: Os desempenhos quantitativos em Matemática de estudantes brasileiros, estadunidenses e japoneses nas três últimas edições do PISA carecem de investigação qualitativa e exploratória para se entender algumas razões apresentadas pelos resultados numéricos. **Coleta e análise de dados**: Para atingimento dos objetivos, foram selecionadas três séries de livros - brasileiro, estadunidense e japonês - amplamente utilizados pelas escolas daqueles países. **Resultados**: Os principais resultados revelaram que todos os livros praticaram a flexibilidade e a razoabilidade com ênfases diferenciadas, mas não o senso de magnitude. Os livros brasileiros e estadunidenses basearam-se prioritariamente em interpretação parte-todo e em abordagem procedimental, enquanto os livros japoneses apresentaram ênfase na interpretação de medida como iteração de frações unitárias e no desenvolvimento mais conceitual. **Conclusões**: A abordagem de frações dos livros japoneses parecem estar mais próximos do que recomenda a comunidade científica de Educação Matemática e este pode ser um importante diferencial que explique parte dos resultados no PISA.

Palavras-chave: livros didáticos; frações; Brasil; Estados Unidos; Japão.

Corresponding author: Maria Alice V. F. de Souza. Email: alicevfs@gmail.com

How do textbooks from Brazil, the United States and Japan treat fractions?

ABSTRACT

Background: Researchers recognize the importance of textbooks for teachers' lesson planning and the importance of fraction knowledge for shaping students' future mathematics performance. **Objectives**: The finding of discrepant achievement by Brazilian, American, and Japanese students in the last three editions of PISA led us to investigate how textbook authors from in countries approach fraction content in elementary education relating to magnitude, flexibility, reasonableness, as well as conceptual and procedural knowledge in both symbolic and non-symbolic perspectives. **Design**: The quantitative performances in mathematics of Brazilian, American, and Japanese students in the last three PISA editions lack qualitative and exploratory research to understand some reasons presented by the numerical results. **Data collection and analysis**: To achieve the objectives, we selected three textbook series, one each from Brazil, the United States of America, and Japan, that schools in those countries widely use. **Results**: The main results revealed that all books practiced flexibility and reasonableness with different emphases, but not the sense of magnitude. Brazilian and American books were based primarily on part-whole interpretation and on a procedural approach. In contrast, Japanese books emphasized the understanding of measurement as the iteration of unit fractions and more conceptual development. **Conclusions**: The fraction knowledge approach of fractions in the Japanese textbook series seems to be close to what the mathematics education recommends, which can be an essential differential to explain the Japanese results in PISA.

Keywords: textbooks; fractions; Brazil; United States; Japan.

INTRODUÇÃO

Os livros didáticos - impressos ou digitais - são fontes recomendadas para o conhecimento da matemática escolar por professores e alunos. Eles são o principal recurso para professores planejarem e ministrarem suas aulas (Beaton et al., 1997; Schmidt et al., 1997; Escolano & Gairín, 2005; Reys et al., 2007; Alajmi, 2009, 2012). Ao mesmo tempo, os livros didáticos costumam ser o único recurso que os alunos acessam para aprender sobre objetos matemáticos e suas operações (Watanabe et al., 2017). Com uma avaliação paralela, tal como Chingos e Whitehurst (2012), Fan, Zhu e Miao (2013) observam que "os pesquisadores geralmente concordam que os livros didáticos são importantes meios de transporte do currículo e desempenham um papel dominante nas cenas da educação moderna em diferentes disciplinas escolares" (p. 635). Anteriormente, Robitaille e Travers (1992) notaram que a dependência de livros didáticos é "talvez mais característica do ensino de matemática do que de qualquer outra disciplina" (p. 706, tradução nossa).

Cirillo, Drake e Herbel-Eisenmann (2009) descobriram que os professores contam com livros didáticos como seu principal recurso para ensinar matemática. Essa dependência na educação matemática é causada pela utilidade essencial de modelos visuais que representam objetos matemáticos abstratos e operações sobre eles (Fan et al., 2013). Os benefícios do modelo visual impresso e físico para a compreensão dos alunos foram pesquisados (e.g., Arcavi, 2003; González-Martín, Nardi & Biza, 2011; Stylianou & Silver, 2004) e, posteriormente, defendidos em documentos de política curricular (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010; National Council of Teachers of Mathematics, 2014).

Os livros didáticos de Matemática possuem conteúdos específicos que são originados do desejo de se compreender fenômenos ou de alguma necessidade material humana como ocorreu com a emergência das frações (Caraça, 1951; Aleksandrov, 1963). Independentemente de suas origens, alguns conteúdos são nucleares e apoiam o desenvolvimento e aprofundamento de outros, elevando-os a um grau de importância que pesquisadores, professores e autores de livros didáticos devem considerar. As frações são um desses conteúdos centrais no ensino básico, cuja compreensão conceitual e operacional são preditivas para o desempenho em álgebra e, mais amplamente, para a matemática geral (Kieren, 1976; Siegler et al., 2012), incluindo a aprendizagem de tópicos mais avançados da própria álgebra, probabilidade e cálculo (Lamon, 2001; Bailey et al., 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler & Lortie-Forgues, 2015; Torbeyns et al., 2015). A importância do conteúdo de frações levou investigadores da Educação Matemática à conclusão de que esse ensino deve considerar diferentes dimensões - flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude (Powell & Ali, 2018) - além das compreensões conceituais, procedimentais, não-simbólicas e simbólicas (Siegler et al., 2012; Powell, 2019b) visando ao amplo e profundo entendimento.

Para conhecer essas dimensões, compreensões ou outros aspectos que tenham como fonte livros didáticos, Watanabe, Lo e Son (2017), Charalambous et al. (2010) e Li, Chen e An (2009) recomendam que o estudo seja realizado de dois modos: (1) por macroanálise ou exame horizontal e (2) por microanálise ou exame vertical. A macroanálise[1] (ou exame horizontal[2]) tem a ver com as estruturas gerais dos livros ou os desdobramentos de determinado conteúdo ao

---

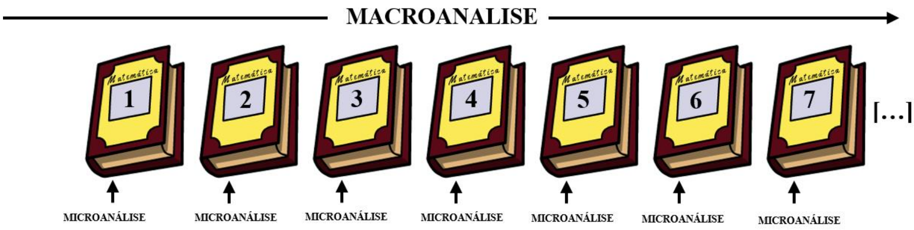
[1] Os termos "macroanálise" e "microanálise" foram denominados por Li, Chen e An (2009).
[2] Os termos "horizontal" e "vertical" foram denominados por Charalambous et al. (2010).

longo dos anos escolares ou níveis de ensino, podendo focar em diferentes sistemas educacionais. A microanálise (ou exame vertical) busca captar o processo matemático de desenvolvimento dos conteúdos. O exame dos dois modos - doravante simplesmente macroanálise e microanálise - pode minimizar aspectos desfavoráveis intrínsecos a cada um quando estudados isoladamente. Pesquisadores que optaram singularmente pela macroanálise limitaram-se à visão geral dos tópicos ao longo da escolaridade, mas deixaram de conhecer pormenores importantes dos conteúdos. O reverso também ocorreu com a microanálise. (Watanabe, Lo & Son, 2017).

No caso do presente estudo, por um lado, entendemos que as dimensões de flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude devam ser examinadas nos livros didáticos utilizados sequencialmente nos anos escolares do ensino básico, justamente porque essas dimensões envolvem a articulação de diferentes interpretações que devem ser introduzidas no ensino de modo paulatino e relacionado umas com as outras, justificando uma macroanálise. Por outro lado, as compreensões conceituais, procedimentais, não-simbólicas e simbólicas são (ou deveriam ser) reveladas no âmago de ensino de cada interpretação. Em outras palavras, cada interpretação deve valorizar a diversificação das compreensões visando à amplitude e aprofundamento do entendimento pelos alunos, como detalharemos em sessão posterior. Sendo assim, o estudo das compreensões conceituais, procedimentais, não-simbólicas e simbólicas das frações se justifica por uma microanálise, em meio às explicações e atividades propostas em cada livro, como ilustra a Figura 1.

Figura 1

Macroanálise e microanálise



Diante do exposto, é importante entender como livros didáticos lidam com a apresentação de ideias sobre números fracionários. Apresentamos resultados de um estudo exploratório sobre os livros didáticos voltado para uma agenda acadêmico-científica sobre o ensino de frações defendida pela comunidade internacional da Educação Matemática, particularmente nas seguintes questões de pesquisa:

1. Como os livros didáticos lidam com a flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude das frações na sequência dos anos escolares do Ensino Fundamental?
2. Como os livros didáticos trabalham o desenvolvimento conceitual não-simbólico, conceitual simbólico, procedimental não-simbólico e procedimental simbólico de frações em cada ano escolar do Ensino Fundamental?

Para o estudo, a primeira questão reflete uma macroanálise e a segunda uma microanálise. Concentramos interesse nos livros didáticos de Matemática de 3 países: Brasil, Estados Unidos e Japão. A escolha por esses países não é aleatória, mas pautada nos desempenhos de seus estudantes em Matemática no PISA. O PISA visa avaliar – de modo comparado, amostral e em larga escala – conhecimentos em Leitura, Matemática e Ciências de estudantes na faixa etária dos 15 anos, cuja idade pressupõe o término da escolaridade básica na maioria dos países participantes. Em suas últimas três edições (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2012, 2015, 2018), estudantes brasileiros apresentaram baixo desempenho em Matemática ocupando os últimos lugares no *ranking*; alunos estadunidenses se mantiveram em posição mediana e; alunos japoneses alcançaram os primeiros lugares (Tabela 1).

O *ranking* por si só não fala muito, pois os desempenhos dos três países poderiam estar próximos e as diferenças absolutas não serem quantitativamente relevantes. É útil, portanto, buscar subsídios em medidas estatísticas que revelem quanto esses países estão distantes em termos de desempenho no PISA. Os três países apresentaram certa estabilidade em seus desempenhos em relação à média aritmética de todos os participantes nas edições de 2012, 2015 e 2018. Destaca-se, no entanto, forte discrepância ($X-\bar{X}$) negativa para brasileiros, discrepância de levemente negativa a positiva para os estadunidenses e alta discrepância positiva para japoneses. As posições desses grupos são confirmadas pelos escores z, revelando que os três países, de fato, encontram-se significativamente distantes em suas posições relativas nas três edições do PISA. Resta-nos entender as razões para esses resultados quantitativos, nos remetendo, assim, a estudos qualitativos discriminados no percurso metodológico da investigação.

Tabela 1

Desempenho em Matemática, ranking, discrepância em relação à média aritmética e escore z dos resultados dos estudantes de três países no PISA de 2012, 2015 e 2018. (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2012, 2015, 2018)

País	PISA 2012 – Matemática ($n = 65; \bar{X} = 473; s = 55$)				PISA 2015 – Matemática ($n = 70; \bar{X} = 462; s = 55$)				PISA 2018 – Matemática ($n = 79; \bar{X} = 459; s = 55$)			
	X_1[a]	*Ranking*	$X_1-\bar{X}$	z	X_2[a]	*Ranking*	$X_2-\bar{X}$	z	X_3[a]	*Ranking*	$X_3-\bar{X}$	z
Brasil	391	58/65	-103	-1.50	377	68/70	-113	-1,55	384	71/79	-75	-1,36
Estados Unidos	481	36/65	-13	+0,14	470	40/70	-20	+0,15	478	38/79	+19	0,34
Japão	536	7/65	+42	+1,15	532	5/70	+42	+1,27	527	6/79	+68	1,23

[a]X_1, X_2, X_3 são os desempenhos em Matemática em cada país; n é a quantidade de países participantes do PISA em determinada edição; $X-\bar{X}$ é a discrepância do desempenho do país em relação à média aritmética em determinada edição do PISA; escore z é a quantidade de desvios-padrão acima ou abaixo da média aritmética da população.

Diante desse contexto, inauguramos o próximo tópico com a estrutura conceitual e teórica de frações nas dimensões de flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude, bem como o desenvolvimento conceitual não-simbólico e simbólico, procedimental não-simbólico e simbólico de frações.

LITERATURA RELEVANTE

Flexibilidade

A flexibilidade é caracterizada pela desenvoltura mental em conectar as diferentes interpretações de frações - parte-todo (ou parte-parte), quociente, razão, operador, medida e também a noção de medição. A importância da conexão entre essas interpretações nos leva a crer que qualquer modelo sozinho não atenderia a todas as nuances acerca do conceito de fração. Concordamos com Lamon (2007) e Watanabe (2006) que seria enganoso pensar em uma melhor e única interpretação, mas a diversidade de concepções e suas relações poderão ser poderosas ferramentas para a concretização da flexibilidade e, consequentemente, a alavancar outros conceitos. Nessa acepção, é útil conhecer como investigadores da Educação Matemática argumentam a respeito de cada interpretação e apresentar nossas opções para este trabalho, a iniciar por parte-todo.

O significado parte-todo (ou parte-parte) emerge da divisão de coisas divisíveis. Essa interpretação não possui base ontológica (Escolano & Sallán, 2005; Bishop, 1999), mas tem valor pedagógico quando excede o simples sombrear de uma de quatro partes iguais para representar 1/4, por exemplo. Além da representatividade baseada em área, vale entender esse significado como comprimento (1/4 da distância entre Recife e Rio de Janeiro) e conjunto (1/4 dos passageiros do trem), conectando-os. Além desses três vieses – área, comprimento e conjunto –, devemos considerar sua diversidade representacional em cada um. O modelo de área ou região pode ser visualizado com retângulos, círculos e outras figuras geométricas, regiões do geoplano, do plano cartesiano, dobraduras etc. O modelo de comprimento pode ser explorado pelas barras de Cuisenaire, tiras de papel, barbantes e linha numérica. O modelo de conjunto deve destacar a quantidade de subconjuntos iguais no conjunto e não propriamente o tamanho do conjunto. "Por exemplo, se 12 contadores formam um todo, então um conjunto de 4 contadores é um terço, não um quarto, já que três conjuntos iguais formam o todo" (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010, p. 290, tradução nossa).

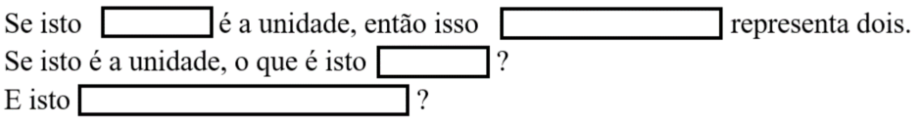
Além da interpretação parte-todo (ou parte-parte), há a ideia de fração como quociente que surge em situações de duas variáveis, discretas ou contínuas, uma no numerador e outra no denominador – e.g., repartir igualmente $1 para 4 pessoas, dividir igualmente 1 pizza para 4 pessoas ou distribuir uniformemente o peso de contêineres ao longo de um navio. A identificação das variáveis é nuclear, mas é igualmente importante compreender suas relações.

Do mesmo modo ocorre relação com a interpretação de razão, significando proporção ou comparação – e.g., a fração 1/4 pode significar a razão entre 1 que gosta e 4 que não gostam de um estilo musical. Hart (1987) entende a razão como uma declaração de uma relação numérica entre duas entidades e Behr et al. (1983) defendem que devemos considerar a razão como um índice comparativo e não como um número. Lamon (1994) vê a fração 1/4 como um objeto para cada quatro a receberem. Nosso entendimento é de que toda razão pode ser representada por um índice comparativo entre duas quantidades de mesma grandeza ou de grandezas diferentes. Quando a razão é representada por uma comparação entre quantidades de uma mesma grandeza (e.g., a razão entre as idades de duas pessoas), também pode ser interpretada como fração, mas ao compararmos duas quantidades de grandezas diferentes (e.g., a razão entre a distância e o tempo, ou seja, velocidade média), não descrevemos uma fração. Assim sendo, concluímos que nem toda razão é uma fração, mas existem frações que são razões.

A noção de operador implica uma fração sendo multiplicada por um número inteiro – e.g., 1/4 dos alunos foram aprovados; 2/5 dos brinquedos foram reformados. Esse significado gera transformações de magnitudes, ou seja, obtém outra quantidade com a mesma unidade. Em outro sentido segue a noção de fração como medida. Nessa interpretação é forte a ideia de comprimento, no que diz respeito a "quanto" e não exatamente a "quantas partes" (Behr et al., 1983; Martinie, 2007). Para Behr et al. (1983) a medida significa uma reconceituação da noção de frações como parte-todo e isso contribui para a ampliação da compreensão de frações como uma quantidade única e não como dois números inteiros isolados. Van de Walle, Karp & Bay-Williams (2010) exemplificam a ideia de medida com a fração 1/8 podendo assumir uma unidade de comprimento para medir 5/8, ou seja, serão necessárias 5 unidades de 1/8 para medir 5/8 (uma iteração de fração unitária). Kieren (1976) diz que a unidade, uma vez escolhida, pode ser dividida em quaisquer quantidades de partes iguais. A visão de Kieren recai na ideia de Van de Walle, Karp & Bay-Williams (2010) ao exemplificar a medida como na Figura 2:

Figura 2

Fração como medida na visão de Kieren (1976, p.125)



As cinco interpretações de Kieren (1976) e Behr et al. (1983) - parte-todo (ou parte-parte), quociente, razão, operador e medida - são baseadas na noção de partição de uma grandeza. Diferentemente, com base na história da Matemática de Aleksandrov (1963) e Caraça (1951), Powell (2019a) apresenta a noção de fração de outra perspectiva - a de medição. Para ele, uma fração é como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade. Nessa perspectiva, na fração a/b, o numerador a representa a medida de uma das grandezas pela unidade e o denominador b a medida da outra. Então, na perspectiva de medição, a fração 1/4 significa a relação multiplicativa entre grandezas onde a quantidade de um é a de um quarto da outra. Nessa mesma esteira seguem Davydov (1991) e Venenciano et al. (2021).

Para além das argumentações sobre os diversos modos interpretativos de frações, de maneira geral, a literatura da Educação Matemática revela alguma divergência sobre o significado e a nomenclatura das interpretações de fração. Campos et al. (2006), por exemplo, parecem não incorporar a unidade ao conceito de fração como medida. Além disso, o conceito de razão parece estar diluído entre outras interpretações. A despeito dessas diferenças, a maioria dos investigadores assume postura tal qual a exemplificada na Tabela 2, sobre a qual adotaremos neste trabalho.

Tabela 2

Interpretações para a fração 1/4.

Interpretações	Exemplos para a fração 1/4
Parte-todo (Parte-parte)	1 de 4 partes iguais; 1 menina para cada 4 meninos.
Quociente	1 dividido por 4.
Razão	1 de alguma coisa comparado a 4 de outra coisa, em um senso multiplicativo.
Operador	1/4 de alguma coisa que seja a unidade, de uma quantidade.
Medida	O comprimento de 1/4 em uma reta.
Medição	O comprimento de uma quantidade é 1/4 do comprimento da outra.

Razoabilidade

A razoabilidade é incitada pelo raciocínio plausível gerado pela flexibilidade (Powell & Ali, 2018). A razoabilidade tem a ver com o reconhecimento de frações equivalentes, com compreensões sobre o correto posicionamento de uma fração na reta numérica, com o cálculo de operações aritméticas - quando o número fracionário se apresenta na forma mista, própria, imprópria e denominadores serem iguais ou não -, e com a comparação de frações por suas medidas, por exemplo. Não se trata de um conceito isolado, mas, ao contrário, é desenhado em meio à amplitude e profundidade da construção versátil das diferentes interpretações da fração. Não há, portanto, uma linha demarcatória entre a flexibilidade e a razoabilidade, justamente porque seus sentidos informam um ao outro e, ainda, facilitam a apreensão do conceito de magnitude.

Magnitude

A compreensão de magnitude passa pela discussão do que seja quantidade. Powell (2019b) apresenta que a quantidade é entendida para Euler (1765/1822), em seu livro *Elements of Algebra*, como “tudo o que é capaz de aumentar e diminuir” (p. 1). Muitos anos mais tarde, De Morgan (1836/2010), em seu livro *An attempt to explain the Fifth Book of Euclid*, reforça a ideia de Euler ao afirmar que “magnitude ou quantidade significa aquilo que nos é apresentado, não como sua forma [...] ou à sua cor, peso ou a qualquer outra circunstância, mas simplesmente o que é posto em partes, não diferente do inteiro em qualquer maneira além de ser menor [...]”, e vislumbra perseguir a elaboração de um método para realizar “comparações matemáticas de quantidades, com auxílio da noção de número” (p. 2) Diante das declarações de Euler e De Morgan, Powell (2019b) opta por conceber as noções de magnitude e quantidade como “distintas, porém relacionadas, das coisas materiais e imateriais, sujeitas a serem aumentadas e diminuídas.” (p. 53-54). Para Powell,

> a quantidade é uma magnitude à qual pode associar um número que representa seu tamanho. Tanto uma quantidade como uma magnitude pode ser contínua ou descontínua, como por exemplo: som, sementes, riqueza, velocidade, bytes, idade, tempo, felicidade e comprimento. [...] não toda magnitude é uma quantidade como não toda pode ser quantificada e emerge por meio de medição [...]. A medição resulta de uma comparação proporcional de uma quantidade com uma outra da mesma espécie, que é considerada como a unidade de medida. Portanto, um número é realizado dessa comparação multiplicativa, sendo que a quantidade indica a extensão de sua magnitude. (Powell, 2019b, p. 53-54)

Em poucas palavras, os conceitos de magnitude e de quantidade adotados neste trabalho não são sinônimos, pois uma quantidade tem magnitude, ou seja, possui tamanho, mas nem toda magnitude tem quantidade. A quantidade é o "comprimento" da magnitude tendo como referência uma unidade de medida.

Desenvolvimento conceitual não-simbólico e simbólico, procedimental não-simbólico e simbólico de frações

A flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude das frações ocorrem na perspectiva conceitual e procedimental, mas também por meio de conhecimento não-simbólico e simbólico. Sobre essas últimas ideias, Siegler et al. (2012) afirmam que para compreender frações devemos considerar duas diferenças cruciais: (1) a distinção entre conhecimento conceitual e procedimental e, (2) conhecimento não-simbólico e simbólico. O conhecimento conceitual - não-simbólico ou simbólico - tem a ver com a compreensão sobre as propriedades de frações, ou seja, suas magnitudes, princípios e notações (Tabela 3). Esse parece ser um ponto sensível no ensino e aprendizagem desse conteúdo matemático. Por exemplo, alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental americano não ordenam corretamente frações próprias (Siegler et al., 2012). Outros aplicam propriedades dos números naturais para quaisquer números.

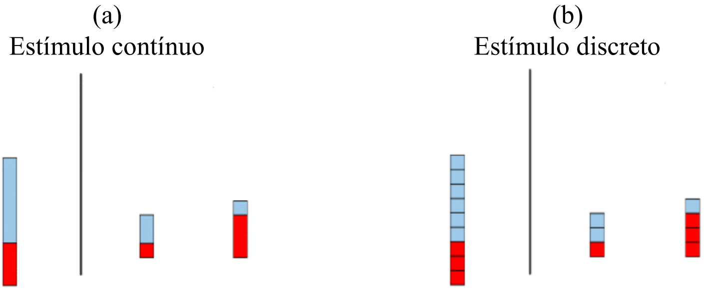
Números naturais e números fracionários possuem propriedades comuns e particulares. O problema relatado pelos pesquisadores (e.g., Siegler et al., 2012; Powell, 2019b) é que os alunos parecem aplicar propriedades dos naturais indiscriminadamente aos números fracionários. Nos números naturais, quanto mais dígitos, maior o número (e.g., 93>5). Nos fracionários essa regra falha (e.g., $\frac{93}{100} < \frac{5}{4}$). Cada natural possui um único antecessor imediato (e.g., 3 antecede 4), não ocorrendo o mesmo com as frações em função de sua densidade, pois entre duas quaisquer frações existem infinitas outras (e.g., $\frac{3}{5}$ não é antecessor imediato de $\frac{4}{5}$). No que diz respeito às operações, a multiplicação de números naturais pode ser entendida como uma adição repetida (e.g., 4 + 4 + 4 = 3 x 4). Entretanto, o mesmo raciocínio (e.g., 3 x $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$, $\frac{4}{5} < \frac{12}{5}$) não ocorre sempre com a multiplicação de frações (e.g., $\frac{4}{5}$ x $\frac{1}{2} = \frac{4}{10}, \frac{4}{10} < \frac{4}{5}$). Por fim, devemos considerar que a representação simbólica da magnitude de um número natural é única (e.g., um conjunto com 3 elementos é simbolizado unicamente com o numeral 3), enquanto nas frações há uma infinidade de representações simbólicas para o mesmo objeto (e.g., $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \cdots$).

Pelo lado procedimental - não-simbólico ou simbólico - o conhecimento envolve prioritariamente fluência no cálculo de frações com as quatro operações aritméticas e em definições (Tabela 3). O foco está muito mais no "como" do que no "o quê". Nesse caso, pesquisadores relatam dificuldades de alunos saberem quando e por que devem conservar o denominador e somar os numeradores, ou ainda, quando devem multiplicar numeradores e denominadores. Para esses investigadores, uma origem dessas dificuldades reside na visão exclusiva de frações em termos de parte-todo (Siegler et al., 2012; Sophian, 2007) e na ausência de compreensão do que seja a unidade em questão (Cramer et al., 2002). Nesse contexto, é difícil de o aluno conceber frações impróprias, pois, por exemplo, $\frac{5}{3}$ não lhe faz sentido, vez que, para ele, não se pode ter cinco partes de um objeto dividido em três partes iguais.

O conhecimento não-simbólico - conceitual ou procedimental - demanda compreensão com estímulos concretos (Tabela 3). Por exemplo, o reconhecimento sobre a maior ou menor proporção de objetos em um e outro conjunto, e a contagem de elementos ou medição de partes de um círculo igualmente dividido (metade de um círculo). Nesse quesito, vale registrar que Boyer et al. (2008) contaram uma história para crianças de 6 anos de idade que tinha como essência a importância da manutenção da proporção entre quantidades ora mostradas de forma contínua (Figura 3a), ora discreta (Figura 3b). Descobriram que as habilidades de raciocínio proporcional das crianças variam em função da estrutura das representações que são dadas. As crianças respondem corretamente aos estímulos contínuos, mas não aos discretos. Quando submetidas ao estímulo discreto, elas contam a quantidade de partes coloridas da barra inicial (do lado esquerdo) e optam pela barra do lado direito que contém a mesma quantidade de partes coloridas da barra inicial, ao invés de associar à proporção da barra inicial à barra a ser escolhida.

Figura 3

Exemplo de estímulo contínuo e estímulo discreto para o raciocínio proporcional (Boyer et al., 2008, p.19, parte da figura; adaptada)



O conhecimento simbólico - conceitual ou procedimental - abrange representações e notações de frações (Tabela 3). É o caso, por exemplo, da comparação entre 2/3 e 3/5. Quem é maior? Além da comparação de suas magnitudes, no conhecimento simbólico são comuns erros na soma de frações (e.g., $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$) e na multiplicação de frações (e.g., $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$). Esses tipos de erros refletem falhas na compreensão simbólica, bem como na conceitual.

Tabela 3

Exemplos de conhecimento de frações conceitual não-simbólico, conceitual simbólico, procedimental não-simbólico e procedimental simbólico.

Conhecimento	**Conceitual**	**Procedimental**
Não-simbólico	Reconhecimento de magnitudes. 	Reconhecimento $\frac{1}{4}$ de um círculo.
Simbólico	Tipos de frações. $\frac{1}{7}, \frac{5}{6}$ e $\frac{4}{3}$	Operação $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$.

Diante do exposto, e ao lado dos autores antes mencionados, defendemos que o ensino de frações deve ter em conta os quatro tipos de conhecimentos: conceitual não-simbólico, conceitual simbólico, procedimental não-simbólico e, procedimental simbólico, além de considerar a flexibilidade, a razoabilidade e o senso de magnitude que contribuam para a amplitude e profundidade da compreensão sobre frações. Essa postura orientará a análise dos livros didáticos que passaremos a descrever nos próximos tópicos.

MÉTODO

A investigação

A análise transnacional de livros didáticos é um campo de investigação relativamente novo (Watanabe, Lo & Son, 2017) e a literatura científica existente até o momento recomenda que esse estudo seja realizado com base em macroanálise e microanálise. Como dissemos na Introdução, nossa opção pela macroanálise esteve focada nos desdobramentos do conteúdo de frações no que diz respeito à flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude. A opção pela microanálise esteve baseada nas compreensões conceituais, procedimentais, não-simbólicas e simbólicas das frações nos livros didáticos destinados a cada ano escolar do ensino básico (Figura 1).

A opção por essas variáveis emergiu do fato de que o exame quantitativo (Tabela 1) dos resultados de estudantes brasileiros, estadunidenses e japoneses na disciplina de Matemática nas três últimas edições do PISA (2012, 2015, 2018) carece de ingredientes qualitativos que sugiram algumas razões para o resultado de cunho numérico que posiciona o desempenho desses estudantes de modo discrepante.

A amostra

Três séries de livros didáticos da Educação Fundamental do Brasil, dos Estados Unidos e do Japão foram escolhidos para o estudo. A série de livros brasileiros, denominada A Conquista da Matemática[3], editada pela FTD, foi selecionada por ter sido aprovada na última edição do Programa Nacional do Livro e do Material Didático de 2019 (PNLD-2019) promovido pelo governo

[3] Giovanni Jr, J. R. (2018). *A Conquista da Matemática*. 4º e 5º anos. São Paulo: FTD. e Giovanni Jr, J. R. & Castrucci, B. (2018). *A Conquista da Matemática*. 6º ao 8º anos. São Paulo: FTD.

federal brasileiro, e por ser uma das mais adotadas nas escolas daquele país. Essa série possui nove livros - os cinco primeiros são destinados aos primeiros anos escolares do ensino básico e os quatro últimos para os anos finais. Na série brasileira o estudo formal de frações se encontra do 4º ao 8º livro.

A seleção de livros didáticos estadunidenses – *Eureka Math*[4] - ocorreu pela preferência de professores daquele país. Segundo Ed Reports Org and Rand Corporation, 57% dos professores estadunidenses usam essa série de livros nos primeiros anos do ensino básico e 47% nos últimos anos. A série está disponível na internet e é livre para *download* e uso não comercial. Essa série é composta por quatorze livros, cada qual subdividido de 5 a 8 módulos conforme o ano escolar. Nosso interesse sobre o conteúdo de frações se encontra do primeiro ao sétimo livro, destinado aos primeiros anos da *elementary school*.

Os livros didáticos japoneses foram eleitos por serem oficialmente aprovados pelo Ministério da Educação, Cultura, Esporte, Ciência e Tecnologia do Japão. Eles foram editados pela Gakko Tosho Co., a segunda maior editora de Tóquio, tendo adesão de seus livros didáticos de Matemática nas escolas do Japão e no exterior na versão em língua inglesa[5]. Essa série é composta por onze livros – um para o primeiro ano e dois livros para cada ano do segundo ao sexto – além de um décimo-segundo volume que encerra a primeira metade do ensino básico revendo e relacionando as principais ideias estudadas de modo isolado do primeiro ao sexto ano, destacando pontos importantes dos conteúdos, estimulando o pensamento por meio de problemas e desafiando os alunos sobre aspectos que eles não tenham ainda estudado.

Estrutura e esquema de codificação

Uma estrutura e um esquema de codificação foram desenvolvidos para descrever e analisar a flexibilidade, a razoabilidade, o senso de magnitude, os desenvolvimentos não-simbólico e simbólico dos aspectos conceitual e procedimental de frações (Tabela 4).

Com base na literatura científica mencionada, a flexibilidade foi estudada a partir das diferentes interpretações de frações - parte-todo, quociente,

[4] https://greatminds.org/math;https://www.bcsdk12.org/apps/pages/index.jsp?uREC_ID=1050328&type=d&pREC_ID=1348636

[5] The Japan Times; https://www.pref.kanagawa.jp/docs/v3p/cnt/f6670/documents/366367.pdf.

razão, operador, medida (iterações de frações unitárias) e de medição (comparação de quantidades). A razoabilidade foi examinada pela equivalência de frações, pelo posicionamento do número fracionário na reta numérica e pelas operações aritméticas com frações próprias, impróprias e números mistos. O senso de magnitude considerou abordagens discretas e contínuas que representem o tamanho do número fracionário. Por fim, os aspectos conceituais e procedimentais, simbólicos ou não-simbólicos foram examinados tanto nas abordagens iniciais de cada interpretação, como nas atividades propostas pelos autores dos livros didáticos.

Tabela 4

Estrutura e esquema de codificação para análise qualitativa dos dados.

Item	**Análise qualitativa**	**Descrição**	**Codificação**
1	macroanálise	flexibilidade	PT – parte-todo QT – quociente RZ – razão OP – operador MD – medida ME - medição
2	macroanálise	razoabilidade	EQU – equivalência (P-frações próprias, I-frações impróprias, M- números mistos) RNU – reta numérica (“x” houve; “-” não houve) OPE – operação (P-frações próprias, I-frações impróprias, M- números mistos)
3	macroanálise	senso de magnitude	DIS - associação a um número que represente o seu tamanho de forma discreta. CON - associação a um número que represente o seu tamanho de forma contínua.
4	microanálise	desenvolvimento conceitual, procedimental, simbólico, não-simbólico	CNS - conceitual não-simbólico CSI - conceitual simbólico PNS - procedimental não-simbólico PSI - procedimental simbólico

Mais detalhadamente, no item 1 da Tabela 4, a flexibilidade foi analisada pela diversidade do simples surgimento ou uso estratégico das interpretações ao longo da série de livros. Neste quesito não foram levadas em conta a profundidade e a extensão com que cada interpretação foi desenvolvida. Foram consideradas as conexões entre as diferentes interpretações. Para a aferição do item 1, consideramos a promoção para a compreensão de uma mesma situação, ou em situações correlatas, por duas ou mais interpretações de fração. No item 2, a equivalência de frações e as operações aritméticas foram investigadas pela diversidade do estudo com denominadores iguais ou diferentes sendo efetuadas com frações próprias, impróprias ou mistas. A razoabilidade também deve ser atendida pelo trabalho com o correto posicionamento das frações na reta numérica. No item 3, o senso de magnitude foi estudado a partir da compreensão da associação da medida a um número que represente seu tamanho, tanto de forma discreta, quanto contínua. No item 4, o desenvolvimento conceitual e procedimental das frações foi depreendido a partir dos desdobramentos dos discursos e das atividades oferecidas pelos autores dos livros didáticos, discriminando-os quanto às opções de abordagem pelo lado não-simbólico e simbólico. Em outras palavras, este quesito esteve concentrado nos caminhos eleitos pelos autores dos livros didáticos quanto ao desenvolvimento pelo lado conceitual ou procedimental e pelas preferências de estímulos concretos ou notações matemáticas de frações. De um modo geral, as codificações para o item 4 foram atribuídas para a tendência ou maior relevo oferecido pelos autores pelo lado conceitual ou procedimental e não-simbólico ou simbólico. Assim sendo, foi possível que a certa altura os livros tenham dado maior ênfase para um ou outro desenvolvimento e um ou outro estímulo, apesar de terem feito uso dos dois. Nesse caso, trouxemos ao primeiro plano o maior destaque dado nos livros cujos resultados e análises dão sequência ao texto.

RESULTADOS E ANÁLISES

Contexto geral dos livros

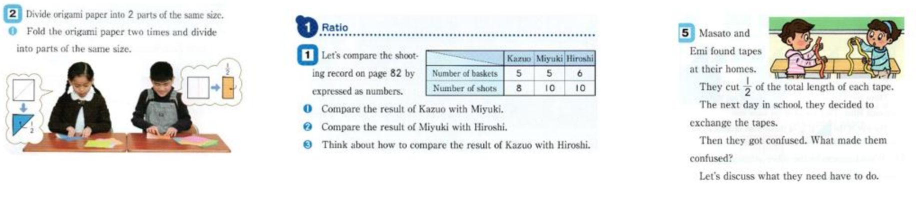
Antes de apresentarmos os resultados e análises a respeito dos livros estudados, convém fornecer um panorama geral sobre as abordagens em cada série. Os livros brasileiros iniciaram cada capítulo com uma história em quadrinhos ou uma situação ilustrada que levava os alunos a desenvolver as primeiras noções sobre o novo assunto, exercendo papel orientador das atividades iniciais subsequentes. Essas noções foram apresentadas, não havendo estímulos à experiência e à interação entre os alunos. O desenvolvimento do conteúdo esteve apoiado em questionamentos e em atividades de "completar lacunas" quase que integralmente em cada capítulo. Houve maior destinação de páginas para exercícios de fixação do que para o desenvolvimento conceitual das ideias.

Os livros estadunidenses iniciavam cada novo tópico com algum estímulo ao raciocínio dos alunos, seja por meio de uma conversa com diálogo escrito, seja por meio de um modelo a ser replicado posteriormente nos exercícios de fixação. Os autores sugeriam aos professores gesticulações que reforçassem as ideias a desenvolver. Esses autores optaram por maciça quantidade de exercícios de fixação, quase sempre a partir de algum modelo resolvido, gerando grande quantidade de páginas. Logo após, ofereciam problemas ligados ao tema. Os livros estadunidenses pareciam conduzir as ações dos professores com muitos detalhamentos atitudinais e procedimentais.

Os livros japoneses, de modo geral, iniciaram algum novo conteúdo com algum desenvolvimento conceitual em diferentes frentes e representações (Figura 4a). Eles orientaram os professores sobre argumentações e interações entre os alunos, sempre que possível. Esses estímulos eram seguidos de algum treinamento a partir de diferentes visões ou interpretações sobre os mesmos objetos em estudo.

Figura 4

(a) diferentes visões sobre o mesmo objeto; (b) convite à comparação e à ampliação do raciocínio; (c) convite à interação em meio à atividade de medição de frações (Elementary School – (a) livro 2, p.84; (b) livro 2, p.86; (c) livro 5, p.84.)



Os autores japoneses não sugeriam grandes quantidades de exercícios de fixação e pareciam deixar a cargo dos professores-regentes o desenvolvimento de atividades segundo suas intuições, criatividades e experiências. Foi comum encontrar nesses livros questionamentos que levassem os alunos a refletir sobre alguma atividade além dos limites do que realizavam naquele momento. Do mesmo modo, esses autores frequentemente convidavam os alunos ao trabalho compartilhado e à comparação (Figura 4b) sobre os diferentes raciocínios e resultados alcançados, inclusive reforçando essa ideia com figuras de alunos realizando as tarefas em conjunto (Figura 4c). O aproveitamento de aspectos pictóricos foi evidente nos livros japoneses.

Desdobramentos dos quatro itens em estudo

Flexibilidade

Em uma macroanálise, o resultado do estudo com a desenvoltura mental por meio das interpretações de frações nas três séries de livros encontra-se sintetizado na Tabela 5.

Tabela 5

Interpretações de frações trabalhados nos livros didáticos.

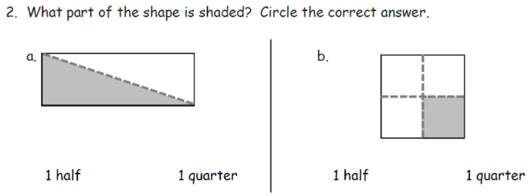
Livro	Brasil	Estados Unidos	Japão
1	-	PT	-
2	-	-	PT/MD
3	-	PT	PT/MD
4	PT	PT	PT/MD
5	PT/QT/OP/MD	PT	PT/QT/RZ/OP/MD
6	PT/QT/RZ/OP	PT/RZ	PT/QT/RZ/OP/MD
7	PT	PT/QT/RZ/OP	-
8	PT/OP	-	-

Os livros brasileiros concentraram o estudo de frações na interpretação parte-todo. Houve uma única incidência de uso de medida no livro 5 ao comparar comprimentos de barras, cordas e palitos para introduzir a ideia de fração. As demais interpretações foram oferecidas prioritariamente em exercícios de fixação e propostas de problemas.

O primeiro livro da série estadunidense utilizou a ideia de igualdade-desigualdade e meios-quartos de figuras geométricas diversificadas (Figura 5) baseadas em parte-todo.

Figura 5

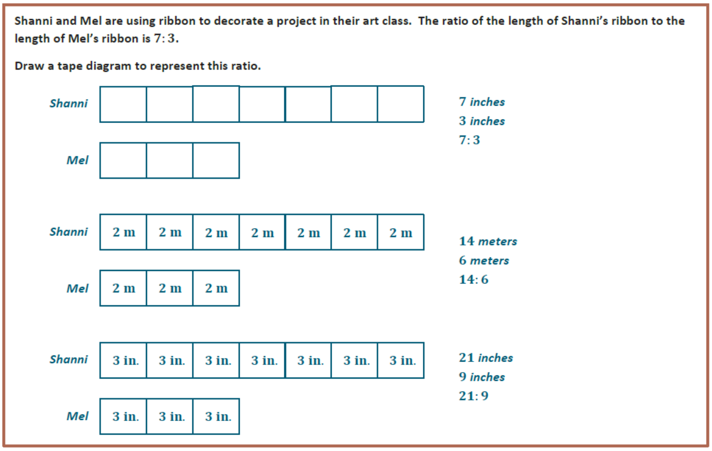
Reconhecimento de meios e quartos no livro 1 estadunidense (Eureka, livro 1, p.121)



O trabalho estadunidense com parte-todo somente foi retomado no final do livro 3 ao lado do início do posicionamento das frações na reta numérica. De modo geral, todos os livros estadunidenses trabalharam fortemente a interpretação parte-todo com retângulos e outras figuras e o posicionamento na reta numérica. O livro 6 iniciou o trabalho com razão sendo coerente com a interpretação parte-todo utilizado nos livros anteriores (Figura 6).

Figura 6

Razão no livro estadunidense (Eureka, livro 6, p.30)



A série japonesa trabalhou intensamente as interpretações parte-todo e medida nos livros 2 a 4 (Figura 3c), inserindo os demais nos livros 5 e 6. Essa série consumiu mais páginas dos livros com o desenvolvimento das noções em estudo do que com exercícios e problemas.

No que diz respeito à flexibilidade, todos os autores fizeram uso das cinco primeiras interpretações de frações da Tabela 2, não abordando a medição. Uma análise mais acurada permite, no entanto, constatar modos diversos de implementação dessas interpretações. Os livros japoneses se aproximam mais do que pregam pesquisadores em Educação Matemática, Psicologia Cognitiva e Neurociência para o ensino de frações, ou seja, desenvolvimento diversificado e relacionado das interpretações de frações, apesar de não ter feito uso de medição. Ao contrário, os livros brasileiros e estadunidenses conduziram suas abordagens quase que integralmente em parte-todo, tendo empregado outras interpretações de modo tímido e isolado. Essa performance pode prejudicar a compreensão de frações de modo lato, tendo em conta que parte-todo não parece ser capaz de promover a amplitude e profundidade necessárias e que fertilize outras esferas da Matemática, de acordo com a comunidade de investigadores.

Razoabilidade

A macroanálise também contemplou a razoabilidade nas três séries de livros, cujos resultados se encontram na Tabela 6.

Tabela 6

Equivalência, reta numérica e operações aritméticas com frações.

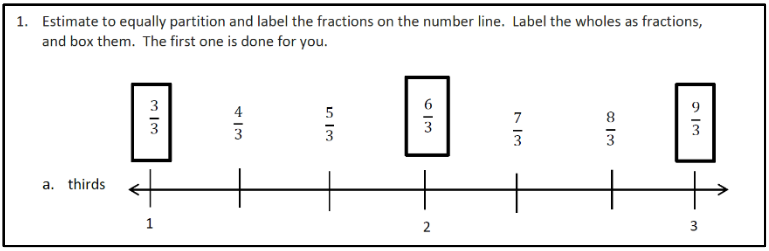
Livro	Brasil			Estados Unidos			Japão		
	EQU	RNU	OPE	EQU	RNU	OPE	EQU	RNU	OPE
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	P/I	x	-	-	x	P[a]
4	-	x	-	P/I/M	x	P/I/M	P/I/M	x	P/I/M
5	P/I/M	x	-	P/I/M	x	P/I/M	P/I/M	x	P/I/M
6	P/I/M	-	P/I/M	P/I/M	x	P/I/M	P/I/M	x	P/I/M
7	P/I	x	P/I/M	-	-	-	-	-	-
8	P/I/M	x	P/I/M	-	-	-	-	-	-

[a] apenas operações aritméticas com denominadores iguais.

A série brasileira introduziu o estudo de equivalência de frações por meio de comparações de figuras parte-todo, seguida de uma definição. Usou a reta numérica para posicionamento das frações. Houve abordagem das frações próprias, impróprias e mistas, preferencialmente pelas próprias. O autor da série brasileira iniciou as operações com frações no sexto livro. Os livros estadunidenses seguiram a mesma linha de conduta dos japoneses, com exceção da opção de posicionamento de frações na reta numérica desligada da compreensão de medição (Figura 7).

Figura 7

Posicionamento de frações na reta numérica (Eureka, livro 3, p.197)



A opção dos livros japoneses foi a de trabalhar com a reta numérica do início ao fim da abordagem de frações na perspectiva de medida (como iteração de fração unitária), mas não dispensaram o apoio dado pela interpretação parte-todo. Trataram das frações próprias, impróprias e mistas do livro 4 ao 6 e as operações aritméticas básicas foram objeto de estudo nos livros 4, 5 e 6.

Infere-se desses resultados que as três séries trabalharam a razoabilidade, tendo se diferenciado apenas no *modus operandi* dos usos da equivalência de frações, da reta numérica e das operações aritméticas básicas.

Senso de magnitude

A Tabela 7 resume a macroanálise sobre o senso de magnitude expresso nas comparações matemáticas de quantidades com auxílio de um número que represente seu tamanho, seja de forma contínua (CON) ou discreta (DIS).

Tabela 7

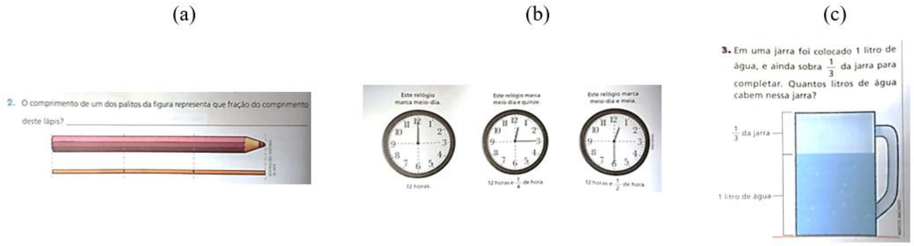
Senso de magnitude - unidade de medida nos livros didáticos.

Livro	Brasil	Estados Unidos	Japão
2	-	-	CON
3	-	DIS	CON
4	DIS	DIS	CON
5	DIS	DIS	DIS-CON
6	DIS	DIS	DIS-CON
7	DIS	DIS	-
8	DIS	-	-

A série brasileira apresentou prioritariamente situações de contagem em todos os livros, com exceção de raras circunstâncias, a exemplo da Figura 8. Por essa escassez, consideramos o senso de magnitude como discreto nessa série.

Figura 8

Senso de magnitude contínuo em livros brasileiros (A Conquista da Matemática: (a) livro 5, p.148; (b) livro 6, p. 134; (c) livro 7, p. 128)

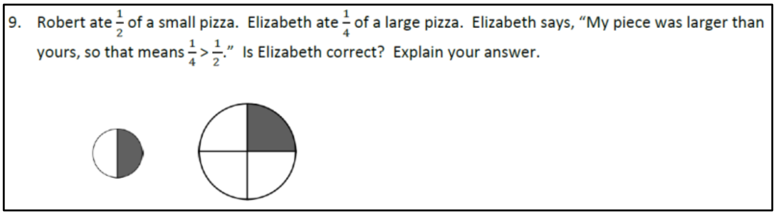


O livro 3 estadunidense iniciou o estímulo ao senso de magnitude com a representação em círculos e barras (Figura 9a) na forma de um problema. Toda a extensa explanação seguiu de modo discreto havendo apenas um caso de abordagem com líquidos e, por essse motivo, consideramos como tendo havido prioritariamente representação discreta (Figura 9b). A representação de tamanho foi rara nos livros estadunidenses e quando ocorria, era de modo discreto (Figura 9c).

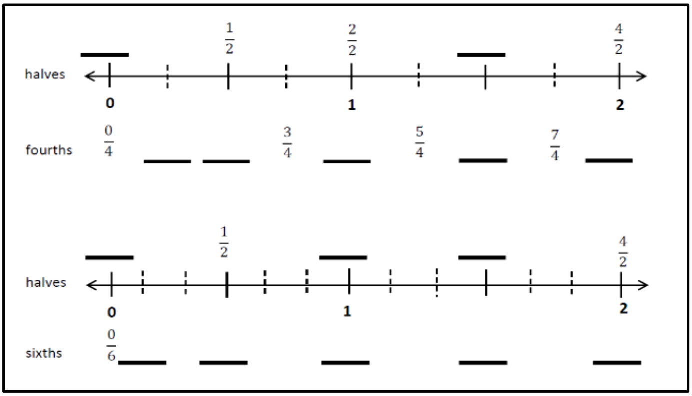
Figura 9

(a) Senso de magnitude por meio de um problema; (b) Posicionamento de frações na reta numérica; (c) Senso de magnitude em livros estadunidenses (Eureka livro 3 - (a) p.128; (b) p.249; (c) p.334) - (continua)

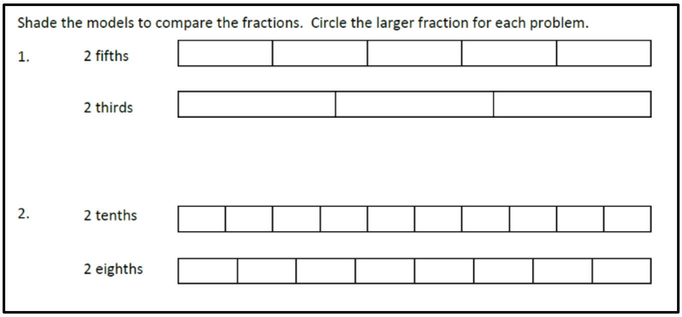
(a)



(b)



(c)



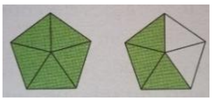
Vale dizer que os livros brasileiros e estadunidenses propuseram alguns exercícios sem o devido cuidado com a determinação da unidade. O livro 5 brasileiro propôs a escrita da fração que representa a parte colorida da figura (Figura 10a) sem determinar a unidade. Nesse caso, a resposta poderia variar no mínimo entre 8/5 ou 8/10 a depender do que fosse considerado como unidade. O livro 3 estadunidense, por sua vez, não considerou a possibilidade de a magnitude de 1/4 poder ser maior, menor ou igual a 1/2, a depender da unidade das frações (Figura 10b). Esse fato ocorreu por várias vezes ao longo dos livros.

Figura 10

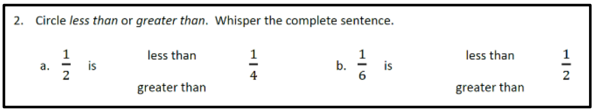
Frações sem determinação da unidade - (a) brasileiro; (b) estadunidense (a- A Conquista da Matemática, livro 5, p.154; b- Eureka, livro 3, p.118)

(a)

Escreva a fração que representa a parte colorida de verde em cada caso.



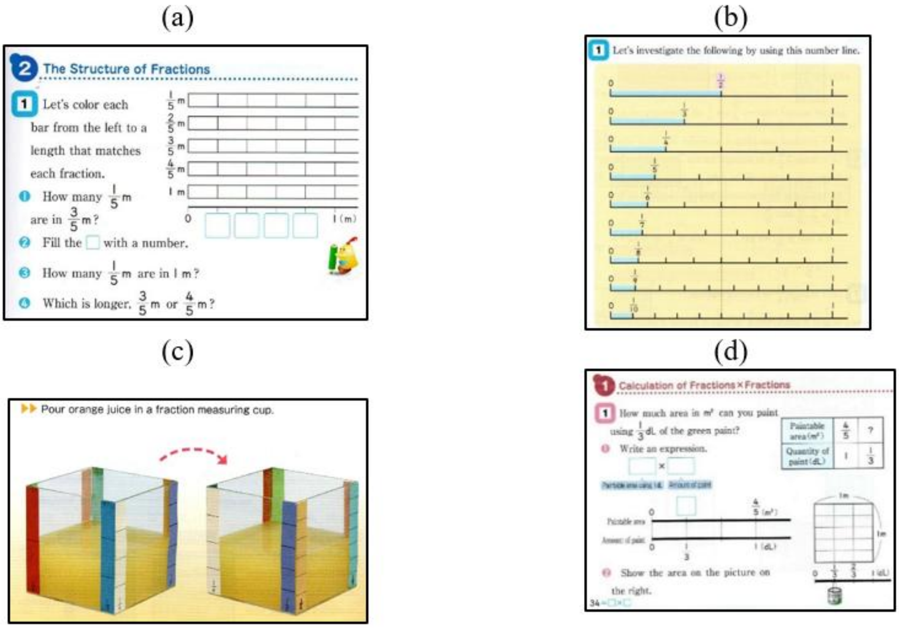
(b)



O segundo livro da série japonesa iniciou o senso de magnitude com um convite à reflexão sobre a comparação de diferentes comprimentos de duas fitas pela medida $\frac{1}{2}$ (Figura 4c). Esse convite pode ensejar uma discussão sobre o fato de se dever considerar a existência de diferentes unidades para frações. Os livros subsequentes ampliaram e aprofundaram esse âmbito, conforme o tema ganhava novos ingredientes: no terceiro livro japonês, os autores compararam frações de mesmo denominador (Figura 11a) de modo contínuo; no quarto livro expandiram essa comparação com denominadores diferentes (Figura 11b) também de modo contínuo; no quinto livro compararam frações pelas medidas de capacidade (Figura 11c) de modo discreto e contínuo e, finalmente, no sexto livro estimularam a comparação discreta e contínua em meio ao trabalho com as operações aritméticas de frações (Figura 11d).

Figura 11

(a) comparação de frações com o mesmo denominador; (b) comparação de frações com os denominadores diferentes; (c) comparação de frações com medidas de capacidade; (d) comparação de frações com operações aritméticas (Elementary School – (a) livro 3, p.93; (b) livro 4, p. 78; (c) livro 2, p. 118; (d) livro 6, p. 34)



Desenvolvimento conceitual, procedimental, simbólico, não-simbólico

A Tabela 8 sintetiza a microanálise sobre o desenvolvimento conceitual, procedimental, simbólico ou não-simbólico encontrado nos livros brasileiros, japoneses e estadunidenses, destinados a cada ano do ensino básico.

Tabela 8

Desenvolvimento conceitual, procedimental, não-simbólico, simbólico.

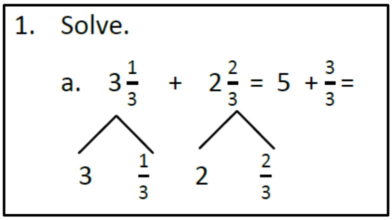
Livro	Brasil	Estados Unidos	Japão
1	-	PNS	-
2	-	-	CNS/PNS
3	-	CSI/PNS/PSI	CNS/CSI/PNS/PSI
4	CNS/PNS/PSI	PSI	CNS/CSI/PNS/PSI
5	PNS/PSI	CSI/PSI	CNS/CSI/PNS/PSI
6	CNS/PNS/PSI	CSI/PSI	CNS/CSI/PNS/PSI
7	PNS/PSI	-	-
8	PNS/PSI	-	-

A série brasileira, iniciou cada capítulo com alguma história ou situação que contextualizasse o conteúdo. As primeiras noções de frações foram desenvolvidas com dobraduras no livro 4. Logo depois, privilegiou abordagens mais procedimentais do que conceituais, no sentido que definimos anteriormente. De modo geral, a breve introdução do conteúdo era seguida de algum modelo de exercício resolvido acompanhada de problemas propostos. Os procedimentos não-simbólicos foram apresentados - e não desenvolvidos ou estimulados - e estavam quase sempre associados aos simbólicos.

Os livros estadunidenses, apesar de desenvolverem alguns aspectos conceituais, simbólicos ou não, apresentaram ênfase em desenvolvimentos procedimentais seguidos de grande quantidade de exercícios com um modelo que os antecedia. Por exemplo, a soma de frações com mesmos denominadores foi estudada a partir de um modelo de decomposição das parcelas em números mistos (Figura 12). O estímulo conceitual nos livros estadunidenses era sugerido no início de cada novo assunto como uma estratégia dada aos professores.

Figura 12

Decomposição de frações para a realiação da operação de soma em livro estadunidense (Eureka, livro 4, p.421)



A série japonesa sempre associou aspectos conceituais aos procedimentais. No início desenvolveu unicamente aspectos não-simbólicos (livro 2), expandindo para situações simbólicas do livro 3 ao 6.

Todos os livros, em geral, se esforçaram em trabalhar aspectos conceituais, procedimentais, simbólicos e não-simbólicos. Novamente, a ênfase foi o diferencial. Os livros brasileiros e estadunidenses concentraram-se em aspectos procedimentais, em detrimento dos conceituais. Essa prática é condenada pela comunidade científica específica e este pode ser um diferencial marcante para a construção de conceitos que virão a influir em Matemática futura. O uso prematuro de definições sem que as principais noções tenham sido concretizadas pode comprometer o entendimento do que sejam frações e, consequentemente, justificar comportamentos como os de alguns alunos considerarem 2/5 como resultado de 1/2 + 1/3, por exemplo. A quantidade de páginas destinadas aos exercícios e problemas, em detrimento do trabalho com aspectos conceituais parece ser indicativo da preferência dos autores por uma ou outra abordagem.

CONCLUSÕES

O objetivo de nossa investigação foi o de entender em macro e microanálise qualitativas como três séries de livros didáticos do Brasil, Estados Unidos e Japão lidam com a flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude das frações e com o desenvolvimento conceitual e procedimental, nas perspectivas simbólicas e não-simbólicas, apoiados principalmente nas seguintes constatações científicas: (1) pesquisadores reconhecem a relevância do estudo de frações por moldar o desempenho futuro da matemática de alunos, a depender da abordagem eleita pelos professores; (2) professores baseiam-se, prioritariamente, em livros didáticos para planejar aulas e; (3) o PISA apresenta desempenhos discrepantes de alunos brasileiros, estadunidenses e japoneses na Matemática nas últimas três edições.

A perspectiva da macroanálise foi estudada nas dimensões de flexibilidade, razoabilidade e senso de magnitude. A flexibilidade foi praticada nas três séries de livros. A diferença, contudo, esteve na ênfase dada: livros japoneses optaram por apoiar o estudo em medida (como iteração de frações unitárias) e parte-todo e, livros brasileiros e estadunidenses sustentaram suas abordagens em parte-todo. A opção desses dois últimos países parece ser contrária ao que prega a comunidade científica específica para o amplo e profundo estudo de frações. A razoabilidade, do mesmo modo, foi contemplada nas três séries quanto ao uso da equivalência de frações próprias, impróprias e mistas, posicionamento na reta numérica e operações aritméticas básicas. Novamente, a desigualdade se concentrou no *modus operandi* intrínseco das abordagens. De maneira divergente, o senso de magnitude foi tratado pelos japoneses inicialmente de modo contínuo nos três primeiros livros, progredindo para o modo discreto. Esse fato está em sintonia com a ênfase do estudo de frações como medida, apesar de não ter sido também como comparação de quantidades diferentes (como medição), como defendem pesquisadores alinhados com a ontologia das frações. Os livros brasileiros e estadunidenses deram relevo ao modo discreto, tendo uma ou outra incidência do modo contínuo. Ademais, essas duas séries apresentaram equívocos em algumas propostas de exercícios ao desconsiderarem a unidade como base para compreensão do que deveria ser realizado pelos alunos.

A perspectiva da microanálise examinou o desenvolvimento conceitual, procedimental, simbólico e não-simbólico das frações. Os livros brasileiros e estadunidenses realçaram o trabalho procedimental em detrimento do conceitual. Os livros japoneses optaram por investir a maior parte de suas páginas com o trabalho conceitual.

De modo sumário, a conjuntura apresentada nesta investigação confirma as alegações da comunidade científica acerca do estudo de frações. O contexto brasileiro e estadunidense primou pela interpretação parte-todo e por uma abordagem pautada em procedimentos, enquanto o cenário japonês destacou a interpretação de medida como iteração de frações unitárias, de parte-todo e por uma ênfase conceitual, estando, assim, mais próximo do que recomendam pesquisadores da área de Educação Matemática.

Podemos afirmar que os livros dos três países não trataram da interpretação de medição. A falta dessa interpretação fundamental pode influenciar a compreensão de matemáticas futuras, como pregam investigadores da Educação Matemática. Assim sendo, recomendamos que a interpretação de medição seja incluída em edições futuras pelas indicações de sua utilidade e importância. O estudo, Powell (2019b), dá indicações que uma introdução ao estudo de frações da perspectiva de medição pode desenvolver as habilidades de pensamento teórico dos alunos, indo além das formas empíricas de conhecimento.

Por fim, de um modo geral, as circunstâncias hodiernas dos três países nos remetem a perguntas contínuas e mais aprofundadas que deem continuidade a essa investigação e que forneça mais conhecimentos que nos levem a possibilidades esperançosas de reversão do panorama apresentado no PISA.

AGRADECIMENTOS

A presente pesquisa é parte de um projeto maior tendo sido desenvolvida com recursos financeiros oferecidos pela Fapes (Espírito Santo - Brasil) e pela Global Rutgers (New Jersey - USA), além do auxílio à publicação financiado pelo Instituto Federal do Espírito Santo - IFES (Espírito Santo - Brasil) os quais agradecemos.

DECLARAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Os autores MAVFS e ABP discutiram em conjunto todo o escopo do trabalho, incluindo resultados, análises e conclusões. A primeira autora MAVFS coletou e analisou os dados em colaboração com o segundo autor ABP.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelos autores, mediante solicitação razoável, a critério dos autores.

REFERÊNCIAS

Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 263-283.

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 239-261. http://www.jstor.org.proxy.libraries.rutgers.edu/stable/41413109.

Aleksandrov, A. D. (1963). A general view of mathematics. In A. D. Aleksandrov, & A. N. Kolmogorov (Eds), *Mathematics: Its content, methods, and meaning* (pp.1-64). Massachusetts Institute of Technology.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Bailey, D. H. et al. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(3), 447-455. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096512001063.

Beaton, A., Mullis, I., Martin, M., Gonzalez, E., Kelly, D., & Smith, T. (1997). *Mathematics achievement in the middle school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91-126). Academic Press.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*, 247-253.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478–1490. https://doi.org/10.1037/a0013110

Campos, T. M. M., Magina, S., Nunes, M. T. (2006). O professor polivalente e a fração: Conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática em Pesquisa*, *8*(1), 125-136.

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Tipografia Matemática.

Charalambous, Y. C., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*, 117–151.

Chingos, M. M., & Whitehurst, G. J. (2012). *Choosing blindly: Instructional materials, teacher effectiveness, and the Common Core*. Brookings Institution.

Cirillo, M., Drake, C., Herbel Eisenmann, B.; & Hirsch, C. (2009). Curriculum vision and coherence: Adapting curriculum to focus on authentic mathematics. *Mathematics Teacher*, *103*(1), 70-75.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.

Davydov, V. V. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13*(1), 13-64.

Escolano, R. E., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*, 17-35.

Escolano, R., & Sallán, J. M. G. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, *1*, 17-35.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 633–646.

González-Martín, A. S., Nardi, E. & Biza, I. (2011). Conceptually driven and visually rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(5), 565-589.

Hart, K. (1987). Strategies and errors in secondary mathematics. *Mathematics in School*, *16*(2), 14-17.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. Lester (Ed), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp.101-144), ERIC/SMEAC.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp.89-120). State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds), *The Roles of Representations in School Mathematics – 2001 Yearbook* (pp.146-168). National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.629-668). Information Age Publishing.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 809-826.

Martinie, S. L. (2007). *Middle school rational number knowledge* [Unpublished doctoral dissertation]. Kansas State University.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Executive Summary*. http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Focal_Points/Principles_to_Action/PtAExecutiveSummary.pdf.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2012). *PISA 2012 results: what 15-year-olds know and what they can do with what* *they know - key results from PISA 2012*. http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2015). *PISA 2015*: *results in focus*. http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2018). *PISA 2018: better policies for betterlives*. https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2018-results.htm

Powell, A. B. (2019a). Como uma fração recebe seu nome? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, *3*(3), 700-713.

Powell, A. B. (2019b). Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. *International Journal for Research in Mathematics Education, 9*(2), 50-68.

Powell, A. B., & Ali, K. V. (2018). Design research in mathematics education: Investigating a measuring approach to fraction sense. In J. F. Custódio, D. A. da Costa, C. R. Flores, & R. C. Grando (Eds.), *Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para pesquisa e ensino* (pp. 221-242). Livraria da Física.

Reys, B. J., Chval, K., Dingman, S., McNaught, M., Regis, T. P., & Togashi, J. (2007). Grade-Level Learning Expectations: A New Challenge for Elementary Mathematics Teachers. *Teaching Children Mathematics TCM*, *14*(1), 6-11. https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/14/1/article-p6.xml.

Robitaille, D. F. & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D.A. Grouws (Ed), *Handbook of mathematics teaching and learning* (pp.687-709). Macmillan Publishing Company.

Schmidt, W., McKnight, C., & Raizen, S. (1997). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education*. Kluwer.

Siegler, R. S. et al. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691-697.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*. Advance online publication, 1-12. http://dx.doi.org/10.1037/edu0000025.

Sophian, C. (2007). *The Origins of Mathematical Knowledge in Childhood*. Routledge.

Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The Role of Visual Representations in Advanced Mathematical Problem Solving: An Examination of Expert-Novice Similarities and Differences, *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(4), 353-387.

Torbeyns, J. et al. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5-13. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959475214000255.

Van de Walle, J. A., Karp. K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally.* Pearson Education.

Venenciano, L. C. H., Yagi, S. L., & Zenigami, F. K. (2021). The development of relational thinking: a study of Measure Up first-grade students' thinking and their symbolic understandings. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10014-z

Watanabe, T. (2006). The teaching and learning of fractions: A Japanese perspective. *Teaching Children Mathematics*, *12*(7), 368–374.

Watanabe, T., Lo, J.-J., & Son, J.-W. (2017). Intended treatment of fractions and fractions operations in mathematics curricula from Japan, Korea and Taiwan. In J.-W. Son et al. (Eds), *What Matters? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education* (pp.33-62). Springer.