

A Formulação de Hipóteses em Atividades de Modelagem Matemática

Lourdes Maria Werle de Almeida ^a

Bárbara N. Palharini Sousa ^b

Emerson Tortola ^c

^a Universidade Estadual de Londrina (UEL), Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, PR, Brasil

^b Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Programa de Mestrado em Ensino PPGEN, Cornélio Procopio, PR, Brasil

^c Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Departamento de Matemática, Toledo, PR, Brasil

*Recebido para publicação 1 mar. 2021. Aceito após revisão 23 ago. 2021.
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

RESUMO

Contexto: A formulação de hipóteses em atividades de modelagem matemática, embora tenha sido apontada como uma das especificidades de atividades dessa natureza, ainda é pouco discutida nas pesquisas da área. **Objetivo:** Neste artigo investigamos desdobramentos para atividades de modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. **Design:** Nossas argumentações se fundamentam em um quadro teórico que considera elementos da filosofia de Wittgenstein e estudos anteriores relativos à formulação de hipóteses, bem como uma pesquisa empírica. **Cenário e participantes:** Atividades de modelagem são desenvolvidas por grupos de alunos de cursos distintos. **Coleta de dados:** Nas aulas com modelagem os dados foram coletados por meio de gravações em áudio e vídeo. Os alunos também entregaram seus registros escritos produzidos. **Resultados:** O processo analítico conduz a três categorias para a formulação de hipóteses: hipóteses são formuladas a partir de um modo de ver dos alunos com relação à situação investigada; hipóteses são fundamentadas em experiências dos alunos; hipóteses determinam as escolhas dos alunos nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade. **Conclusão:** A pesquisa conclui que as hipóteses determinam a situação idealizada, orientam a matematização e direcionam as ações dos alunos no desenvolvimento da atividade. Na perspectiva filosófica de Wittgenstein as hipóteses são uma maneira de perceber a realidade e novas experiências podem levar a outras formulações.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Hipóteses; Filosofia de Wittgenstein.

The Hypotheses Formulation in Mathematical Modelling Activities

ABSTRACT

Background: The formulation of hypotheses in mathematical modeling activities, although it has been pointed out as one of the specificities of this kind of activities, it is still little discussed by the research in the area of mathematical modeling. **Purpose:** In this paper we look for influences on mathematical modeling activities arising from the formulation of hypotheses. **Design:** Our statements are based on a theoretical framework about Wittgenstein's philosophy and previous studies related to hypotheses' formulation as well as an empirical research. **Scenario and participants:** Modeling activities were performed by groups of students from different degrees. **Data collection:** In modeling classes, data were collected through audio and video recordings. The students also delivered the written records they produced. **Findings:** The findings indicate three categories for the formulation of hypotheses: hypotheses are formulated based on the students' view of the situation; hypotheses are based on students' experiences; hypotheses influence students' choices at different stages of the activity's development. **Conclusion:** The research concludes that the hypotheses determine the idealized situation, guide the mathematization and direct the students' actions in the development of the activity. In Wittgenstein's philosophical perspective, hypotheses are a way of perceiving reality and new experiences can lead to other formulations.

Keywords: Mathematical Modelling; Hypotheses; Wittgenstein's Philosophy.

INTRODUÇÃO

A identificação de especificidades de atividades de modelagem matemática vem merecendo atenção de educadores e pesquisadores há algum tempo. O que alguns autores, como por exemplo, Bean (2001), Djepaxhija *et al.* (2015) e Almeida (2014), vêm destacando, é que há indicativos de que a formulação de hipóteses é uma destas especificidades.

Diferentes campos das ciências reconhecem que a formulação, comprovação e refutação de hipóteses não podem ser dissociadas da atividade científica em geral. No que se refere à modelagem matemática, particularmente, as discussões relativas ao tema têm merecido alguma atenção em investigações (Bean, 2012; Bassanezi, 2002; Almeida, 2014; Grigoraş, 2012; Djepaxhija *et al.*, 2015; Seino, 2005; Galbraith & Stilmann, 2001; Chang *et al.*, 2018). Diferentes argumentos podem ser percebidos nestas discussões, estando em pauta desde a significação da palavra hipótese até a sua inclusão no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

O que as pesquisas sinalizam é que a formulação de hipóteses é uma possibilidade de lidar, em atividades de modelagem matemática, com informações, especificidades ou características de situações da realidade ainda não conhecidas quando se inicia a abordagem matemática dessa situação. Lidar com estes aspectos desconhecidos e encontrar uma maneira de superá-los pode ser enfrentado mediante uma formulação de hipóteses (Maaß, 2010).

Conforme ponderam Galbraith e Stillman (2001), as hipóteses formuladas não podem simplificar demasiadamente a situação e devem, sobretudo, colaborar para interação entre a situação e a matemática vislumbrada em atividades de modelagem matemática. Entretanto, formular hipóteses pode não ser tarefa fácil e, como apontam Chang *et al.* (2018), é recorrentemente referida como uma das maiores dificuldades dos alunos quando se envolvem com atividades de modelagem.

Neste artigo, nosso interesse se dirige à questão: que desdobramentos para a atividade de modelagem matemática decorrem da formulação de hipóteses? Nossa discussão, por um lado, se fundamenta em elementos da filosofia de linguagem de Ludwig Wittgenstein e em interpretações que ela tem recebido no âmbito da Educação Matemática. Por outro lado, tomamos por base uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por dois grupos de alunos, sendo um de um curso de Licenciatura em Matemática e outro de um curso de pós-graduação em Educação Matemática.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Em termos gerais, modelagem matemática diz respeito à investigação de uma situação da realidade por meio da matemática (Almeida, 2018; Blum & Niss, 1991; Pollak, 2015; Meyer *et al.*, 2011). O percurso dos modeladores nesta investigação pode se orientar por diferentes configurações, considerando propósitos de quem desenvolve a atividade e as próprias perspectivas da modelagem matemática destas situações (Kaiser & Sriraman, 2006).

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula em diferentes níveis de escolaridade pressupõe que os modeladores (alunos e professores) se engajem em atividades em que precisam identificar uma situação-problema da realidade e formular um problema associado a esta situação, “decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo

matemático para deliberar sobre esse problema e então decidir se os resultados fazem sentido face à situação original” (Pollak, 2015, p. 267).

Aos procedimentos identificados por Pollak (2015), costuma se associar o que em Almeida, Silva e Vertuan (2012) se denomina fases da modelagem matemática e consistem em: inteiração (simplificação, idealização, coleta de dados e formulação de um problema); matematização (transição da linguagem natural para linguagem matemática, formulação de hipóteses e definição de variáveis); resolução (obtenção de um modelo matemático, uso de conceitos, teoremas, procedimentos e técnicas matemáticas); interpretação dos resultados e validação (análise do modelo e confrontação dos resultados frente à situação da realidade).

No decorrer das ações nestas diferentes fases, os alunos ou professores partilham interesses, problemáticas, discussões e realizam transições entre diferentes linguagens. Neste sentido, Stillman *et al.* (2015) sugerem que alunos e professores, na verdade, realizam a investigação do que estes autores denominam de situação idealizada e que decorre de uma leitura e de uma interpretação da situação real.

Caberia discutir, portanto, como se dá essa idealização nas atividades de modelagem, o que fazem os modeladores visando uma leitura e interpretação matemática de situações não matemáticas. Neste contexto nosso olhar no artigo se dirige à formulação de hipóteses.

AS HIPÓTESES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A concepção de modelagem matemática como investigação de uma situação da realidade por meio da matemática que norteia nossas reflexões sobre a formulação de hipóteses em atividades em modelagem compreende a ideia já veiculada por Bean (2001) de que uma especificidade de atividades de modelagem matemática é “a exigência das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação do modelo” (p. 53).

Nesta mesma direção estão argumentações de Stillman *et al.* (2015) considerando que as situações da realidade submetidas à modelagem matemática na sala de aula constituem, na verdade, situações idealizadas pelos alunos e professores modeladores. Já Massß (2010) afirma que atividades de modelagem na sala de aula se iniciam, de modo geral, com escassez de informações para dar suporte à modelagem matemática da situação da realidade.

Assim, a discussão sobre o papel das hipóteses em atividades de modelagem matemática, por um lado sugere a necessidade da formulação de hipóteses e, por outro lado, pode se voltar aos desdobramentos dessa formulação para atividades desse tipo.

Partindo da ideia de que “a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” Bassanezi (2002, p. 16), afirma que “as hipóteses dirigem a investigação” (p. 28). Para o autor esta formulação vem ancorada em pressupostos como, por exemplo, na observação dos dados ou das informações sobre o fenômeno, na comparação com a resolução de problemas análogos, ou mesmo na própria experiência do modelador.

Referindo-se à introdução da modelagem matemática nas aulas de matemática Almeida e Vertuan (2011) também apontam a necessidade das hipóteses e ponderam que:

[...] a modelagem tem como aporte maior a realização de investigações em sala de aula que tem o problema como ponto de partida, a intencionalidade na busca, as hipóteses como fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema (Almeida & Vertuan, 2011, p. 22).

Grigoraş (2012) defende que a formulação de hipóteses é uma componente do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática que, embora aconteça no estágio inicial desse desenvolvimento, pode se estender durante toda a atividade de acordo com a complexidade das estratégias, os métodos utilizados pelos alunos, bem como as características do fenômeno em estudo.

No estudo de Seino (2005) estudantes da Educação Básica tomam consciência da importância das hipóteses que formulam quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática. O que autor aponta é que esta formulação pode se dar em diferentes momentos no decorrer do desenvolvimento da atividade, sendo necessária, entretanto, a intervenção do professor para os alunos perceberem a relação entre as hipóteses e a resposta encontrada.

A interpretação de que a formulação de hipóteses é prática que proporciona aos alunos ultrapassar bloqueios cognitivos que podem impedi-los de realizar com êxito o desenvolvimento de atividades de modelagem é

apresentada em Djepaxhija *et al.* (2015). Os autores concluem que pode-se atribuir às hipóteses a definição de ferramentas matemáticas para a construção do modelo matemático da situação.

Conforme discutem Galbraith e Stillman (2001), as hipóteses atuam como palpites que devem fazer parte do que os autores chamam de atividades de modelagem genuínas. Embora muitas vezes esta formulação se dê em uma fase específica da modelagem, sua função essencial, na perspectiva desses autores, reside na integração da matemática com a situação da realidade como ponto chave para o progresso no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Propomos, no presente artigo, uma reflexão sobre a formulação de hipóteses e até mesmo sobre a própria palavra *hipótese* no contexto do desenvolvimento de atividades de modelagem considerando elementos do itinerário do pensamento do filósofo Ludwig Wittgenstein sobre linguagem, mais especificamente no que ele caracteriza como *jogos de linguagem*. Para Wittgenstein, as diferentes práticas em que a linguagem é usada, ou contextos em que ela se inclui são chamados de jogos de linguagem, de modo que ele afirma “chamarei também de ‘jogos de linguagem’ o conjunto que compreende a linguagem e as atividades com as quais está entrelaçada” (Wittgenstein, 2013, § 07). Em outro momento o autor pontua “o significado de uma palavra é seu uso na linguagem” (Wittgenstein, 2013, § 43) e a esses usos denominou de jogos de linguagem. As ações com a linguagem, neste sentido, se configuram como jogos de linguagem, como por exemplo, a realização de um cálculo, a enunciação de um poema, cantar uma música, entre outros. A matemática e a atividade matemática, em particular, atividades de modelagem matemática, são constituídas de jogos de linguagem com os quais os modeladores precisam lidar.

No que se refere à palavra hipótese, parecem se configurar diferentes significados em decorrência dos jogos de linguagem em que o termo aparece, considerando o que dicionários apresentam para se referir à hipótese ou falar de seu significado. Segundo Abbagnano (2007), hipótese diz respeito a um enunciado que só pode ser comprovado, examinado, verificado, indiretamente através de suas consequências. Para Japiassú e Marcondes (2008), hipótese é uma explicação provisória de um fenômeno devendo ser provada pela experimentação. Já em Houaiss (2009), uma hipótese pode ser uma proposição que admite um princípio a partir do qual se pode deduzir um determinado conjunto de consequências.

Levando em consideração estes diferentes significados, poderíamos perguntar: quando o contexto é a modelagem matemática, como falar do

significado das hipóteses? As hipóteses utilizadas no desenvolvimento da modelagem matemática são verificáveis por meio de suas consequências?

Algumas reflexões sobre estas questões podem advir do pensamento de Wittgenstein com relação às hipóteses. O filósofo, ao tratar da natureza das hipóteses em sua Gramática Filosófica, afirma que uma hipótese pode resultar de nossas experiências e, justamente por isso, ela pode se modificar, ela pode ser substituída, e exemplifica sua conjectura assim:

Se nossas experiências resultam em pontos sobre uma linha reta, a proposição de que essas experiências são várias visões de uma linha reta é uma hipótese. A hipótese é uma maneira de perceber essa realidade, uma nova experiência pode coincidir com ela ou não, e, possivelmente, tornar necessário modificar a hipótese (Wittgenstein, 2003, p. 169).

Nesse contexto, a formulação de uma hipótese em atividades de modelagem matemática poderia também se associar às experiências dos modeladores, seja com a situação da realidade, seja com a matemática, ou seja ainda com práticas de modelagem matemática. Da experiência resultariam modos de ver para fomentar a formulação de hipóteses. Assim, não existiriam, *a priori*, hipóteses certas ou hipóteses erradas. No entanto, a experiência do modelador e as suas informações sobre a situação, podem conduzir a formulações cuja adequação e veracidade podem se confirmar quando o modelo for considerado adequado ou quando atender aos interesses do modelador e de uma comunidade.

As experiências dos modeladores são mencionadas também em Chang *et al.* (2018) em que os autores sugerem que as hipóteses formuladas podem ser separadas em dois grupos: não-numéricas, que dizem respeito a condições da situação investigada e envolvem conhecimento extra matemático; numéricas, que visam suprir a falta de informações quantitativas sobre a situação.

Wittgenstein pondera que é preciso confirmar a veracidade de uma hipótese, para que ela seja útil no jogo de linguagem em que estamos quando afirma:

Pode ser duvidoso se o corpo que vejo é uma esfera, mas não pode ser duvidoso que, daqui, pareça ser algo como uma esfera. O mecanismo da hipótese não funcionaria se a aparência também fosse duvidosa de modo que não pudéssemos verificar para além da dúvida mesmo uma faceta da hipótese. Se houvesse uma dúvida no caso, o que eliminaria a dúvida? Se

também essa ligação fosse frouxa, não haveria nada com que confirmar uma hipótese e ela pairaria no ar inteiramente, inteiramente sem objetivo (e, portanto, inútil) (Wittgenstein, 2003, p. 171).

Uma interpretação dessa assertiva de Wittgenstein nos leva a considerar que, ainda que hipóteses se formulem em um estado de dúvida dos modeladores, precisam ser permeadas de alguma certeza, pois se a dúvida imperar não se definem ações. Parece ser com este entendimento que em Almeida (2014) hipóteses em atividades de modelagem matemática são caracterizadas como são suposições bem fundamentadas, cuja fundamentação decorre de indícios, fatos e informações relativas à situação da realidade que está sob investigação. Pode-se ponderar que também a ideia de palpites sugerida por Galbrath e Stillman (2001) encontra respaldo neste pensamento de Wittgenstein, considerando que, segundo estes autores, os palpites, por um lado, incluem experiências do modelador e, por outro lado, trazem simplificações para o problema de modo que, ainda que parem dúvidas, há alguma certeza para orientar a modelagem matemática da situação.

A migração das ideias de Wittgenstein para o âmbito da Educação Matemática nos leva a ponderar que, por um lado, a formulação de hipóteses em atividades de modelagem matemática não pode se dar de forma desvinculada das características da situação, por outro lado, esta formulação também requer alguma experiência ou alguma antecipação, como consideram Niss (2010) e Almeida (2018), relativas tanto ao conhecimento matemático, às informações sobre a realidade, quanto à sua experiência com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Estes aspectos favorecem a identificação com relação ao funcionamento do mecanismo da hipótese, como considera Wittgenstein.

Levando em consideração estas aproximações vislumbradas entre o pensamento de Wittgenstein e hipóteses, a pesquisa empírica visa fomentar e ampliar as perspectivas apontadas acerca da formulação de hipóteses no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e dar indicativos dos desdobramentos para a atividade decorrentes desta formulação.

METODOLOGIA¹

A pesquisa empírica realizada inclui duas atividades de modelagem matemática. Uma delas foi desenvolvida por um grupo de alunos na disciplina de Modelagem Matemática em um programa de pós-graduação em Educação Matemática em uma universidade pública. Nesta disciplina, cursada por 20 alunos, os diferentes grupos desenvolveram atividades, sendo que o tema de interesse foi definido por cada grupo. Neste artigo nos referimos à atividade de um desses grupos e a escolha desse grupo decorre da qualidade dos dados obtidos bem como pela ênfase desse grupo à formulação de hipóteses. A outra atividade foi desenvolvida por 21 alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática e a temática foi sugerida pela professora. Nesta disciplina a mesma atividade foi desenvolvida por todos os grupos dos alunos. No artigo incluímos o desenvolvimento de um desses grupos. A escolha desse grupo decorre da qualidade dos dados obtidos bem como das informações desse grupo relativamente à questão que se investiga neste artigo. Ambas as disciplinas foram ministradas por uma das autoras do presente artigo.

Do ponto de vista metodológico trata-se de uma pesquisa qualitativa. O processo analítico é relativo aos dados que foram obtidos dos relatórios das atividades entregues pelos alunos bem como de transcrições de gravações em áudio e vídeo realizadas durante as aulas em que se deu o desenvolvimento das atividades bem como da apresentação dos trabalhos de cada um dos dois grupos para todos os alunos em cada uma das disciplinas. A análise interpretativa desses dados à luz do quadro teórico referido nos leva a caracterizar categorias relativas aos desdobramentos para as atividades decorrentes da formulação de hipóteses pelos alunos.

Primeira atividade

Esta atividade refere-se ao monitoramento da frequência cardíaca dos indivíduos durante a prática de exercícios físicos. Foi desenvolvida por um

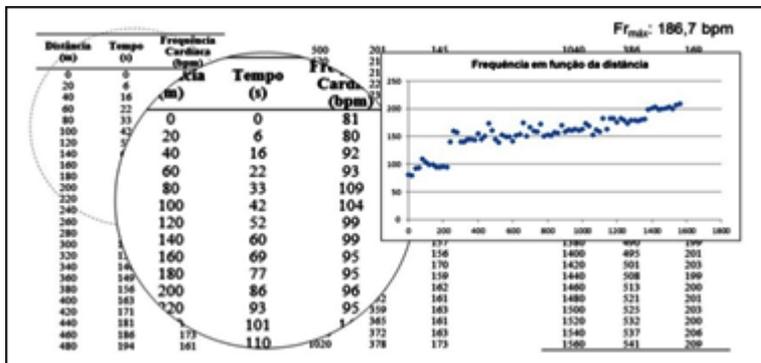
¹ Os dados da presente pesquisa não fazem parte de projeto submetido ao comitê de ética. A apresentação dos dados é de responsabilidade dos autores, ficando a revista *Acta Scientiae* eximida de quaisquer responsabilidades, de acordo com a Resolução nº510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil. A plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa é atribuição dos autores.

grupo de alunos na disciplina de Modelagem Matemática em um curso de pós-graduação em Educação Matemática. Conforme referem no relatório entregue, os alunos foram motivados pelo interesse em conhecer como a aptidão física de cada pessoa influencia na realização de exercícios físicos. Assim, a partir de informações em *sites* e livros especializados, perceberam que há diferentes tipos de testes que podem ser usados nessa investigação. Optaram por um desses testes, conhecido como teste de Léger e Lambert² e decidiram que o objetivo na atividade é construir um modelo matemático que descreve a variação da frequência cardíaca de um indivíduo durante a realização do teste de Léger e Lambert, popularmente conhecido como teste aeróbico de corrida de vai-vem de 20 metros.

O grupo se deparou com a necessidade de coletar dados com pessoas de diferentes hábitos no que se refere à prática de atividades físicas. Os dados foram, portanto, construídos pelos próprios alunos mediante procedimento experimental. Dentre alunos do grupo e seus familiares, escolheram quatro sujeitos (corredores), sendo dois sedentários e dois que declararam praticar exercícios físicos regularmente, sendo um deles profissional da área de Educação Física e conhecedor do uso do teste de Léger e Lambert. De posse de materiais como cronômetro, frequencímetro, fita métrica, fita adesiva e áudios, o grupo de alunos demarcou a distância, conforme indicam as instruções de realização do teste, em uma quadra esportiva e para cada indivíduo que desempenhava o teste foi feita uma gravação em áudio e vídeo. Para este artigo, trazemos os dados coletados pelos alunos para um corredor (Figura 1).

Figura 1

Dados coletados da performance de um corredor no Teste de Léger e Lambert



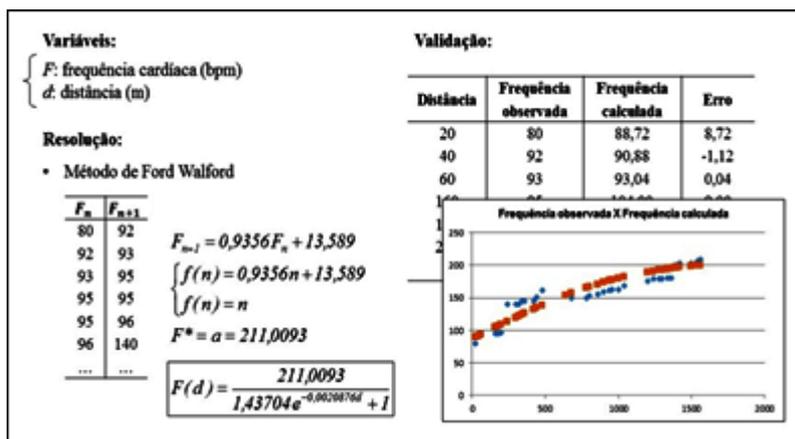
² Detalhes do método estão em Duarte & Duarte (2001).

A abordagem matemática dessa situação pelos alunos iniciou com a interpretação dos dados obtidos e que fornecem informações sobre a situação. Conforme sugerem em seu relatório, dessa primeira interpretação dos dados decorreu a formulação de três hipóteses: $H_{1.1}$: Há uma regularidade na variação da frequência cardíaca; $H_{2.1}$: Existe relação entre a variação da frequência cardíaca e a distância percorrida pelo corredor; $H_{3.1}$: O comportamento da frequência cardíaca é crescente e tende a se estabilizar na medida em que se aproxima da frequência cardíaca máxima do corredor.

Usando os dados da Figura 1 e essas hipóteses, os alunos fizeram a matematização da situação e construíram um modelo matemático usando o método de Ford-Walford³ conforme indica a Figura 2. A validação do modelo neste caso foi realizada pelos alunos comparando os observados (pontos em azul) com dados obtidos pelo modelo (curva em amarelo) conforme indica a imagem da Figura 2.

Figura 2

Matematização e modelo matemático construído



Uma análise interpretativa dos desdobramentos dessas hipóteses para o desenvolvimento da atividade nos leva a algumas inferências entre a relação das hipóteses com os demais encaminhamentos dos alunos.

³ Método para determinar o valor de estabilidade em modelos assintóticos e descrito com detalhes em Bassanezi (2002).

A hipótese $H_{1.1}$ (Há uma regularidade na variação da frequência cardíaca) parece fundamentar-se na característica do fenômeno da frequência cardíaca: a necessidade de uma regularidade dos batimentos. De fato, embora possa se observar alguma variabilidade nos batimentos cardíacos, os alunos expressam nessa hipótese que supõe a necessidade de regularidade do movimento considerando o preparo físico do corredor. Podemos dizer que $H_{1.1}$ visa elucidar características do problema a ser investigado, tratando-se, assim, de um modo de ver a situação ou talvez, uma interpretação. E, segundo Wittgenstein (2013, p. 276), “interpretar é pensar, agir; ver é um estado”. A ação, neste caso, possibilita o pensar sobre qual matemática usar para resolver o problema e como usá-la visando à compreensão da variação do batimento cardíaco no teste de Léger e Lambert. Nesse contexto, a primeira hipótese foi formulada como ponto de partida para esboçar um raciocínio, um caminho a seguir na busca pela solução do problema, ou seja, um guia para a pesquisa conforme se argumenta em Almeida (2014).

No que se refere à hipótese $H_{2.1}$ (Existe relação entre a variação da frequência cardíaca e a distância percorrida pelo corredor), ela claramente colabora para o encaminhamento matemático da situação. De fato, conforme indica a Figura 1, o tempo, a distância percorrida e o batimento cardíaco são as três variáveis que neste caso estão incluídas nos dados coletados. É possível afirmar que essa hipótese direciona o olhar dos alunos para definir qual matemática irão utilizar na elaboração do modelo matemático, visto que a utilização das três variáveis implicaria na construção de um modelo baseado em uma função de duas variáveis independentes, ou, em duas funções de uma variável independente (variação da frequência cardíaca em função da distância percorrida; distância percorrida em função do tempo gasto).

Os alunos informam no relatório bem como na apresentação da atividade aos colegas que no uso do teste de Léger e Lambert há estágios padronizados, de modo que consideram adequado elaborar um modelo considerando a variação da frequência cardíaca em função da distância percorrida. Tal fato vai ao encontro das indicações de Almeida e Vertuan (2011) de que as hipóteses são fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas para resolver o problema. Inferimos, portanto, que $H_{2.1}$ assume na atividade o papel de delimitar e simplificar a situação matemática a ser resolvida pelos alunos. Qual matemática considerar decorre dos modos de ver a situação, da observação e da experiência dos modeladores, das informações que eles têm sobre a situação.

A partir das duas hipóteses iniciais os alunos adentram à construção de um modelo matemático, norteados pela terceira hipótese formulada $H_{3,1}$ (O comportamento da frequência cardíaca é crescente e tende a se estabilizar na medida em que se aproxima da frequência cardíaca máxima do corredor). Na apresentação da atividade para todos os alunos da disciplina, os alunos do grupo justificam esta hipótese: “Nós tínhamos que considerar que o batimento não aumenta indefinidamente e isso em matemática significa pensar em uma função que tem uma assíntota⁴ horizontal” (transcrição de áudio da apresentação da atividade). Outro aluno então acrescenta: “Por isso nós escolhemos uma função do tipo dessa”, apontando para o *slide* com as informações: $F(d) = \frac{a}{b \cdot e^{-\lambda d + 1}}$, em que $a, b, \lambda \in R$ e F é a frequência cardíaca (bpm), d é a distância (m). (transcrição de áudio da apresentação da atividade). Usando os dados da Figura 1, os alunos construíram o modelo matemático para a situação conforme indica a Figura 2.

Assim, podemos considerar que a hipótese $H_{3,1}$ remete ao uso da linguagem matemática disponível aos modeladores, uma linguagem convencionalizada, de natureza objetiva, com regras e gramática específicas. Esta hipótese é vista como uma lei que guia os alunos. Podemos dizer que esta lei reflete uma expectativa do grupo com relação a qual matemática usar para construir o modelo matemático e, por conseguinte, uma expectativa para obter uma solução para o problema.

A imagem da Figura 2 indica que o comportamento do modelo matemático construído (em amarelo) não corresponde, ponto a ponto, aos dados coletados durante o teste do corredor (pontos em azul), o que corrobora com a ideia de que uma hipótese neste caso conduz a uma aproximação para se olhar para a situação e que pode ser modificada de acordo com a experiência do modelador, com o modo de ver e de interpretar esta situação. Eles observaram que o valor limitante (a assíntota) para a frequência cardíaca do sujeito obtido por meio de um método matemático- de 211 bpm –é superior à frequência cardíaca máxima estimada segundo a literatura da área de saúde, em que se indica o valor de 186,7 bpm.

⁴A assíntota horizontal a que se refere o aluno nessa atividade é relativa ao valor de estabilidade para o batimento cardíaco.

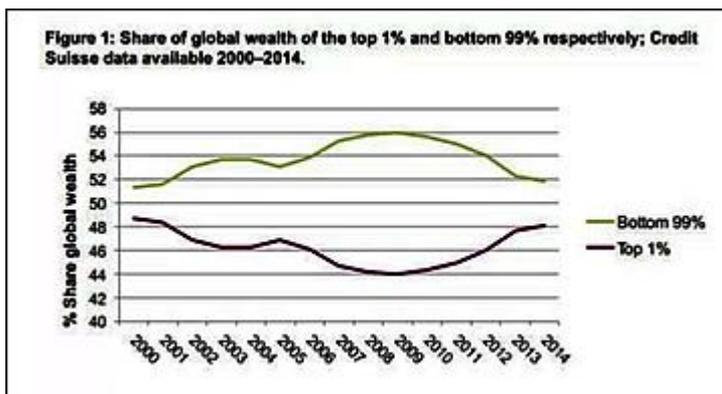
Segunda atividade

Esta atividade foi desenvolvida por alunos do curso de Licenciatura em Matemática no decorrer de quatro aulas da disciplina Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática no segundo semestre do ano de 2019. Os alunos desenvolveram a atividade em grupos. Referimo-nos aqui ao desenvolvimento de um destes grupos.

A atividade teve origem em uma situação apresentada aos alunos pela professora conforme indica a Figura 3. A imagem desta figura, publicada na revista Exame, acompanha uma reportagem relativa à desigualdade na distribuição de riquezas no mundo. Segundo a reportagem, o gráfico tem a intenção de chamar atenção para o fato de que a desigualdade tem crescido no período de 2000 a 2014. O que, segundo a reportagem, deve se evidenciar na imagem é o impacto da distribuição da riqueza global, indicando uma relação entre as riquezas de 1 % das pessoas mais ricas do mundo, em relação às riquezas dos demais 99% da população.

Figura 3

Imagem levada aos alunos pela professora (revista Exame de 19 de janeiro de 2015)



A partir da interpretação da situação apresentada nesta imagem foi desencadeado um trabalho matemático que visa à análise do comportamento da distribuição de riquezas. Ou seja, nesta atividade não há, como na atividade anterior, um problema claramente definido com relação ao fenômeno a ser investigado. Ao invés disso, o que os alunos iriam fazer é apresentar, por meio da matemática, uma análise da situação apresentada na imagem.

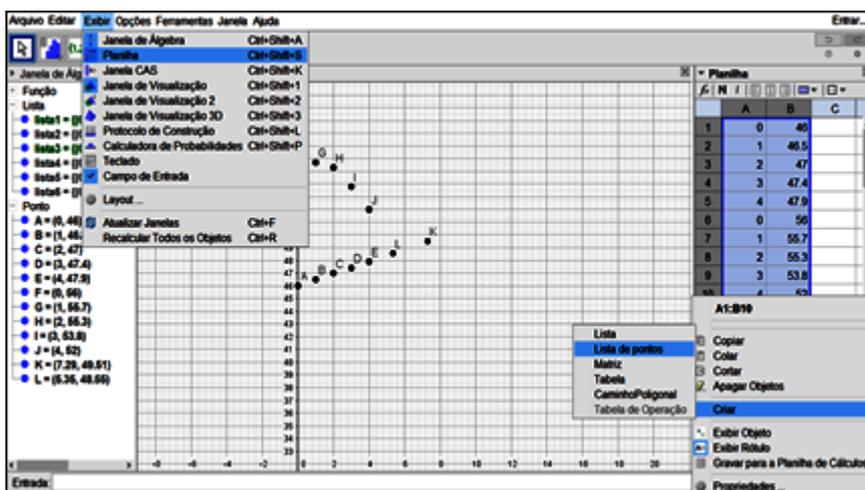
O grupo de alunos a que nos referimos neste texto vislumbrou uma dinâmica para a imagem formulando quatro hipóteses ao longo do desenvolvimento da atividade e fazendo uso de recursos do *software* GeoGebra para a abordagem matemática da situação.

Inicialmente, os alunos definiram a hipótese $H_{1,2}$: existe a possibilidade de as riquezas do 1% mais ricos alcançarem as riquezas dos demais 99% da população, que segundo consta no relatório entregue pelos alunos, é “decorrente da sensação, de que a imagem relativa ao período de 2000 a 2014 sinaliza que há a possibilidade de estas duas curvas se interceptarem em algum ano depois de 2014 se não houver alteração no comportamento da situação” (relatório dos alunos).

Esta hipótese dá origem à fase de matematização em que é preciso enxergar além da imagem por si só e vislumbrar qual matemática pode ser usada para entender como esta situação da distribuição de riquezas vai se comportar no decorrer do tempo. A hipótese funciona, portanto, como um guia para a aplicação das regras matemáticas a partir dos dados sobre a situação identificados na Figura 3.

Figura 4

Matematização da situação usando o GeoGebra (relatório dos alunos)



Para orientar a construção de um modelo matemático capaz de viabilizar as estimativas para a aproximação das riquezas dos dois grupos da população os alunos definiram uma segunda hipótese: $H_{2,2}$: A partir das

informações da imagem da Figura 3 vamos ajustar aos dados modelos lineares. A construção do modelo foi mediada pelos recursos do *software* GeoGebra e iniciou com a inserção dos dados sobre a situação no *software*, conforme indica a Figura 4. Na imagem os valores da coluna A (0,1,2,3,4) representam, respectivamente, os anos de 2009 à 2014 e os valores da coluna B uma aproximação de acordo com o gráfico da riqueza dos 1% mais ricos e dos demais 99% da população.

Usando a ferramenta de ajuste de curvas do *software* os alunos construíram os modelos lineares. Para a evolução das riquezas dos 99% da população foi obtido $f(x) = -1,05x + 43,92$ e para a evolução da riqueza do 1% mais ricos da população o modelo obtido foi $g(x) = -0,97x + 56,34$ (Figura 5 (a)). Estes modelos conduziram à conclusão dos alunos de que: “No ano de 2016 as riquezas dos dois grupos já se igualaram, ou seja, a partir desse ano, as riquezas dos 1% mais ricos já superam as dos demais 99% da população mundial” (relatório dos alunos).

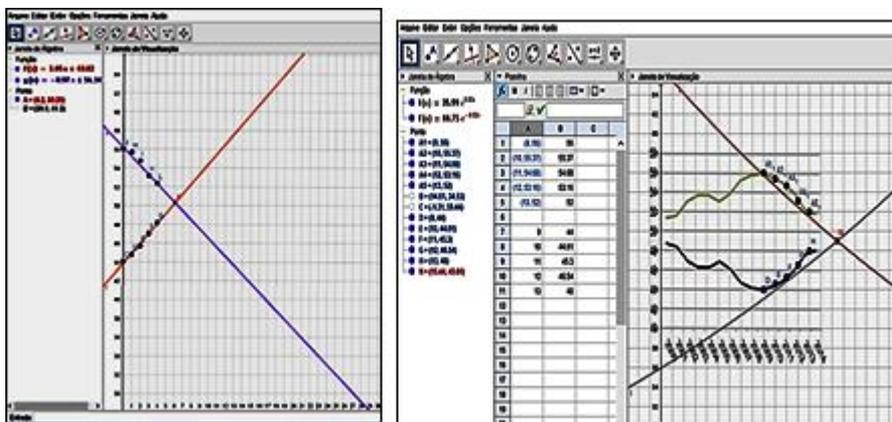
Conforme declaram durante a apresentação do trabalho na aula (apresentação gravada em áudio e vídeo), “aproveitando os recursos do *software*, podemos fazer outras simulações e por isso nós definimos mais uma hipótese” (transcrição de gravação em áudio de um aluno do grupo). A hipótese a que se refere o aluno é: $H_{3,2}$: Vamos supor um comportamento exponencial para as distribuições de riquezas no decorrer do tempo, a partir do ano de 2009.

Usando a mesma ferramenta do GeoGebra encontraram os modelos $h(x) = 67.75e^{-0.02x}$ e $j(x) = 67.75e^{-0.02x}$ para descrever, respectivamente, a evolução das riquezas dos 1% mais ricos e a evolução das riquezas dos demais 99% a partir do ano de 2009 (Figura 5 (b)). Também neste caso, igualando os dois modelos, a conclusão dos alunos é de que no ano de 2006 as riquezas dos dois grupos já são iguais.

Com base nos modelos os alunos concluíram que: “Podemos concluir que a distribuição de riquezas tem a tendência de se tornar ainda mais desigual no decorrer do tempo” (relatório dos alunos). Para investigar como esta situação poderia se comportar no decorrer do tempo, os alunos definiram ainda mais hipótese: $H_{4,2}$: O comportamento da distribuição das riquezas não vai se alterar bruscamente durante os próximos 10 anos. Esta hipótese visa dar suporte para a finalidade preditiva dos modelos matemáticos obtidos. Ou seja, realizar uma previsão de como a distribuição de riquezas vai se comportar nos próximos anos é uma consequência desta hipótese.

Figura 5

(E) Modelos lineares. (D) Modelos exponenciais



Nesta atividade as hipóteses definidas pelos alunos orientaram o uso das regras matemáticas para a interpretação da situação. Decorre das hipóteses o que em Moreno (2003) identifica como a *apropriação linguística* e que aqui abordamos relativamente aos modelos lineares e exponenciais construídos, ao uso do *software* bem como à significação decorrente do uso dos modelos para as estimativas e análise da situação da distribuição das riquezas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste artigo nossas reflexões acerca dos desdobramentos decorrentes da formulação de hipóteses para atividades de modelagem matemática levam em consideração as atividades desenvolvidas por dois grupos de alunos e revelam uma interpretação de elementos da filosofia da linguagem de Wittgenstein. Neste contexto, atividades de modelagem matemática envolvem ações e articulações linguísticas relativas a interlocuções entre matemática e situação da realidade.

O que podemos inferir a partir do esforço analítico empreendido é que as hipóteses formuladas pelos alunos, ao mesmo tempo em que têm diferentes origens, também têm diferentes finalidades para o desenvolvimento da atividade. O estudo, por um lado, corrobora indicações da literatura como as de Bassanezi (2002), que indicam que as hipóteses dirigem a investigação bem como resultados de Almeida e Vertuan (2011), que apontam a necessidade das hipóteses como “fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em

que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas” (p. 22). Essas indicações poderiam nos sugerir que a formulação de hipóteses se firma em etapas iniciais da atividade.

Por outro lado, entretanto, a análise empreendida no presente artigo indica que a partir da formulação de hipóteses as demais ações dos alunos podem ser configuradas, expressando diferentes modos de ver a situação e uma possível solução. Estes modos de ver não são interpretações privadas, mas direcionam alunos a publicizar o uso e a aplicação das regras matemáticas para situações específicas no interior de cada atividade. Neste contexto, as hipóteses conduzem os alunos para expressar as técnicas matemáticas aprendidas, bem como as regras da situação que aprenderam por meio da modelagem matemática da situação. Diferem a natureza de cada contexto, a ‘situação investigada’ e o ‘uso da matemática’, bem como as relações linguísticas proporcionadas pelas hipóteses no interior das atividades de modelagem matemática.

Na primeira atividade de modelagem matemática, as três hipóteses dos alunos têm especificidades, seja na sua origem, seja nos desdobramentos para o desenvolvimento da atividade. A hipótese 1, com base no conhecimento dos alunos sobre a situação, funciona como guia para compreensão do problema. De fato, admitir que há uma regularidade na variação da frequência cardíaca ($H_{1,1}$) seria o primeiro passo para investigar como se comporta a variação desta frequência. Já a formulação de $H_{1,2}$ (Existe relação entre a variação da frequência cardíaca e a distância percorrida pelo corredor) está fundamentada no que os alunos estudaram sobre o fenômeno, vindo a saber que a frequência pode ser descrita de forma direta considerando apenas a distância percorrida (sendo o tempo uma variável considerada de forma implícita neste caso). A sua consequência para o desenvolvimento da atividade seria, entretanto decisiva. Não considerar de forma explícita a variável tempo, traria uma descrição matemática específica, diferente daquela se o tempo fosse também uma variável considerada na situação.

A terceira hipótese, por sua vez, corresponde a uma leitura dos dados coletados. Ela indica o encaminhamento para a construção do modelo matemático. Admitir um comportamento assintótico dos dados foi o que definiu a escolha do modelo matemático para a compreensão da variação dos batimentos cardíacos. O modelo matemático nesse caso é uma construção simbólica e que reflete as relações e características consideradas pertinentes para a situação.

O uso das regras matemáticas para construção dos modelos nesta atividade é pautado nas convenções matemáticas e, neste caso, em um jogo de linguagem cuja certeza se dá no interior de uma comunidade. O uso de regras matemáticas é colocado por Wittgenstein (1996; 2013) como o uso de proposições gramaticais que expressam uma certeza convencionalizada. Assim, a formulação de hipóteses, inicialmente baseada em dados empíricos, conduz à investigação gramatical cujas regras a ser seguidas são certezas matemáticas. O desdobramento que da formulação de uma hipótese é possível à dedução de um modelo matemático, evidencia uma importante característica da atividade matemática: o uso de uma linguagem normativa, regrada e, nas palavras wittgensteinianas ‘gramatical’, que difere, por exemplo, da natureza do uso de hipóteses nas ciências naturais.

As hipóteses formuladas pelos alunos estão associadas à leitura dos dados coletados e expressam um modo de ver a situação a partir de suas experiências prévias, seja com o fenômeno investigado, seja com a investigação de regularidades a partir da tabulação de dados. Em uma abordagem clássica da filosofia wittgensteiniana, os modos de ver e a interpretação são pauta de reflexão. Wittgenstein sugere que o modo de ver, por exemplo, uma figura, um triângulo, é influenciado pelo hábito e pela educação (Wittgenstein, 2013, p. 263). Assim, no contexto acadêmico em que se encontram esses alunos, o olhar para a situação é carregado de experiências e modos de ver oriundos desse contexto. A formulação das hipóteses nesta atividade vem carregada dessas experiências dos alunos.

Os usos da linguagem são decorrência das práticas linguísticas vivenciadas pelos alunos no contexto de um curso de pós-graduação. O fato de uma hipótese indicar aos alunos uma direção ou outra pode estar associado ao que Wittgenstein descreve como hábito em seguir uma regra ou aplicar uma regra, que não são pautados em uma interpretação, pois não é algo privado, mas baseado no treino e na instrução anteriormente recebida (Wittgenstein, 2013, § 201-203). Neste sentido, a formulação de hipóteses coloca os alunos em exercício com regras matemáticas anteriormente apreendidas, mostrando um caminho para a aplicação da regra. O modelo matemático resultante, todavia, possui certo grau de generalidade, ou seja, pode ser útil em situações além daquela para a qual foi construído, fomentando assim a experiência dos alunos.

Na atividade 2, que consiste na análise de um fenômeno com que os alunos se deparam mediante uma imagem e reportagem de revista, a primeira hipótese $H_{2,1}$ (Existe a possibilidade de as riquezas dos 1% mais ricos alcançarem as riquezas dos demais 99% da população) formulada pelos alunos

é uma interpretação dos dados associados à situação e, portanto, um modo de ver a situação da distribuição de riquezas. Essa interpretação determina como a matemática seria usada para a análise da situação, incitando os encaminhamentos que deveriam se firmar na matematização da situação.

Uma vez que os alunos decidiram que um recurso computacional (*software* GeoGebra) seria a ferramenta para mediar a matematização da situação, as hipóteses $H_{2,2}$ (A partir das informações da imagem da figura 3 vamos ajustar aos dados modelos lineares) e $H_{3,2}$ (Vamos supor um comportamento exponencial para as distribuições de riquezas no decorrer do tempo, a partir do ano de 2009) são formuladas com a finalidade de indicar claramente qual matemática usariam para ponderar sobre a distribuição de riquezas. Neste sentido, estas duas hipóteses levam em consideração o comportamento das informações revelado pela imagem da Figura 3. Estas hipóteses, por sua vez, têm uma finalidade distinta da anterior e visam direcionar a formulação do modelo e os processos matemáticos que deveriam nortear a modelagem matemática da situação. Elas se estruturam, a partir de experiências prévias, seja com a matemática, seja com o *software* usado. Assim, ainda que não se possa caracterizar as hipóteses como o que Wittgenstein denomina de certezas fixas, elas também não são formuladas na vagueza e podem ser consideradas como suposições bem fundamentadas, conforme sugere Almeida (2014).

Não obstante esta matematização dos alunos relativa à falta de equidade da distribuição das riquezas, a natureza social e crítica desta situação levou os alunos a ir para além da primeira interpretação e a deliberar sobre a possibilidade preditiva dos modelos matemáticos construídos. Este uso do modelo para previsões foi orientado por uma nova hipótese, $H_{4,2}$ (O comportamento da distribuição das riquezas não vai se alterar bruscamente durante os próximos 10 anos). Essa hipótese denota o interesse dos alunos em ampliar a discussão sobre a situação até então possibilitada, de modo que podemos inferir que essa hipótese é associada a expectativas dos alunos com relação à função do modelo matemático nesta atividade, conforme sugere transcrição de parte de um diálogo entre alunos e professora durante a aula em que se deu desenvolvimento da atividade (A_1 e A_2 são dois alunos do grupo e P é a professora):

P: Mas vocês definiram essa hipótese depois de construir os dois modelos matemáticos?

A_1 : É prof., assim, a gente queria saber como essa situação seria no futuro.

A₂: Como a gente já tinha visto as riquezas de cada grupo da população, a gente queria prever como isso vai continuar...
P: Entendi.

Um olhar analítico sobre a formulação de hipóteses pelos alunos nas duas atividades nos permite ponderar que, ao mesmo tempo em que os alunos se valiam de suas experiências com a situação e com a matemática para formular as hipóteses, elas também funcionaram como a linha diretiva para a leitura ou a investigação dessa situação. Nossa análise nos leva a concluir que os desdobramentos para a atividade de modelagem decorrem de especificidades da situação reconhecidas pelos alunos, de suas experiências pessoais e do seu interesse em, por meio da interlocução entre situação e matemática, apresentar resultados para o que se propuseram a investigar na modelagem matemática. A análise dos desdobramentos que a formulação de hipóteses proporcionou nas duas atividades nos leva a ponderar que podem se caracterizar três categorias relativamente à relevância da formulação de hipóteses nas atividades de modelagem matemática conforme segue.

(1) As hipóteses são formuladas a partir de um modo de ver dos alunos com relação à situação investigada na atividade de modelagem matemática e conduzem, portanto, a uma solução datada e dialógica. Assim, as hipóteses determinam a situação idealizada que vai ser investigada pelos alunos.

(2) As hipóteses são fundamentadas em experiências dos alunos. É com base nesta experiência que os alunos definem hipóteses relativamente a dois aspectos: (a) hipóteses que determinam qual matemática vai ser útil ou necessária e que podem proporcionar a interlocução entre a situação da realidade e a matemática por meio do modelo matemático; (b) hipóteses que determinam os procedimentos e as ferramentas internas à matemática e que irão subsidiar a construção do modelo matemático bem como a sua validação em relação à situação da realidade.

(3) As hipóteses determinam as escolhas dos alunos nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade. Com esta função, as hipóteses direcionam as ações dos alunos. Assim, dados podem ser complementados, impasses, relativos aos procedimentos matemáticos ou relativos às especificidades da situação, são superados e também soluções parciais são revistas e complementadas a partir de hipóteses definidas.

Estes desdobramentos estão associados ao modo de conduzir atividades de modelagem matemática e aos modos de operar com a linguagem no interior

de uma atividade em que, muitas vezes, ocorre a aplicação de regras convencionadas no interior da matemática.

Na medida em que a formulação de hipóteses se dá nas atividades de modelagem matemática, elas expõem o que os alunos veem da situação da realidade e, ao mesmo tempo, promovem que os alunos aprofundem seu estado de informação sobre a situação. Neste sentido, em uma atividade de modelagem matemática, uma hipótese não é como um enunciado que só pode ser comprovado, examinado, verificado, indiretamente através de suas consequências (Abbagnano, 2007). Nem tampouco, uma hipótese em modelagem é uma explicação provisória de um fenômeno devendo ser provada pela experimentação (Japiassú & Marcondes, 2008). Todavia, as hipóteses tem em si uma certeza, como sugere Wittgenstein (2003), e esta certeza se reflete nos resultados da modelagem desenvolvida.

Desse modo, a natureza de uma hipótese em modelagem matemática tem características de uma suposição bem fundamentada, como a denomina Almeida (2014). De fato, o que os dados indicam é que, em alguma medida, as hipóteses determinam qual matemática será usada e como se dará esse uso, conforme se discute em Almeida (2018). O modelador, sobretudo, precisa se prover de informações sobre a situação, sobre a matemática, de modo a garantir que o mecanismo da hipótese funcione, como pondera Wittgenstein (2003), e as regras matemáticas sejam usadas em conformidade com o jogo de linguagem que se configura na atividade de modelagem. Neste sentido o seguir regras a que se refere Wittgenstein (2013), não se desvincula de um domínio de técnicas e o uso de um quadro de referência, como o da matemática, para agir linguisticamente investigando uma situação da realidade.

A validação dos resultados obtidos pelos alunos pode ser elemento que também baliza o funcionamento das hipóteses, pois funciona como critério de correção das técnicas usadas no interior do jogo de linguagem da matemática. Parece ter sido este, por exemplo, o encaminhamento dos alunos para estudar o comportamento dos batimentos cardíacos em corredores submetidos ao teste de Léger e Lambert.

Já na segunda atividade, os alunos, a partir da formulação de hipóteses e da construção dos modelos e seu uso para a análise da situação, puderam experimentar o que Niss (2015) denomina de meta-validação associada ao papel prescritivo de modelos matemáticos. Na modelagem matemática em que os modelos se propõem a sustentar previsões com relação à situação investigada o que se deseja é “identificar possibilidades de transformar o mundo ao invés de apenas entendê-lo” (Niss, 2015, p. 69). No caso da atividade da distribuição

das riquezas esta meta-validação, analisando consequências dos resultados obtidos pelo modelo, levou os alunos a formular uma nova hipótese ($H_{4,2}$ O comportamento da distribuição das riquezas não vai se alterar bruscamente durante os próximos 10 anos) e ampliar a sua discussão relativamente à questão social e política imersa nesta situação.

A meta-validação dos alunos não desqualifica regras matemáticas anteriores usadas pelos alunos. No interior de atividades de modelagem matemática a aplicação das regras se dá em um contexto específico de uso e, neste caso, as hipóteses exercem um papel de guia para o modo como a regra matemática será aplicada naquele contexto. Novas hipóteses podem conduzir ao uso de outras regras ou mesmo a outro uso da mesma regra.

Em outras palavras, no que se refere à matematização das situações, a formulação das hipóteses delimita uma situação idealizada, como caracterizada por Stillman *et al.* (2015) e por Djepaxhija *et al.* (2015), a partir da situação real de modo que as hipóteses estabelecem condições para que possa ser dada uma roupagem matemática à situação. Neste sentido, as hipóteses são uma interpretação pública do emprego de técnicas matemáticas que faz sentido em determinado contexto, em consonância com Wittgenstein (2013).

As hipóteses, além de uma demanda contextual considerando a situação da realidade e a matemática, como sugerem Galbraith e Stillmann (2001), também requereram dos alunos meios de elucidar a interlocução que pretendiam, valendo-se de regras da matemática para interpretar a realidade por meio de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos assim construídos, todavia, foram acordados dentro da forma de vida dos alunos de modo que não se pode decidir sobre modelos matemáticos verdadeiros ou modelos matemáticos falsos, como já sugere Bassanezi (2002).

Isso nos leva a afirmar que as atividades de modelagem matemática têm um encaminhamento em consonância com as hipóteses em que se fundamentam. Novas experiências dos modeladores podem conduzir a novas hipóteses, a novos modos de ver e de compreender, por meio da matemática, uma situação da realidade.

Assim, como está acordado na ciência em geral, também no jogo de linguagem da modelagem matemática não faz sentido falarmos de hipóteses verdadeiras ou hipóteses falsas, mas de hipóteses como fatores que indicam direções e guiam o modelador. Neste jogo de linguagem as hipóteses sinalizam modos de ver, de interpretar ou de apontar estratégias de intervenção sobre as

situações. Assim, “A hipótese é uma maneira de perceber a realidade, pois uma nova experiência pode coincidir com ela ou não...” (Wittgenstein, 2003, p. 169).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação dos desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses foi mediada por uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por dois grupos de alunos de dois cursos distintos. O processo analítico dessas atividades se fundamenta, para além de pesquisas da área de Educação Matemática que tratam da temática, em elementos da filosofia da linguagem de Wittgenstein e suas repercussões na Educação Matemática.

A análise empreendida, relativa às atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos dois grupos, permite considerar que a formulação de hipóteses pelos alunos sinaliza um modo de ver dos alunos, vem ancorada em suas experiências e fornece elementos para as ações posteriores. Assim, alterações nas hipóteses transformam as ações e o constructo conceitual delas resultante bem como a compreensão da situação em estudo.

A perspectiva wittgensteiniana usada no artigo nos leva a apontar que a hipótese é uma maneira de perceber a realidade e não se estabiliza em um estado de dúvida completo. Assim, se em atividades de modelagem matemática a necessidade da formulação de hipóteses visa suprir alguma falta de informação sobre a situação, ela também não é livre do uso das informações que o modelador tem sobre a situação.

A identificação das categorias relativamente aos desdobramentos da formulação de hipóteses para o desenvolvimento de atividades de modelagem, ao mesmo tempo em que elucida o papel que esta formulação tem no desenvolvimento dessas atividades, é um resultado ainda não encontrado na literatura e que pode, em alguma medida, orientar professores quando da inclusão de atividades de modelagem em suas aulas, dando atenção a relevância desta formulação.

Na pesquisa empírica que deu suporte a este artigo consideramos grupos de alunos distintos envolvidos com atividades de modelagem matemática para situações distintas. Neste sentido, as experiências dos alunos também eram diversas. Pesquisas futuras podem alterar este quadro e obter resultados sobre a influência das experiências pessoais específicas sobre a formulação de hipóteses.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com fomento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq relativamente ao financiamento do projeto de pesquisa Modelagem Matemática à Luz da Filosofia de Linguagem de Wittgenstein, coordenado pela primeira autora do artigo.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

LMWA foi a professora das disciplinas em que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas. Em parceria, os três autores se apropriaram dos fundamentos teóricos do artigo, realizaram a coleta de dados e sua análise. O texto também foi redigido de forma conjunta e colaborativa.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, LMMA, mediante solicitação adequadamente justificada.

REFERÊNCIAS

- Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. Martins Fontes.
- Almeida, L. M. W. (2014). The ‘Practice’ of Mathematical Modeling Under a Wittgensteinian Perspective. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 98-113.
- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, 50(1), 19-30.
- Almeida, L. M. W. & Vertuan, R. E. (2011). Registros de representação semiótica em atividades de Modelagem matemática: uma categorização das práticas dos alunos. *Unión (San Cristobal de La Laguna)*, 25, 109-125.
- Almeida, L. M. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *A modelagem matemática na educação básica*. Contexto.

- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Contexto.
- Bean, D. (2001). O que é modelagem matemática? *Educação Matemática em Revista*, 8(9/10), 49-57.
- Bean, D. (2012). As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: *Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, SBEM, (p. 1-22).
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 22(1), p. 37-68.
- Chang, Y. P., Krawitz, J., & Schukajlow, S. (2018). Comparing German and Taiwanese secondary school students' knowledge in solving mathematical modelling tasks requiring their assumptions. *ZDM*, 52, 59–72.
- Djepaxhija *et al.* (2015). Exploring grade 9 students' assumptions making when mathematizing. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*. (p. 848-854).
- Duarte, M. F. S., & Duarte, C. R. (2001). Validade do teste aeróbico de corrida de vai-e-vem de 20 Metros. *Revista Brasileira de Ciências e Movimento*, 9(3), 7-14.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2001). Assumptions and Context: Pursuing their role in modelling activity. In J. Matos, W. Blum, K. Houston, & S. Carreira (Eds), *Proceedings of the Modelling and Mathematics Education ICTMA 9: Applications in science and technology*. (p. 300–310).
- Grigoraş, R. (2012). Mathematizing through hypotheses and assumptions. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, COEX, Seoul, Korea, 1-10.
- Houaiss, A. (2009). *Grande dicionário da língua portuguesa*. Objetiva.
- Japiassú, H., & Marcondes, D. (2008). *Dicionário Básico de Filosofia*. 5.ed. Zahar.

- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.
- Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285-311.
- Meyer, J. F. C., Malheiros, A. P., & Caldeira, A. D. (2011). *Modelagem em educação matemática*. Autêntica.
- Moreno, A. R. (2003) Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. *Revista olhar*, 4(7), 93-139.
- Niss, M. (2010). Modelling a crucial aspect of students' mathematical modelling. In R. Lesh *et al.* (Eds.), *Proceedings of the Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies (ICTMA 13)*. (p. 43–60). Springer.
- Niss, M. (2015). Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*. (p. 161-171). Springer.
- Pollak, H. O. (2015). The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: Stillman, G., Blum, W., & Biembengut, M. S. (Eds.) *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences*. (p. 265-276), Springer.
- Seino, T. (2005). Understanding the role of assumptions in mathematical modelling: Analysis of lessons with emphasis on the 'awareness of assumptions'. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the Building connections: Research, theory and practice (MERGA 28)*, 2. (p. 664–671).
- Stillman, G.A., Brown, J. P., & Geiger, V. (2015). Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*. (p. 93–104). Springer.
- Wittgenstein, L. (1996). *Remarks on the foundations of mathematics*. The MIT Press.
- Wittgenstein, L. (2003). *Gramática filosófica*. Loyola.

Wittgenstein, L. (2013). *Investigações Filosóficas*. 8. ed. Vozes.