ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6543

Modelagem matemática e os momentos didáticos

Gleison de Jesus Marinho Sodré [a]

[a] Universidade Federal do Pará (UFPA), Escola de Aplicação da UFPA, Belém, PA, Brasil

Recebido para publicação 30 mar. 2021. Aceito, após revisão, 23 abr. 2021
Autor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: a prática de modelagem matemática para a formação docente no contexto da teoria antropológica do didático. **Objetivo**: evidenciar os momentos didáticos anunciados pela teoria antropológica do didático no processo de estudo de problemas em contextos concretos em modelagem matemática. **Design**: para isso, foi realizado um percurso de estudo e pesquisa orientado a partir de ferramentas teórico-metodológicas da teoria antropológica do didático. **Ambiente e participantes**: professores em formação de um curso de licenciatura de uma instituição pública a partir do enfrentamento de um problema de aplicação em poupança. **Coleta e análise de dados**: a partir de um recorte empírico desenvolvido por Sodré (2019) com professores em formação. **Resultados**: os elementos encontrados na empiria confirmam a hipótese que independente do percurso realizado no processo de modelagem um ou mais momentos didáticos é/são realizado(s). **Conclusões:** em última análise, o estudo de problemas em contextos concretos além de evidenciar o encontro dos professores com diferentes momentos didáticos, revelou a notável dependência entre os saberes matemáticos e não matemáticos que nos estimulam a futuras investigações.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Momentos Didáticos; Teoria Antropológica do Didático.

Mathematical modeling and didactic moments

ABSTRACT

Background: the practice of mathematical modelling for teacher education in the context of the anthropological theory of didactics. **Objective:** to highlight the didactic moments announced by the anthropological theory of didactics in the process of studying problems in concrete contexts in mathematical modelling. **Design:** For this purpose, a study and research course was conducted based on theoretical and methodological tools of the didactic anthropological theory. **Setting and Participants**: teachers in formation of a degree course in a public institution from the face of a problem of application in savings. **Data collection and analysis**: from an empirical

Autor correspondente: Gleison De Jesus Marinho Sodré. Email: profgleisoneaufpa@gmail.com

approach developed by Sodré (2019) with teachers in training. **Results:** the elements found in empirics confirm the hypothesis that regardless of the path taken in the modelling process, one or more didactic moments is/are performed. **Conclusions:** in the final analysis, the study of problems in concrete contexts, in addition to showing the encounter of teachers with different didactic moments, revealed the remarkable dependence between mathematical and non-mathematical knowledge, which stimulate us to future investigations.

Keywords: Mathematical Modelling; Didactic Moments; Anthropological Theory of Didactics.

Modelado matemático y momentos didácticos

RESUMEN

Contexto: la práctica de la modelización matemática para la formación del profesorado en el contexto de la teoría antropológica de la didáctica. **Objetivo:** destacar los momentos didácticos anunciados por la teoría antropológica de la didáctica en el proceso de estudio de problemas en contextos concretos en la modelización matemática. **Diseño:** Para ello, se llevó a cabo un curso de estudio e investigación basado en herramientas teóricas y metodológicas de la teoría antropológica de la didáctica. **Escenario y participantes:** docentes en formación de una carrera de grado en una institución pública ante un problema de aplicación en el ahorro. **Colección y análisis de datos:** desde un enfoque empírico desarrollado por Sodré (2019) con docentes en formación. **Resultados:** los elementos encontrados en la empírica confirman la hipótesis de que independientemente del camino recorrido en el proceso de modelado, se realizan uno o más momentos didácticos. **Conclusiones:** en el análisis final, el estudio de problemas en contextos concretos, además de mostrar el encuentro de profesores con diferentes momentos didácticos, reveló la notable dependencia entre conocimientos matemáticos y no matemáticos, lo que nos estimula a futuras investigaciones.

Palabras clave: Modelado matemático; Momentos didácticos; Teoría Antropológica de la Didáctica.

INTRODUÇÃO: UM BREVE PANORAMA SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA

Independente da corrente teórica adotada sobre a noção de modelagem matemática, MM daqui em diante, na perspectiva da educação matemática, uma questão importante tratada com veemência nas Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações, doravante ICTMA, é

"Como podemos ensinar modelagem?"[1] (Schukajlow, Kaiser, & Stillman, 2018, p. 11, tradução nossa).

Nesse sentido,

> Um ponto de partida bastante comum em linhas de investigação é o que Gascón (2011) denomina de problema docente de modelagem matemática. Segundo García, Gascón, Ruíz-Higueras e Bosch (2006), as duas formulações mais frequentes do problema são: como ensinar modelagem matemática? e como ensinar matemática por meio de modelagem?[2] (Florensa, Garcia, & Sala, 2020, p. 22, tradução nossa).

Embora as pesquisas sobre o ensino de MM, entre eles, Borromeo Ferri (2006), Blum e Borromeo Ferri (2009), Perrenet e Zwaneveld (2012), Blum (2015), Greefrath e Vorhölter (2016), Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß e Schukajlow (2019) e Barquero e Jessen (2020), destaquem de modo quase dominante a técnica didática dos ciclos de MM com propósito de minimizar a complexidade existente no processo de MM, é preciso considerar que essa técnica dos ciclos na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD, está passível de ser questionada, conforme destacam García, Gascón, Ruiz Higueras e Bosch (2006), Bosch, García, Gascón e Ruiz Higueras (2006), Sodré e Guerra (2018), Sodré (2019) e Sodré e Oliveira (2021), mas sem a pretensão de criticá-lo, ao dotá-lo de arcabouços teóricos sólidos que permitam melhor compreendê-lo e, se possível, torná-lo mais acessível ao ensino e aprendizagem da MM.

Nessa linha de pensamento, Sodré e Guerra (2018) e Sodré (2019) propuseram o *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática*, doravante CIMM, "como metodologia de desenvolvimento e análise de modelos matemáticos de situações em contextos concretos" (Sodré & Guerra, 2018, p. 253) que deve "ser entendido sempre como relativo e provisório, aberto a questionamentos e revisão, e pertinente na medida em que seja rico para a

---

[1] Fragmento do texto: Como podemos ensinar modelagem?

[2] Fragmento do texto: Un punto de partida bastante común en las líneas de investigación es lo que Gascón (2011) denomina el problema docente de la modelización matemática. Según García, Gascón, Ruíz-Higueras y Bosch (2006), las dos formulaciones más frecuentes del problema son: ¿cómo enseñar modelización matemática? y ¿cómo enseñar matemáticas a través de la modelización?

identificação de fenômenos didáticos e formulação de problemas didáticos”[3] (García, Barquero, Florensa, & Bosch, 2019, p. 78, tradução nossa).

O CIMM (Sodré & Guerra, 2018; Sodré, 2019; Sodré & Oliveira, 2021) parafraseado a partir dos três gêneros de tarefas genuínas da atividade matemática anunciadas por Chevallard, Bosch e Gáscon (2001): *utilizar a matemática conhecida*, *aprender (e ensinar) matemática* e *criar uma matemática nova*, deve ser encaminhado de modo sequencial pelo diretor de estudos ou professor de uma classe, conforme orientam os seguintes gêneros de tarefas reconstruídos a partir de Sodré (2019):

> **G_1**: Usar modelos matemáticos socialmente legitimados para situações em contexto sociais para responder a questionamentos sobre essas situações, destacando a relação associativa entre situações em contextos e os modelos matemáticos;
>
> **G_2**: Estudar um modelo matemático frente a diferentes situações e contextos, bem como estudar uma situação em contexto concreto frente a diferentes modelos matemáticos;
>
> **G_3**: Criar um modelo matemático associado a uma nova situação a partir de estudo de situações e seus modelos matemáticos associados, tendo em conta as analogias ou homologias entre essas situações e a nova situação.

Sob esse viés, assumimos esses três gêneros de tarefas aqui “compreendido como um Modelo Epistemológico de Referência Orientado para o ensino de MM escolar a partir do estudo de situações em contextos concretos que se desdobraram no estudo de outras situações” (Sodré, 2019, p. 121), tendo em conta o que destaca Gascón (2014), sobre a necessidade de o pesquisador ou o professor questionarem os *Modelos Epistemológicos de Referências* explícitos ou não sobre a atividade institucional. Os modelos epistemológicos em geral, são produtos de um saber teórico ou prático, que orientam a prática do professor ou pesquisador em um meio institucional.

> Um fato característico e diferenciador das investigações da TAD sobre os processos de modelagem matemática é o papel do modelo epistemológico de referência do âmbito a ensinar. Este modelo é uma reconstrução explícita e alternativa (à

[3] Fragmentos do texto: Ser entendidos siempre como relativos y provisionales, abiertos a cuestionamiento y revisión, y pertinentes en la medida en que sean fértiles para la identificación de fenómenos didácticos y la formulación de problemas didácticos.

> organização do conhecimento escolar) do conhecimento a ser ensinado[4] (Florensa, Garcia, & Sala, 2020, p. 23, tradução nossa).

É preciso ratificar, em todo caso, que o MER deve ser "entendido como uma hipótese dos pesquisadores que deve ser enriquecida e validada com o desenho, experimentação e análise dos processos de estudo" (Ibidem).

De qualquer modo, vale destacar que a noção de MM na perspectiva da TAD se sustenta de modo dominante:

> Vinculada à noção de atividade matemática desde os primeiros desenvolvimentos deste quadro de investigação, quando se assume que fazer matemática consiste essencialmente na atividade de produzir, transformar, interpretar e desenvolver modelos para ser capaz de fornecer respostas a certas questões problemáticas[5] (Florensa, Garcia, & Sala, 2020, p. 23, tradução nossa).

Ainda segundo Florensa, Garcia e Sala (2020), outras investigações na linha da TAD sobre o ensino de MM ampliam as descrições iniciais propostas por Chevallard (1989) e Gascón (1994), em particular, as investigações de Bolea (2002), García, Gascón, Ruiz Higueras e Bosch (2006), Barquero (2009), Fonseca, Gascón e Oliveira (2014) que passam a interpretar os processos de MM a partir da estruturação e desenvolvimento articulado de "praxeologias matemáticas cada vez mais complexas" (Florensa, Garcia, & Sala, 2020, p. 23, tradução nossa), com a ênfase ao papel da atividade matemática.

No entanto, nossos pressupostos assumidos a partir de Sodré e Guerra (2018), Sodré (2019) e Sodré e Oliveira (2021), embora sigam elementos da TAD, afastam-se da perspectiva da MM enquanto organização praxeológica de complexidade crescente, ao considerar que "as atividades de MM escolar não se resumem à aplicação de saberes matemáticos, uma vez que essas atividades

---

[4] Fragmento do texto: Un hecho característico, y diferenciador de las investigaciones desde la TAD sobre los procesos de modelización matemática, es el papel del modelo epistemológico de referencia del ámbito a enseñar. Este modelo es una reconstrucción explícita y alternativa (a la organización del saber escolar) del saber a enseñar.

[5] Fragmentos do texto: vinculada a la noción de actividad matemática desde los primeros desarrollos de este marco de investigación, cuando se asume que hacer matemáticas consiste esencialmente en la actividad de producir, transformar, interpretar y hacer evolucionar modelos matemáticos para poder aportar respuestas a ciertas cuestiones problemáticas.

são condicionadas por outros saberes, práticos e teóricos não matemáticos, que condicionam e são condicionados por saberes matemáticos” (Sodré, 2019, p. 90).

De outro modo, “os saberes não matemáticos articulados e integrados aos saberes matemáticos é que permitem o reconhecimento da situação com matemática relativa ao tipo de problema em contexto (Sodré & Guerra, 2018, p. 259). Sob esse olhar, o desenvolvimento das práticas de MM que permite a articulação e integração de saberes, matemático e não matemáticos pode, inclusive, evidenciar aspectos importantes do processo de MM, em particular, a noção de situação, o modelo matemático, a escolha do método ou técnica para enfrentar o modelo e, não menos importante, em estreita relação com o uso de computadores ou calculadoras para tornar possível a realização de uma prática como alertam Guerra e Silva (2009).

> Nesse pensar, a modelagem não se restringe à formulação do modelo M e à interpretação de uma solução para a situação S, mas também da adequação ou criação de um método P, pois, um modelo sem método não útil por não prover uma solução para a situação e, por outro lado, o método pode não ser útil frente a um modelo já validado para um tipo de situação S por não produzir soluções coerentes para o contexto específico da situação (Guerra & Silva, 2009, p. 110).

Nesse sentido, o processo de estudos em MM, incluindo os aspectos situacionais, o modelo matemático, a escolha da técnica para enfrentar esse modelo e o uso ou não de calculadoras e/ou computadores com o propósito de *desmagificar* (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2006) a situação em contexto pode, em todo caso, evidenciar uma interdependência entre a quádrupla – {*situação / modelo matemático / método / máquina*}, nem sempre visível no estudo de problemas em contextos, deixando parecer que a desejável aplicação de saberes matemáticos, por exemplo, pode ser suficiente para a compreensão de um problema em contexto, sem, entretanto, considerar que “o processamento de um problema real com métodos matemáticos é limitado, pois a complexidade da realidade não pode ser traduzida completamente em um modelo matemático” [6] (Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß, & Schukajlow, 2019, p. 101, tradução nossa).

---

[6] Fragmento do texto: the processing of a real problem with mathematical methods is limited, as the complexity of reality cannot be translated completely into a mathematical model.

Pressupomos que a realização do processo de MM, independente do percurso em um contexto das práticas institucionais “gestos de estudos” (Chevallard, 1999), são manifestados, isto é, “*chega-se necessariamente a um momento* em que este ou aquele "gesto de estudo" deve ser cumprido” (Chevallard, 1999, p. 241, grifos do autor, tradução nossa), tendo em vista que todo gesto de estudo “visa, direta ou indiretamente, ou através de condições que se destinam a criar ou modificar, a existência e o funcionamento de um sistema didático (ou de uma categoria de sistemas didáticos)”[7] (Chevallard, 2009, p. 16, tradução nossa).

Com esse olhar, Fonseca, Gascón e Oliveira (2014) destacam que diferentes *momentos didáticos* podem emergir durante o processo de MM, em particular, o *momento exploratório, o trabalho da técnica, o tecnológico-teórico e o da avaliação* (Fonseca, Gascón, & Oliveira, 2014, p. 296), anunciados “como ferramenta para realizar a análise concreta de organizações didáticas observáveis”[8] (Bosch & Gascón, 2010, p. 76, tradução nossa) que podem ser vivenciados por uma classe, por exemplo, durante o estudo de um problema em contexto concreto.

Chevallard (1999) acrescenta:

> Seja qual for o percurso de estudo, certos *tipos de situações* estão necessariamente presentes, ainda que de forma bastante variável, tanto qualitativa como quantitativamente. A estes tipos de situações chamaremos *momentos de estudo ou momentos didáticos* porque se pode dizer que, seja qual for o caminho percorrido, *chega-se necessariamente a um momento* em que este ou aquele "gesto de estudo" deve ser cumprido: onde, por exemplo, o aluno deve “corrigir” os elementos elaborados (momento de institucionalização); onde deve ser perguntado "o que vale" o que foi construído até então (momento da avaliação); etc. (Chevallard, 1999, p. 241, grifos do autor, tradução nossa).

De acordo com Chevallard (1999) os seis momentos didáticos não seguem o caráter da estrutura temporal do processo de estudos e podem ser

---

[7] Fragmento do texto: vise, directement ou indirectement, à travers la ou les conditions qu’il s’efforce de créer ou de modifier, l’existence et le fonctionnement d’un système didactique (ou d’une catégorie de systèmes didactiques).

[8] Fragmento do texto: como herramienta para llevar a cabo el análisis concreto de las organizaciones didácticas observables.

vivenciados por várias vezes, dependendo do tipo de situação enfrentada. Portanto, antes de ser uma realidade cronológica, os seis momentos são em primeiro lugar, uma realidade *funcional* do estudo (Chevallard, 1999, p. 242, grifo do autor), que aqui interpretamos nos seguintes termos:

- **Momento do primeiro encontro** – **MD_1:** faz referência ao encontro ou reencontros com a organização praxeológica ou a algum de seus componentes ou ainda a uma questão problemática Q que essa praxeologia pode contribuir para responder;
- **O segundo momento – MD_2:** é o exploratório dos tipos de tarefas T_i e da elaboração de técnicas relativas a esse tipo de tarefas, pois, segundo Chevallard (1999), o que está no coração da atividade matemática é mais a elaboração de técnicas do que propriamente a resolução de problemas isolados. Ou seja, estudar certos tipos de problemas é um meio que permite criar e colocar em jogo uma técnica relativa ao problema do mesmo tipo;
- **O terceiro momento – MD_3:** é o *do questionamento tecnológico-teórico* relativo à técnica utilizada para responder aos tipos de tarefas. De outro modo, é o "discurso" empreendido sobre a técnica, mas que está em estreita relação com os cada um dos demais momentos **MD_1** e **MD_2**;
- **O quarto momento – MD_4**: é o momento *do trabalho da técnica*, em que o uso de uma ou mais técnicas rotineiras podem se mostrar limitadas para responder a determinadas problemáticas e, com isso, demandar a construção de uma nova técnica de maior alcance. Esse trabalho da técnica deve continuar até que alunos ou professores atinjam um domínio mais robusto do conjunto de técnicas disponíveis. Esse momento didático completa de algum modo o momento exploratório. A escolha de uma técnica, conforme Chevallard (1999), a mais eficaz e confiável, exige-se observar o discurso da tecnologia elaborado até então;
- **O quinto momento – MD_5**: é o momento da institucionalização que tem por objetivo destacar o que é a organização praxeológica até então elaborada, sem se referir a aspectos isolados dessa organização, mas que qualquer um de seus componentes deve fazer referência mais ou menos explícita da organização em sua totalidade;

- **O sexto momento - MD_6:** Consiste na *avaliação* que permite "fazer o balanço", segundo Chevallard (1999), o que inclui avaliar o que foi construído até então acerca da organização praxeológica e, com isso, colocar à prova sobre o domínio de uso da praxeologia, que aqui pode ser compreendido pelo uso adequado ou não de modelos matemáticos em situação frente às problemáticas que podem emergir durante o processo de estudos.

Dessa feita, pressupomos que o estudo de problemas em contextos concretos e, de maneira mais inclusiva, orientado pelos gêneros de tarefas descritas por $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$, sob a direção de um diretor de estudos ou professor em sala de aula, diferentes *momentos didáticos* como pressupõe Fonseca, Gascón e Oliveira (2014) podem ser evidenciados, incluindo a própria atividade matemática como desejado por Florensa, Garcia e Sala (2020), como parte integrante e indispensável do processo de MM.

A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Com base nesses pressupostos supracitados e considerando que o estudo de problemas em contextos concretos como desejável no ensino escolar, independente do percurso tomado por alunos ou professores, por exemplo, pode encaminhar ao encontro de momentos didáticos (Chevallard, 1999), não necessariamente todos, mas que podem se revelar potencialmente no conjunto de condições no sentido da TAD, criadas pelo professor ou investigador frente a uma *comunidade de estudos*[9].

Nesse sentido, a ratificação ou não de nossa hipótese nos encaminha ao encontro da seguinte questão de investigação:

De que maneira o estudo de problemas em contextos concretos em MM evidencia os momentos didáticos anunciados pela TAD?

Assim, objetivamos evidenciar os *momentos didáticos*, nem todos talvez, sobre o estudo de problemas em contextos concretos, especificamente, a partir da proposição do *Percurso de Estudos e Pesquisa Orientado* encaminhado por Sodré (2019) como dispositivo didático para o ensino e aprendizagem da MM, a ser descrito a seguir.

---

[9] Neste texto, a expressão comunidade de estudo refere-se aos alunos e ao professor em sala de aula.

METODOLOGIA

Nesta investigação, assumimos a noção de *Percurso de Estudos e Pesquisa Orientado* encaminhado por Sodré (2019), fundamentado nos recursos teórico-metodológicos da TAD, mais precisamente, a partir da noção de *Percurso de Estudos e Pesquisa* (Chevallard, 2004, 2005, 2013, 2019), daqui em diante PEP, que sob o paradigma de questionamento do mundo toma sua forma concreta, chamando para si os saberes disciplinares e não disciplinares, que podem se mostrar úteis, senão indispensáveis ao uso, ao estudo e, eventualmente, à aprendizagem, e até mesmo, à criação de modelos matemáticos sobre situações em contextos concretos.

O PEP, segundo destacam Ladage e Chevallard (2010), é vinculado ao surgimento do paradigma de questionar o mundo frente ao paradigma escolar dominante, em que neste último, "o professor visita vários 'monumentos' que apresenta e comenta aos alunos"[10] (Ladage & Chevallard, 2010, p. 2, tradução nossa). Em contrapartida, no paradigma de questionamento de mundo "o que importa não é tanto o que o aluno saberá *com antecedência*, mas o que ele será capaz de aprender *com sua investigação*, a fim de até avançar"[11] (Ibidem, p. 2, grifos dos autores, tradução nossa).

Em geral, um PEP é encaminhado a partir de *questionamentos indeterminados* Q_i que são respondidos por *questionamentos determinados* Q_{ij} durante a investigação (Chevallard, 2009), o que "pode conduzir uma classe a reencontrar um complexo de obras que podem variar dependendo do percurso tomado (o que depende da atividade de X, das decisões de Y, mas também dos recursos praxeológicos $R_i^\lozenge$ e O_j atualmente acessíveis)"[12] (Chevallard, 2009, p. 28, tradução nossa), que pode ser modelado pela noção de sistema didático principal S(X, Y, Q) passível de produzir ou não sistemas didáticos auxiliares para construir respostas fortes.

[10] Fragmento do texto: le professeur conduit la visite de différents « monuments » qu'il présente et commente aux étudiants.
[11] Fragmentos do texto: Ce qui importe n'est pas tant ce que l'étudiant saurait à l'avance que ce qu'il pourra apprendre par son enquête en vue même de la faire avancer.
[12] Fragmento do texto: Une même question Q peut ainsi conduire une classe à rencontrer un complexe d'œuvres qui peut varier selon le parcours emprunté (lequel dépend de l'activité de X, des décisions de y, mais aussi des ressources praxéologiques R ◊ i et Oj actuellement accessibles).

Nesse sentido, “uma questão com um sentido forte, uma resposta com um sentido forte: a resposta agora não é uma simples informação, *é toda uma organização praxeológica que ainda está por ser construída*”[13] (Chevallard, 1999, p. 233, grifos do autor, tradução nossa) e, como tal, o cumprimento de um PEP “completo”, de acordo com Chevallard (2013, p. 3, grifos do autor, tradução nossa):

> Supõe a realização de *cinco "gestos" básicos*, que são cinco tipos de tarefas H_i que são consubstanciais com a situação investigativa e que podem ser formuladas da seguinte forma:
>
> H_1. *Observe* as respostas $R^{\lozenge}$ que vivem nas instituições.
>
> H_2. *Analise*, em particular, no duplo plano experimental e teórico essas respostas $R^{\lozenge}$.
>
> H_3. *Avalie* essas mesmas respostas $R^{\lozenge}$.
>
> H_4. *Desenvolva* uma resposta própria $R^{\heartsuit}$.
>
> H_5. *Difunda e defenda* a resposta $R^{\heartsuit}$ assim produzida.

Para Chevallard (2013), a técnica que consiste em realizar esses tipos de tarefas de maneira coordenada não segue necessariamente uma lógica linear, mas “como um processo de estudo e investigação a partir de uma *epistemologia funcional dos saberes*”[14] (Bosch & Gascón, 2010, p. 86, grifos dos autores, tradução nossa).

Preservando essas características do PEP, Sodré (2019) propôs o *PEP Orientado* considerando os três gêneros de tarefas $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$, que cabe ao *topos* do diretor ou do professor orientador de estudo e, portanto, não está ao alcance dos alunos, do mesmo modo que é pressuposto no desenvolvimento de qualquer PEP.

Considerando os três gêneros de tarefas $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$, estes devem de forma mais inclusiva encaminhar os estudos, e, com isso, Sodré (2019, p. 96) destaca que o PEP orientado “não se confunde com o PEP quando destituído

---

[13] Fragmento do texto: A cuestión en sentido fuerte, respuesta en sentido fuerte: la respuesta no es ahora una simple información, es toda una organización praxeológica que está por construir.

[14] Fragmentos do texto: Como un proceso de estudio e investigación basado en una epistemología funcional de los saberes.

de qualquer orientação a priori, mesmo que restrita ao *topos* do diretor de estudo".

Sob essa compreensão e com propósito de melhor compreender seu funcionamento em ato, encaminhamos o recorte de uma empiria realizada por Sodré (2019), de modo a nos prover de respostas que podem de algum modo, evidenciar os *momentos didáticos* vividos por uma comunidade de estudos, constituída por cinco professores[15] em formação de uma universidade pública a partir de problemas em contextos concretos.

Especificamente, tomamos o seguinte recorte do problema descrito por Sodré (2019, p. 114):

> ***Q₁₄*** *- Qual o valor fixo a ser depositado mensalmente em uma poupança, ao considerar a taxa de 0,5% ao mês, para obter ao final de 12 (doze) meses, o montante de R$ 3.000,00 necessários para comprar um aparelho eletrônico?*

As análises dos dados empíricos e os resultados encontrados a seguir consideram as práticas manifestadas pelos professores frente às situações enfrentadas, sob o postulado base da TAD que leva em conta a ação humana em situação.

Desse modo, os professores foram organizados em dois grupos que aqui representamos simbolicamente, a partir da modelagem teórica de dois sistemas didáticos auxiliares descritos por: $\boldsymbol{S_1 (x_1, x_3, x_4, Q_{14})}$ e $\boldsymbol{S_2 (x_2, x_5, Q_{14})}$. Neste caso específico, os sistemas didáticos auxiliares derivaram do sistema didático principal: $\boldsymbol{S_i}$ $(\mathbf{X, Y, Q_{14}})$, em que $\mathbf{X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}}$ simboliza o conjunto dos professores que participaram do percurso de estudos, **Y** o diretor de estudos, aqui compreendido pelo pesquisador e $\mathbf{Q_{14}}$ a questão a ser respondida pela comunidade de estudo.

[15] A formação dos professores se deu no contexto de um projeto institucional pelo Programa de Apoio a Projetos de Intervenção Metodológica (PAPIM) da Pró-Reitoria de Ensino de Graduação (PROEG) da Universidade Federal do Pará. Nesse sentido, os registros dos professores aqui manifestados não explicitam as suas identidades, suas imagens e vozes, zelando-se assim pela dignidade e devida proteção aos participantes da pesquisa científica. Por essa razão, não foi solicitada prévia avaliação ética pelos conselhos adequados do projeto de pesquisa de que o trabalho decorre. Assim, assumimos e eximimos a Acta Scientiae de quaisquer consequências daí decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa, conforme orienta a Resolução Nº 510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil.

ANÁLISES DOS DADOS EMPÍRICOS E RESULTADOS ENCONTRADOS

A partir da tarefa $\mathbf{H_5}$ do PEP e orientado pelos gêneros de tarefas $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$ (Sodré, 2019) que inclui as demais tarefas $\boldsymbol{H_i}$ do PEP, cada sistema didático $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ defendeu suas respostas seguindo a realização das demais tarefas do PEP, isto é, $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$ e $\mathbf{H_4}$, diante da comunidade de estudos.

> Vale destacar que os dados empíricos desta investigação foram coletados a partir dos registros fotográficos conceituais revelados pelos sistemas didáticos tanto no processo de estudos quanto na fase de difusão e defesa das respostas obtidas, além é claro, dos diários de bordos dos pesquisadores, com o propósito de melhor coletar e apontar as manifestações espontâneas dos sistemas didáticos (Sodré & Oliveira, 2021, p. 44).

Quanto à delimitação do processo de estudos empreendido pelos sistemas didáticos auxiliares, $\boldsymbol{S_1 (x_1, x_3, x_4, Q_{14})}$ e $\boldsymbol{S_2 (x_2, x_5, Q_{14})}$, cujo caminhar se orientou pelo estudo de um problema em contexto concreto de domínio da matemática financeira escolar, é preciso ter em conta que os modelos matemáticos das práticas sociais das instituições financeiras afins ou bancos, por exemplo, são definidos a priori, segundo destaca Chevallard (1989), pois:

> Alguns dos sistemas que se deseja estudar estão sujeitos a leis objetivas, que não dependem da vontade dos homens. É o caso dos fenômenos físicos e, de maneira mais geral, dos fenômenos estudados pelas ciências naturais. Por outro lado, certos sistemas, criação da cultura, são explicitamente regulados, às vezes de maneira muito precisa, por convenções sociais. É o caso das transações financeiras, empréstimos de capitais, etc., práticas sociais que são *definidas a priori por um modelo matemático* [16] (Chevallard, 1989, p. 28, grifos do autor, tradução nossa).

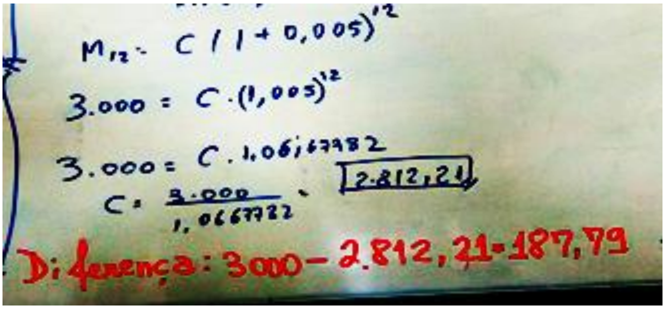
[16] Fragmento do texto: Certains des systèmes que l'on peut vouloir étudier sont soumis à des lois objectives, qui ne dépendent pas de la volonté des hommes. C'est le cas des phénomènes physiques et, plus généralement, des phénomènes qu'étudient les sciences de la nature. En revanche, certains systèmes, création de la culture, sont explicitement réglés, de manière parfois fort précise, par convention sociale. C'est le cas des

O extrato de texto revela que os modelos matemáticos, inclusive os que são utilizados pelas instituições financeiras afins, são criações da cultura humana, isto é, podem ser dotados de interesses e intenções que nem sempre se mostram visíveis aos usuários desses modelos e, com isso, mostram-se como saberes necessários à sociedade e, em consequência, ao ensino escolar e para formação de professores, conforme alerta Sodré (2019).

Especificamente, a problemática $\boldsymbol{Q_{14}}$ enfrentada pelos sistemas didáticos auxiliares, mais precisamente sob a orientação dos gêneros de tarefas $\mathbf{G_1}$ e $\mathbf{G_2}$, que incluiu o uso de modelos matemáticos, evidenciou algumas práticas de $\boldsymbol{S_2\ (x_2, x_5, Q_{14})}$ diante da comunidade de estudos, como destaca a Figura 1.

Figura 1

Registro do sistema didático auxiliar $\boldsymbol{S_2\ (x_2, x_5, Q_{14})}$. (Sodré, 2019)



A situação evidenciada pelos professores de $\boldsymbol{S_2\ (x_2, x_5, Q_{14})}$ nos parece encaminhar ao encontro da noção de organização praxeológica dotada de um tipo de tarefas $\mathbf{t_1}$**:** *calcular o valor de uma parcela fixa a ser depositada mensalmente em uma poupança*, que revelou o uso de uma técnica matemática $\boldsymbol{\tau_1}$ a partir do modelo matemático da situação de juros compostos, com a clareza da limitação dessa técnica $\boldsymbol{\tau_1}$, precisamente, pela manifestação de $\boldsymbol{S_2}$:

- $\boldsymbol{S_2\ (x_2, x_5, Q_{14})}$*:* Fizemos essa questão com a sensação de não estar correta, porque a solução encontrada representa a diferença produzida

transactions financières, du prêt à intérêt, etc., pratiques sociales qui sont en fait définies a priori par un modèle mathématique.

pelo montante do valor de R$ 3.000,00 com R$ 2.812,21, corresponde aos juros do capital de R$ 2.812,21, se este fosse aplicado em 12 meses.

O fragmento de $\mathbf{S_2}$ é a clara confissão de que os mesmos não dispunham, até então, de uma técnica matemática mais adequada para o tipo de tarefa, pois: "num universo de tarefas rotineiras, surgem a todo o momento tarefas problemáticas, aqui e ali, que não sabemos – ainda – realizar. Novos tipos de tarefas, que são então os tipos de *problemas*, são assim estabelecidos, e novas praxeologias virão a se constituir em torno deles"[17] (Chevallard, 1999, p. 227, grifos do autor, tradução nossa).

Parecem-nos evidente alguns momentos didáticos imbricados, em particular, o primeiro encontro – $\mathbf{MD_1}$**,** evidenciado pelos *reencontros* dos sistemas didáticos $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ nas situações e o modelo matemático associado e, incrustrado a esse momento, o *do trabalho da técnica* – $\mathbf{MD_4}$, tendo em vista a limitação da técnica matemática $\boldsymbol{\tau_1}$.

De outro modo, e orientado pelos gêneros de tarefa $\mathbf{G_3}$, a ampliação da qualidade de relações (Chevallard, 2005) dos sistemas didáticos $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ encaminhou-os ao trabalho do modelo matemático (Chevallard, 1989) da situação de juros compostos, como depreendemos a partir da Figura 2.

Figura 2

Registro do sistema didático auxiliar $\boldsymbol{S_1\ (x_1, x_3, x_4, Q_{14})}$. **(**Sodré, 2019)

[17] Fragmento de texto: en un universo de tareas rutinarias, surgen en todo momento, aquí y allí, las tareas problemáticas que no se sabe -aún- realizar. Nuevos tipos de tareas, que son entonces los tipos de problemas, se asientan así, y nuevas praxeologías vendrán a constituirse a su alrededor.

Figura 3

Transcrição do registro do sistema didático auxiliar ***S_1 (x_1, x_3, x_4, Q_{14})***.
(Autor da pesquisa, 2021)

Esquema gráfico

J = Juros

$V_1 = V_0 + J + P \rightarrow V_1 = V_0 (1+i) + P.$ sendo $(1+i) = x$

$V_2 = V_1 + J + P \rightarrow V_2 = [V_0 . x + P] . x + P = V_0 . x^2 + P . X + P$

$V_3 = V_2 + J + P \rightarrow V_3 = [V_0 . x^2 + P . X + P] . x + P = V_0 . x^3 + P . X^2 + P . x + P$

$V_4 = V_3 + J + P \rightarrow V_4 = [V_0 . x^3 + P . X^2 + P . x + P] . x + P$

$V_4 = V_0 . x^4 + P . x^3 + P . X^2 + P . x + P$

. . .

. . .

$V_{12} = V_0 . x^{12} + P . x^{11} + P . X^{10} + P . x^9 + ... + P . x^3 + P . X^2 + P . x + P$

$V_{12} = V_0 . x^{12} + P . [x^{11} + X^{10} + ... + x^3 + X^2 + x + 1]$

Valor numérico do polinômio.

O tipo de problema enfrentado pelos sistemas didáticos **S_1** e **S_2** levou-os ao estudo e à investigação de obras, mais precisamente, pelo reencontrar de situações e modelos matemáticos estudados anteriormente sobre o problema do financiamento para o cálculo de prestações fixas que permitiu o uso do esquema gráfico da linha do tempo, conforme a figura 2. Com isso, foi possível ainda o desenvolvimento do modelo matemático do problema do financiamento como um tipo de modelo que também dá conta de outra situação: a de acumulação de capitais em poupança. Portanto, esse modelo, por atender diferentes tipos de situações em contextos concretos, parece atender uma das qualidades de um modelo matemático, isto é, a *multivalência* segundo observa Revuz (1971).

A relação dos sistemas didáticos $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ com os saberes em jogo parecem evidenciar os seguintes *momentos didáticos*:

- $\mathbf{MD_1}$ em associação a $\mathbf{MD_2}$ **–** tendo em vista que o "tipo de problema sempre anda de mãos dadas com a constituição de pelo menos um embrião da técnica, do qual uma técnica mais desenvolvida pode emergir"[18] (Chevallard, 1999, p. 243, tradução nossa), e ainda segundo esse autor, o estudo de problemas é um meio e não um fim sem si mesmo, que permite criar ou utilizar uma técnica;
- $\mathbf{MD_3}$ **–** pela introdução cuidadosa de *recursos tecnológico-teóricos* por meio do "fluxo de caixa" da linha do tempo e, não menos importante,
- $\mathbf{MD_4}$ **–** o do trabalho da "nova" técnica matemática $\boldsymbol{\tau_2}$ posta para o tipo de problema considerado;
- $\mathbf{MD_6}$ **–** o da avaliação, isto é, o de serem colocados à prova sobre o domínio ou não do uso adequado do modelo matemático do problema de financiamento frente à situação de poupança, por analogias ou homologias de outras situações de compra e venda investigadas.

Em todo caso, o cumprimento desses momentos decorreu do momento da institucionalização **–** $\mathbf{MD_5}$ **–** dos modelos matemáticos e das situações associadas, legitimadas até então pelos sistemas didáticos $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$, do estudo do financiamento de veículos.

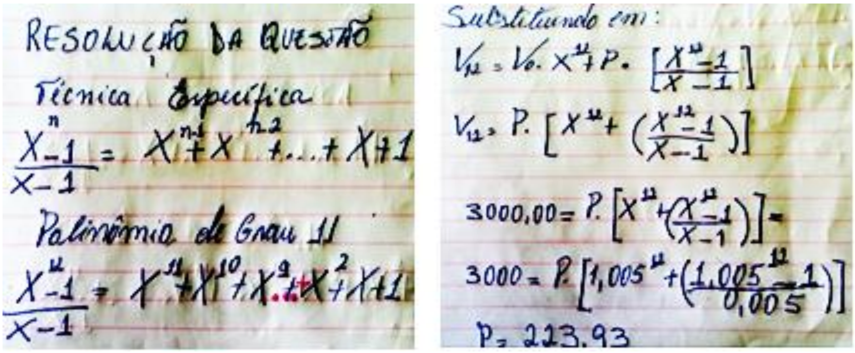
Vale salientar que a complexidade do modelo matemático enfrentada pelos professores evidenciou **–** além da construção de uma técnica matemática $\boldsymbol{\tau_3}$ mais ergonômica para calcular o valor numérico do polinômio $[\mathbf{x^{11} + x^{10} + x^9 + ... + x^3 + x^2 + x + 1}]$ **–**, o uso de calculadoras científicas, delimitando com isso, novos sistemas didáticos auxiliares instalados: $\boldsymbol{S_1\ (x_1, x_3, x_4, ₵)}$ e $\boldsymbol{S_2\ (x_2, x_5, ₵)}$, pelo fato de essas praxeologias de uso da calculadora não serem do conhecimento dos professores, mais precisamente, digitar os numerais para calcular exponenciais, incluir ou não parênteses ou outros símbolos específicos da calculadora para tornar exequível a prática demandada para a construção da

[18] Fragmento do texto: un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger.

resposta, mas que se tornaram necessárias diante da situação e do modelo matemático, como orienta a Figura 4.

Figura 4

Registro do sistema didático auxiliar ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₵)***. (Sodré, 2019)



O trabalho de construção de uma nova técnica matemática específica $\boldsymbol{\tau_3}$ evidenciou os seguintes momentos didáticos:

- **MD$_4$** – em particular, pela construção da técnica específica para calcular o valor numérico do polinômio de maior laboriosidade: $\mathbf{x^{11} + x^{10} + x^9 + ... + x^3 + x^2 + x + 1}$.
- **MD$_3$** – sob o olhar, mesmo que implicitamente, do discurso tecnológico-teórico interpretado a partir do "discurso" da série de potências, mais precisamente aqui descrita por: $\left[\frac{\boldsymbol{x^{12}-1}}{\boldsymbol{x-1}} = \boldsymbol{x^{11}} + \boldsymbol{x^{10}} + \boldsymbol{x^{9}} + \cdots + \boldsymbol{x^{3}} + \boldsymbol{x^{2}} + \boldsymbol{x} + \mathbf{1}\right]$.

Vale observar que essa qualidade de relação com o saber (Chevallard, 2005) polinômio construída ou reconstruída pelos professores, permitiu-lhes o encontro com "uma situação inclui a 'razão de ser' ou a *racionalidade* que dá sentido à atividade matemática realizada sob restrições institucionais que proporcionam e limitam a aplicação dos conhecimentos matemáticos correspondentes"[19] (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2006, p. 3, grifo dos

[19] Fragmento do texto: a situation includes the "raison d'être" or rationale that gives sense to the performed mathematical activity. And it also contains institutional

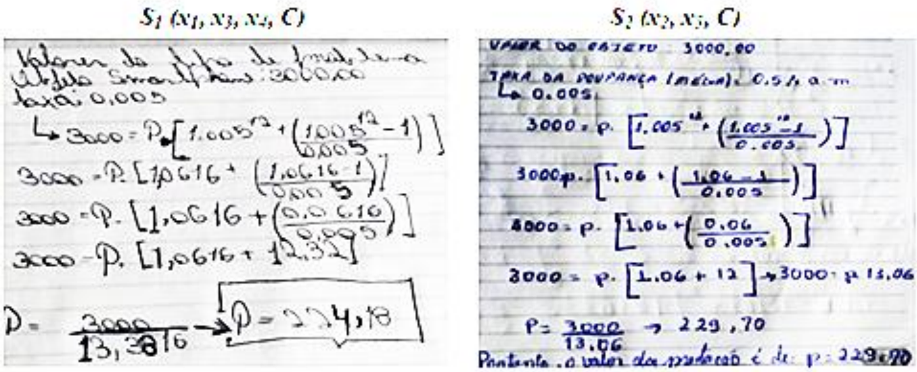
autores, tradução nossa), em particular, dando sentido e ressignificação a outros objetos da escola básica:

- ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡):*** Isso parecer ter haver com as progressões geométricas, quando fala da soma dos termos de uma PG... nesse caso aí, o x pode cumprir o papel da razão simbolizada pela letra q como razão da progressão, achei parecido a isso.

Além disso, o sistema didático ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡)*** encaminhou uma generalização da técnica específica **τ_3** descrita na Figura 4 por: $\left[\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + \ x + 1\right]$. No entanto, o uso da calculadora científica evidenciou um confronto de práticas entre os sistemas didáticos ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡)*** e ***S_2 (x_2, x_5, ₡)*** em face das respostas geradas pelos sistemas didáticos no uso do modelo matemático, como destaca a Figura 5.

Figura 5

Registros dos sistemas didáticos auxiliares. (Sodré, 2019)



O professor ***x_1*** do sistema didático auxiliar ***S_1*** encontrou inicialmente como resposta numérica o valor da parcela dada por **p = 223,93** (Figura 4) considerando todos os dígitos possíveis da calculadora científica, enquanto o professor ***x_5***, do mesmo sistema didático ***S_1***, considerou em sua defesa, o uso

restrictions that provide and limit the application of the corresponding mathematical knowledge.

de quatro casas decimais após a vírgula, encontrando o valor de **p = 224,18,** como resposta ao valor da parcela. Essas respostas encontradas, sob o condicionamento indispensável da calculadora científica, geraram, além de “conflitos” de práticas intra-sistema didático auxiliar ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡)***, confrontos com a resposta produzida por ***S_2 (x_2, x_5, ₡)***, com o valor de **p = 229,70**.

É preciso considerar o destaque dos professores:

- ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡):*** Acho que isso aconteceu (falo da diferença nas respostas encontradas)... por causa do número de dígitos que usamos ou foi usado na calculadora em relação às respostas dos colegas, que realmente não foi unânime.

Nesse sentido e de modo análogo à situação ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡),*** levantou o seguinte questionamento:

- ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡):*** Então...por que a fornecedora de energia elétrica utiliza mais de duas casas decimais no valor unitário cobrado pelo kWh na composição da tarifa de energia?

Essa questão produziu as seguintes defesas dos sistemas didáticos:

- ***S_2 (x_2, x_5, ₡):*** Se o consumo de energia elétrica de uma residência for de 150 kWh no período de um mês comercial com o preço unitário do kWh de R$ 0,663333, e não propriamente de R$ 0,66, o valor a ser pago desprezando outros encargos da tarifa final é de R$ R$ 99,50 (em caso do preço unitário do kWh R$ 0,663333) e não de R$ 99,00 (caso o preço unitário do kWh seja de R$ 0,66). Então, se a empresa fornecedora de energia utilizasse o arredondamento no preço unitário do kWh, haveria uma redução na arrecadação dessa empresa, pois a diferença de R$ 0,50 pode parecer insignificante, se considerar apenas uma residência, mas se considerar o universo de residências no estado do Pará, por exemplo, o impacto na arrecadação gera mais lucratividade a essa fornecedora de energia; [...] Tem um detalhe, que o estado é beneficiado, pois quando cobra o ICMS ele também aumenta a arrecadação;
- ***S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡):*** Que nem na gasolina também, que há arredondamento numérico na composição do valor cobrado pelo preço do litro de combustível que tem implicações em maior arrecadação dessas empresas.

(Diálogos dos sistemas didáticos $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$).

Esses diálogos dos sistemas didáticos parecem revelar claramente, além do momento didático – $\mathbf{MD_1}$ – pelo encontro com tarefas de uso da calculadora, a influência ou limitação da máquina calculadora científica para obtenção das respostas produzidas pelo modelo matemático à situação. É preciso considerar que a resposta inicial produzida pelo modelo é para o mesmo e não para a situação em contexto. Nem sempre a resposta construída pelo modelo matemático, que é condicionado diretamente pelo uso da calculadora científica, pode se mostrar útil à situação e, com isso, evidenciar claramente o condicionamento da situação em contexto ao uso da calculadora.

Essa caminhar dos sistemas didáticos $\boldsymbol{S_1 (x_1, x_3, x_4, ₡)}$ e $\boldsymbol{S_2 (x_2, x_5, ₡)}$ revelou "perturbações" (Chevallard, 2005) provocadas pelo uso da calculadora científica, pois "a ferramenta digital, no entanto, só pode ser usada após os termos matemáticos terem sido traduzidos para a linguagem do computador"[20] (Greefrath & Vorhölter, 2016, p. 22, tradução nossa), isto é, de acordo com a necessidade que os professores apresentaram para construir qualidades de relações (Chevallard, 2005) com as praxeologias de uso da calculadora científica.

Em última análise, nossa investigação parece revelar, mesmo que parcialmente, possibilidades para encaminharmos respostas aos questionamentos levantados por Niss, Blum e Galbraith (2007) (apud Greefrath & Vorhölter, 2016), mais precisamente:

> Como as ferramentas digitais devem ser usadas em diferentes graus para processos de modelagem? Qual é o efeito das ferramentas digitais no espectro de problemas de modelagem a serem trabalhados? Como o ensino da cultura é influenciado pela existência de ferramentas digitais? Quando as ferramentas digitais aprimoram ou dificultam as oportunidades de

[20] Fragmentos do texto: The digital tool, however, can only be used after the mathematical terms have been translated into the computer's language.

> aprendizagem no processo de modelagem?[21] (Greefrath & Vorhölter, 2016, p. 23, tradução nossa).

Embora essas questões necessitem de mais experimentações empíricas, é preciso destacar o indispensável papel da calculadora ou do computador no fazer de MM, ou seja, aqui evidenciamos uma dependência dos problemas ditos reais do uso dessas ferramentas digitais, que, apesar de serem saberes não matemáticos, funcionam condicionadas por saberes matemáticos, o que distancia o olhar da MM enquanto prática estrita dos saberes matemáticos, como pode nos fazer acreditar, por exemplo, Niss, Blum e Galbraith (2007) (apud Stillman, 2019).

ENCAMINHAMENTOS DA INVESTIGAÇÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este artigo, além responder, mesmo que parcialmente, a alguns questionamentos apontados por Niss, Blum e Galbraith (2007) (apud Greefrath & Vorhölter, 2016) sobre os impactos do uso de ferramentas digitais no estudo de problemas em MM, bem como seu papel enquanto parte integrante e indispensável do processo de MM ao criar condições e, com isso, restrições institucionais, revelou evidências dos *momentos didáticos* (Chevallard, 1999), nem todos é claro, no estudo de problemas em contextos concretos, especificamente, a partir do estudo de tarefas da matemática financeira escolar.

As tarefas específicas da matemática financeira a partir dos fragmentos empíricos encaminhados por Sodré (2019) se mostraram problemática aos professores e potencialmente ricas por criarem condições no sentido da TAD, que permitiu o encontro com saberes matemáticos e não matemáticos, e, com isso, o encontro desses professores com diferentes momentos didáticos. Ou seja, os resultados empíricos ratificaram a afirmação de Chevallard (1999) sobre os momentos didáticos dependerem da *criação de situações didáticas adequadas*.

[21] Fragmentos do texto: How are digital tools supposed to be used in different grades to support modelling processes? What is the effect of digital tools on the spectrum of modelling problems to be worked on? How is teaching culture influenced by the existence of digital tools? When do digital tools enhance or hinder learning opportunities in the modelling process?

A investigação evidenciou o encontro dos professores em formação com diferentes momentos didáticos, em particular, os momentos **MD**$_1$ em associação a **MD**$_2$, de exploração de tarefas e técnicas frente aos novos problemas enfrentados e, com isso, o encontro com **MD**$_4$ do trabalho da técnica para essas problemáticas que os encaminhou à investigação de novas técnicas e, de maneira mais inclusiva, apontou o momento da institucionalização **MD**$_5$ e o da avaliação – **MD**$_6$ – diante do uso adequado ou não dos modelos matemáticos em situação.

É preciso destacar que o trabalho da técnica do momento didático, aqui simbolizado por **MD**$_4$, foi constatado em diferentes etapas do processo de estudos, em particular, pelo encontro dos professores com praxeologias que envolveram o uso de "novas" técnicas diante da problemática do cálculo da parcela fixa a ser depositada em uma poupança, tendo em vista o momento de o trabalho da técnica ser um dos momentos mais *desprestigiado*, segundo Bosch, Chevallard e Gascón (2001).

Além disso, ficaram evidentes mudanças da qualidade de relações dos professores com o saber (Chevallard, 2005), nesse caso, as praxeologias relativas ao uso adequado da calculadora científica, introduzida no processo de estudos como um dos condicionantes que tornou possível a realização de tarefas problemáticas até então enfrentadas pelos professores.

Pareceu-nos válido que o estudo de problemas em contextos concretos em MM não depende somente de saberes matemáticos, pois há uma clara dependência de outros saberes não matemáticos, em nosso caso, o do uso de calculadoras científicas que funcionam com matemática enquanto ferramenta não somente para verificação de resultados, mas como parte integrante e indispensável do processo de MM, o que condicionou as respostas produzidas pelos professores diante da situação em contexto.

De outro modo, além dos momentos didáticos verificados na empiria de formação docente, o estudo de problemas em contexto concreto ratificou elementos do processo de MM apontados por Guerra e Silva (2009), tendo em conta a dialética de interdependência entre a quádrupla {*situação / modelo matemático / método / máquina*} com a clareza do indispensável papel da calculadora científica que produziu diferentes respostas frente à comunidade de estudo.

É preciso destacar que as respostas encontradas pelos professores podem ser úteis ao modelo matemático, mas não necessariamente podem se mostrar adequadas frente à situação em contexto, além, é claro, da dependência de escolha do método matemático para enfrentar o modelo matemático.

Em última análise e tendo em vista os resultados aqui encontrados, motivamo-nos à realização de futuras pesquisas, inclusive, sobre possíveis problemáticas que podem se revelar a partir do uso de modelos matemáticos em contextos concretos.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que respaldam este estudo e investigação serão disponibilizados pelo autor para correspondência (GJMS), mediante solicitação prévia.

REFERÊNCIAS

Barquero, B. & Jessen, B. E. (2020). Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. *Avances de Investigación em Educación Matemática, (17)*, 98–113.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. [Trabajo de Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona].

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? In: Cho, S. J. (ed.). *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education,* 73-96.

Bolea, M. P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. [Trabajo de Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza].

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 86-95.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentos antropológicos das organizações didáticas: das "oficinas de práticas matemáticas" às "rotas de estudo e pesquisa". In: Bronner, A. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, M.

Chevallard, Y. Cirade, G. & Ladage, C. (ed.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. (p. 49-85). IUFM de l'Académie de Montpellier.

Bosch, M. Chevallard, Y. & Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the fourth congress of the european society for research in mathematics education*.

Bosch, M. García, F. J. Gascón, J. & Ruiz Higueras, L. (2006, agosto). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar: Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit X*, *19*(19), 43–72.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques,* 19(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée.*

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aiquegrupo editor.

Chevallard, Y. (2019). On using the atd: some clarifications and comments. *Educ. Matem. Pesq*., *21*(4), 1-17.

Chevallard, Y. (2013). Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1*: Enquête codisciplinaire & EDD*.

Chevallard, Y. (2009). La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. In: Margolinas, C. et al. (org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques,* (1), 81-108.

Chevallard, Y. Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e aprendizagem*. Artmed.

Florensa, I. García, F. J. & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (17), 21–37.

Fonseca, C. Gascón, J. & Oliveira, C. (2014, noviembre). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización functional. *Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 289-318.

García, F. J. Baquero, B. Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (15), 75-94.

Garcia, F. J. Gascón, J. Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226-246.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 6*(3), 37-51

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*. (Ed. Especial), 99–123.

Greefrath, G. & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: approaches and developments from german speaking countries.* Springer.

Guerra, R. B. & Silva, F. H. S. (2009). Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. *Perspectivas da Educação Matemática, 2*(3), 95-119.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2010). La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable. In: *Actes du colloque Education au développement durable et à la biodiversité*.

Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(6), 3-21.

Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies In Mathematics,* (4), 48-52.

Schukajlow, S. Kaiser, G. & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM – Mathematics Education, 50*(1–2), 5-18.

Sodré, G. J. M. & Guerra, R. B. (2018). O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq*., *20*(3), 239-262.

Sodré, G. J. M. & Oliveira, M. L. S. (2021). O ciclo investigativo de modelagem matemática: uma transposição didática escolar. *Vidya, 41*(1), 35-57.

Sodré, G. J. M. (2019). *Modelagem matemática escolar: uma organização praxeológica complexa*. [Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil].

Stillman, G. A. (2019). State of the art on modelling in mathematics education-lines of inquiry. In. Stillman, G. A. & Brown, J. P. (eds.), Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. Proceedings of the *13th International Congress on Mathematics Education*. (p. 1-20).

Vorhölter, K. Greefrath, G. Borromeo Ferri, R. Leiß, D. & Schukajlow, S. (2019). M*athematical modelling*. In: Jahnke, H. N. Hefendehl-Hebeker, L. (eds.). Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematics Education*. (p. 91-114).