ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6647

Algunos ejemplos del fenómeno del deslizamiento metadidáctico en la práctica escolar

Bruno D'Amore[a]
Martha Isabel Fandiño Pinilla[b]

[a] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática, Bogotá, Colombia
[b] Universidad de Bologna, Departamento de Matemática, NRD Núcleo de investigación en Didáctica de la Matemática, Bologna, Italia

Recebido para publicação 31 maio 2021. Aceito após revisão 15 jun. 2021.
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: En Didáctica de la Matemática se ha evidenciado durante décadas el problema del deslizamiento metadidáctico (*glissement metadidactique*) evidenciado por Guy Brousseau. Pero la práctica didáctica escolar propone modelos de comportamiento (enseñanza – aprendizaje de la Matemática) desde los cuales se evidencia que el tema es del todo desconocido. **Objetivo:** este artículo tiene la intención de presentar y discutir el problema del deslizamiento metadidáctico y dar algunos ejemplos negativos de su influencia, en particular en lo que respecta a la interpretación ingenua de la llamada heurística de Pólya relativa a la resolución de problemas de Matemática. **Design:** Investigación teórica en Didáctica de la Matemática. **Entorno y participantes**: se centra en la práctica didáctica escolar de la resolución de problemas de Matemática. **Recogida y análisis de datos:** Ejemplos negativos elegidos entre los de mayor difusión en el mundo escolar son analizados a la luz de la moderna Didáctica de la Matemática para poder identificar deslizamientos metadidácticos en ellos. **Resultados:** Gracias al deslizamiento, el alumno aprende un esquema, o un algoritmo, no el tema matemático T deseado, que sigue siendo un misterio para el alumno (y en ocasiones también para el profesor). **Conclusiones**: Antes de pretender "mejorar" la enseñanza – aprendizaje de la Matemática con medidas coyunturales y drásticas, es mejor, como mínimo, estudiarla con humildad.

Palavras-chave: deslizamiento metadidáctico, resolución de problemas, heurística de Polya.

Autor correspondiente: Bruno D'amore. Email: damore@dm.unibo.it

ABSTRACT

Background: In didactics of mathematics, the problem of metadidactic slippage (*glissement metadidactique*) evidenced by Guy Brousseau has been shown for decades. But the school didactic practice proposes behavioural models (mathematics teaching-learning) from which it is manifest that the subject is completely unknown. **Objectives**: This article intends to present and discuss the metadidactic slippage problem and give some negative examples of its influence, in particular, about the naive interpretation of the so-called Pólya heuristic regarding problem solving in mathematics. **Design**: Theoretical research in didactics of mathematics. **Setting and participants**: focuses on the school didactic practice of problem solving in mathematics. **Data collection and analysis**: Negative examples chosen from among those most diffused in the school world are analysed in the light of modern didactics of mathematics to identify metadidactic slippage in them. **Results**: Thanks to the slippage, the student learns a scheme, or an algorithm, not the desired mathematical topic T, which remains a mystery to the student (and sometimes also to the teacher). **Conclusions**: Before trying to "improve" the teaching-learning of mathematics with temporary and drastic measures, it is better, at least, to study it modestly.

Keywords: metadidactic slip, problem solving, Polya heuristics.

POLYA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La producción de carácter divulgativo, no científica, del gran matemático húngaro – estadounidense George Polya (1887 – 1985) se desarrolló entre 1945 y 1967; se compone de dos famosos libros traducidos en varios idiomas: 1. *How to Solve It*; 2. *Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*; *Mathematics of Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning*. (Polya, 1945/1967, 1954). En estos libros divulgativos, Polya ilustró y evidenció al público su forma personal de afrontar y de resolver problemas, una técnica genial, admirada por todos aquellos matemáticos que han apreciado sus excelentes resultados en probabilidad, teoría de números, cálculo combinatorio y en el estudio de series particulares. Valiosa, por el conocimiento de la obra de Polya, es su extensa y docta memoria póstuma escrita por el matemático estadounidense Ralph Philip Boas (1912 – 1992) quien fue también co-autor de Polya (Boas, 1990).

Este tipo de análisis no es único en el mundo de la Matemática, por el contrario, sigue por así decirlo una tradición. Por ejemplo, en 1910 el psiquiatra y periodista francés Édouard Toulouse (1865 – 1947) publicó un célebre libro en el cual narra los análisis que realizó a finales del s. XIX – inicios del s. XX sobre Henri Poincaré (1854 – 1912), uno de los más geniales creadores matemáticos de toda la historia (Toulouse, 1910), después de haber observado por mucho tiempo su forma de trabajar y de haber dialogado con él sobre sus hábitos en el trabajo y sobre sus modalidades de pensamiento creativo. De este libro surge un Poincaré matemático – ser humano, que se aleja del estereotipo de la figura del matemático, desde múltiples puntos de vista (D'Amore & Sbaragli, 2020).

También el gran matemático francés Jacques Hadamard (1865 – 1963), famoso por sus excelentes resultados en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales, por su teorema sobre los números primos, por una desigualdad y por una matriz que lleva su nombre, por sus estudios en Mecánica cuántica, dedicó tiempo y energía a estudiar lo que el mismo llamó "psicología de la invención en Matemática" que tuvo un éxito extraordinario. El volumen original es de 1945 y aún hoy se publica (Hadamard, 1945). Hadamard no recurre a psiquiatras, él mismo realiza la investigación; llega a afirmar que el pensamiento matemático es una actividad que no se apoya en palabras, por el contrario, el pensamiento matemático se sirve de imágenes mentales y de sensaciones de diverso tipo. Por su investigación, en los primeros años del siglo XX entrevistó un centenar de estudiosos entre matemáticos y físicos [entre los cuales Albert Einstein (1879 – 1955)] y se observó a sí mismo en el trabajo, con el fin de mostrar que las sensaciones creativas se manifiestan a través de sensaciones físicas.

A diferencia de lo que se ha escrito sobre Poincaré y Hadamard, la narración de los métodos de Polya y la confesión pública de cómo logró sus resultados se transformaron, para algunos lectores de la época, en una especie de "metodología general de la resolución de problemas", algo como una "heurística exitosa" que, con consideraciones superficiales, fue anunciada como una modalidad para usar en el aula. Las "reglas" internas y personales, que Polya enumera y describe brillante y generosamente con ejemplos, fueron consideradas ingenuamente como una vía maestra digna de ser seguida en el proceso de enseñanza, con la convicción de que el aprendizaje sería su lógica consecuencia.

En aquellos tiempos no se hablaba de Didáctica de la Matemática como disciplina, aún no se había creado; inició a concebirla Guy Brousseau precisamente a finales de los años ’60, continuando a todo lo largo de la década de los ’70, y terminando con la creación propiamente dicha de una verdadera teoría del aprendizaje de la Matemática a finales de los años ’80.

Ahora, lo que quería proponer a sus lectores Polya era y es muy claro aún hoy, tomando como base sus mismas palabras: proponerse a sí mismo como modelo, dado que se trata de un modelo exitoso; y proponer sus etapas como ejemplos que cualquiera podría seguir.

Hoy, si bien la historia de estos instrumentos personales de gran eficacia como el caso de Polya son considerados de gran interés histórico y psicológico, nadie osaría considerarlos científicamente idóneos para estudios de Didáctica de la Matemática con una aplicación directa en aula. Tal vez esto vendría a la mente de quienes no han estudiado o han estudiado mal la Didáctica de la Matemática. Normalmente los instrumentos de Polya son aclamados o citados favorablemente por quien no sabe lo que ha sucedido en las últimas décadas gracias a la Didáctica de la Matemática y a la investigación que se ha desarrollado en su interior. A costa de repetirnos, por tanto, reiteramos que una eventual citación de Polya desde una perspectiva histórica o tal vez psicológica puede ser interesante, pero, ciertamente no desde un punto de vista didáctico, como lo mostraremos en los próximos parágrafos.

Antes de abordar este argumento específico, debemos presentar uno de los temas de investigación que la disciplina Didáctica de la Matemática ha afrontado en las últimas décadas.

EL (NEGATIVO) FENÓMENO DEL DESLIZAMIENTO METADIDÁCTICO

El uso en la práctica didáctica de sistemas heurísticos elevados a modelos que sustituyen el aprendizaje de la Matemática con el aprendizaje de una analogía, lo más algorítmica y secuencial posible, se ubica en el estudio de un fenómeno negativo y contraproducente evidenciado por la investigación propiamente enmarcada en Didáctica de la Matemática que se incluye bajo la denominación de “deslizamiento metadidáctico”. Sin embargo, este fenómeno difundido y peligroso es, en ocasiones, incentivado por los mismos docentes.

Este fenómeno se presenta cuando se pasa del estudio de un tema de matemática T, que debería constituir un objeto de aprendizaje, al estudio de los instrumentos que al máximo podrían servir únicamente o para ilustrar el tema T o para afrontar la resolución de un problema relacionado con aquel tema T, como un esquema banal y no como un aprendizaje verdadero (lo cual implicaría, como lógica consecuencia, la resolución correcta, apropiada y general de problemas relacionados con el tema T). Pero, si el deslizamiento tiene éxito, el estudiante aprende un esquema, o un algoritmo, o un ejemplo generalizado, no el tema T. Algunos docentes (cuando no conocen los resultados de la Didáctica de la Matemática) confunden estos dos niveles, aceptando en buena fe la situación que aparece superficialmente como positiva; inclusive, a veces ellos mismos la crean y la proponen en aula, confiados en las sugerencias de los "expertos", y, por tanto, se crea una ilusión perfecta: todos están satisfechos. Pero el tema matemático T sigue siendo para el estudiante (y, en ocasiones, también para el docente) un misterio.

Para entender mejor la situación, sugerimos algunos ejemplos elegidos entre los de mayor difusión en el mundo escolar.

1. Consideramos problemas de este tipo, con gran presencia en el mundo escolar de todo el mundo: «3 obreros hacen un determinado trabajo en 9 horas; pero si los obreros que realizan el mismo trabajo son 6, ¿cuántas horas de trabajo se requieren para realizarlo?». Se trata de una proporción con un término desconocido. $a : b = c : d$.

Para entender y de consecuencia resolver conscientemente este tipo de problemas se ideó hace mucho tiempo un mecanismo gráfico conocido en todo el mundo como "regla de 3". Dicho modelo transforma la formulación aritmética en un gráfico y esto parece hacer que la resolución del problema sea más efectiva. Pero, como ha sucedido y sucede en todos los países, después de un tiempo no se vuelve a hacer referencia ni al problema ni al tema de la proporcionalidad, tan sólo se hace referencia al gráfico. Aprender a usar la regla de 3 sustituye aquello que en origen era el verdadero objeto de aprendizaje: conocer y saber usar el objeto matemático "proporciones".

El estudiante aprende a manejar y a usar este gráfico (con flechas que tienen sentidos concordantes o discordantes) e, incluso si puede encontrar el resultado de ese problema propuesto, no aprende a resolver el problema o problemas similares porque no ha aprendido la idea de proporcionalidad. Sólo logró individuar la forma correcta de colocar las flechas. Si olvida la regla de 3 o si se equivoca en la colocación de las flechas, no podrá resolver este tipo de problemas: el estudiante no razona, busca la regla, el algoritmo. Tanto es así que, si el término desconocido no es c sino d, el estudiante en muchas ocasiones no sabe qué hacer, es decir, como colocar las flechas.

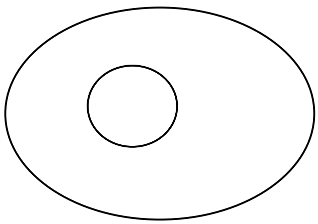
2. Otro ejemplo funesto se verificó con la llegada a las aulas de la teoría ingenua de conjuntos en los años ’70 y ’80, como consecuencia de una idea sobrestimada de algunos matemáticos de un cierto prestigio, con buenas intenciones, pero con poca relación con los problemas de enseñanza – aprendizaje. Después de algunos años, se introdujo en el mundo de la escuela el problema de la representación de los objetos de la teoría de conjuntos y fue así como se pensó en usar círculos o elipses para indicarlos. Bastó poco tiempo para dejar de estudiar la teoría de conjuntos, y se comenzó a teorizar sobre cómo dibujar y usar los gráficos, transformando todo el proceso de aprendizaje de la teoría ingenua de conjuntos en el dominio de esta actividad, puramente gráfica, de bajo nivel.

Por tanto, si los estudiantes aprendían algo, no aprendían la lógica como lenguaje de base de la Matemática, lo cual era el objetivo inicial, aprendían a dominar el dibujo de los gráficos. Otro deslizamiento metadidáctico. Afortunadamente, el desorden que siguió a todo esto sirvió para eliminar este inútil contenido matemático de los programas de estudio de matemática, esto también gracias a la intervención de otros matemáticos de idéntico prestigio. Entre estos últimos mencionamos a René Thom (1970/1980, 1973) y Morris Kline (1973) (todo esto es narrado detalladamente en D’Amore, 1999).

Estamos seguros que todos pueden entender, por intuición, sin necesidad de estudiar toda una … teoría de circulitos, que: si los objetos *a* son sólo una parte de los objetos de *b* (por ejemplo: todos los cuadrados son rombos), entonces se puede usar como representación gráfica un par de circulos dispuestas de la siguiente manera (A representa el conjunto de los objetos *a*, B representa el conjunto de los objetos *b*) (Figura 1).

Figura 1

A representa el conjunto de los objetos a, B representa el conjunto de objetos b



Este ridículo fenómeno demuestra que, en ocasiones, para resolver una dificultad, a veces incluso menor, se da lugar a una cascada de procedimientos pseudo didácticos que puede conducir a actividades inútiles que poco a poco se convierten en un monstruo incontrolable.

3. Las llamadas "pruebas" de los resultados de las operaciones, mecanismos algorítmicos con el fin de verificar el correcto resultado de dichas operaciones; todos saben que se trata de algoritmos inútiles dado que no garantizan absolutamente nada. Por ejemplo, la "prueba del 9" de la siguiente multiplicación: $137 \times 24 = 2271$, nos dice que el resultado de la multiplicación es correcto, contra toda evidencia. La única "prueba" posible sería realizar (correctamente) la división $2271 \div 24$ y así verificar que el cociente es 137, una modalidad que permite confirmar un aprendizaje: las operaciones de multiplicación y de división son una la inversa de la otra. (Naturalmente, esta "prueba" puede dar lugar a error).

4. La técnica de división entre fracciones. Todos saben que para realizar la división $a/b \div c/d$ se debe realizar la multiplicación $a/b \times d/c$ (b, c, $d \neq 0$). Pero muy pocas veces se explica en aula el porqué de esta "regla"; alumnos y docentes se refugian en el deslizamiento metadidáctico. De hecho, la solicitud es a menudo explícita: «Se *debe* hacer así» o «*Basta* hacer así»: esto es todo lo que se debe saber, es lo que el docente espera de sus estudiantes. En nuestra experiencia, casi ningún docente demostraba conocer la respuesta a la pregunta espontánea: ¿Por qué?

5. Saber realizar la adición es un punto fuerte de la escuela primaria; pero a veces se convierte en una pluralidad de algoritmos que no tienen otra explicación más allá de ser un instrumento y no como conocimiento. No sólo el estudiante debe aprender a calcular el resultado de adición, por ejemplo, con el fin de poder dar la respuesta a un problema, sino que debe hacerlo con diversas modalidades instrumentales algorítmicas: en columna, "en horizontal", mentalmente, en el ábaco, en la "recta numérica".

El objeto de conocimiento deja de ser el algoritmo de la adición, para convertirse en el aprendizaje de un conjunto de modalidades que poco tienen que ver con el sentido matemático de la operación misma. Y así, el sentido del cálculo del resultado de una adición en el proceso de resolución de un problema viene distorsionado por el deslizamiento metadidáctico y el verdadero problema para quien intenta resolver es el de saber realizar la adición en tantas modalidades diferentes. El estudiante pierde el sentido que tiene la resolución del problema y transforma su propia actividad en ejecuciones algorítmicas.

6. Si se debe multiplicar un número por 10 o por 100, no se deben hacer los cálculos, se debe agregar uno o dos ceros respectivamente después de la cifra que ocupa el puesto de las unidades, después de la última cifra. No sólo no es claro el por qué, sino que se vuelve problemático apenas el multiplicando no es un número natural, sino un número racional escrito tanto con la coma como en forma de fracción. Todos los docentes lo saben. Un saber se vuelve una regla pseudo - algorítmica cuya aplicabilidad no es dominada por todos. Y cuando además se trata de las reglas análogas para la división, los resultados negativos de estos deslizamientos metadidácticos se hacen evidentes a todos los docentes.

7. Se indica un objeto matemático con un símbolo, puede ser con un gráfico (un dibujo, un diagrama, …); después se deja de pensar en el objeto matemático abstracto inicial y todo se relega al gráfico mismo. Por ejemplo, se define un ángulo llano (plano). (Casi nunca se define la amplitud de un ángulo y se presenta como intuitiva. Por lo general se habla de la medida del ángulo y no de la medida de la amplitud). En lugar de aclarar qué es, desde un punto de vista matemático, un ángulo y que la amplitud es una medida, se limitan a dibujar un arquito un poco distante del vértice, arquito que va de un lado al otro; tendencialmente se hace de forma tal que sea un arco de circunferencia (razón por la cual se llama "arco") que tiene el centro en el vértice del ángulo y una medida del radio cualquiera.

Este arquito en algunas ocasiones indica el ángulo, en otras la amplitud. A este punto se olvida el objeto ángulo y se estudia el arquito. Tanto es así que se encuentran estudiantes universitarios que creen que el ángulo es el arquito y no una parte del plano (haciendo referencia a la definición de ángulo más recurrente) (Sbaragli, 2005); y que la longitud del arco mide la amplitud del ángulo, con la consecuencia que, según donde se dibuje concretamente el arquito, la medida de la amplitud de dicho ángulo cambia. En este caso el deslizamiento metadidáctico es cognitivamente peligroso, pero la mayor parte de los docentes no se da cuenta.

8. La escritura posicional de los numerales representa una trampa mortal para el dominio de los aspectos cognitivos, sobre todo debido al deslizamiento metadidáctico. Si Natalia posee 123 canicas, nadie pone en duda que ella tiene 123 unidades, donde cada unidad es una canica. Por tanto, en el numeral 123 hay 123 unidades. Parece obvio. Pero si Natalia (por motivos personales) decide agrupar las canicas en cajitas en grupos de diez en diez, ella tendría 12 cajitas y en cada una tendría una decena de canicas, más 3 canicas sueltas. Ahora bien, Natalia tiene entonces 12 decenas de canicas. Natalia

decide (siempre por motivos personales) agrupar las cajitas – decenas en una caja más grande, recogiendo las decenas de diez en diez; podrá recoger sólo 10 decenas que reunirá en una caja que obviamente contiene 100 canicas, es decir 10 decenas, es decir una (1) centena. [Nuestro *sistema posicional* de escritura de los números se llama *decimal* precisamente porque se reúne de diez en diez para pasar al agrupamiento de nivel superior: unidad→ decenas→ centenas→ miles (unidades de mil)].

Pero 2 de estas cajitas-decenas quedan fuera del contenedor grande. Por tanto, a este punto, Natalia dispone de una (1) centena de canicas, más 2 decenas de canicas, más 3 canicas sueltas. Nadie duda que ella continúa teniendo 123 canicas, es decir 123 unidades; nadie duda que ella posee 12 decenas más 3 canicas sueltas. Se debería decir que en el numeral 123 las cifras 3, 2, y 1 representan los valores que aparecen en los "puestos" unidad, decenas, centenas del numeral 123: con mayor precisión 3 indica la cifra que aparece en el puesto de las unidades, 2 indica la cifra que aparece en el puesto de las decenas, 1 indica la cifra que aparece en el puesto de las centenas. Sería todo muy simple.

Pero aquí el deslizamiento metadidáctico se desencadena cuando se pretende obligar al estudiante que en el numeral 123 "hay": 1 centena (lo cual casualmente es correcto) 2 decenas (lo cual es falso porque las decenas son 12), 3 unidades (lo cual es también falso porque las unidades son 123). Se deja de lado el estudio del objeto matemático "escritura posicional" ocupándose de este deslizamiento metadidáctico pretendiendo que los estudiantes aprendan a decir una falsedad. Para estar seguros que el error se presente en la totalidad de los casos y que constituya una pesada carga, se asignan a veces colores a la escritura de las cifras en cada uno de los puestos: las unidades van en color rojo, las decenas en color amarillo y las centenas en color verde (estamos inventando este cromatismo errado y perjudicial pues no sabemos si existe ya un acuerdo para presentar esta nefasta actividad).

Y así, se deja de explicar el sentido aritmético correcto del objeto matemático "escritura posicional", y se termina pasando a una escritura … cromática que obliga a los estudiantes a hacer uso de lápices de colores cuando deben escribir los numerales, anulando efectivamente unos 7000 años de historia e investigación. La ventaja de la escritura posicional, uno de los inventos más geniales de la humanidad en su larga historia, es precisamente el hecho de que una misma cifra, según la POSICIÓN que tenga dentro del numeral, adquiere un valor diferente; mientras aquí se anula todo esto de manera vergonzosa, y no se obtiene una escritura posicional sino una

CROMÁTICA. En lugar de decir “sistema posicional decimal” se debería llamar “sistema cromático decimal”.

En ocasiones el docente recurre al ábaco; pero, en el ábaco, en la “escritura” 123 no aparecen 123 discos-unidad, en total aparecen solo 6, pero su disposición (1 en la columna de las centenas, la tercera desde la izquierda; 2 en la columna de las decenas; 3 en la columna de las unidades) es la que determina el valor, no son los colores. Por tanto, el ábaco, cuando se erige como modelo y es usado correctamente, contradice los resultados de este deslizamiento metadidáctico. Si se le pregunta al estudiante: «¿Cuántas decenas hay en 123?», muchos docentes dan la respuesta errada «2» en lugar la respuesta correcta «12». Incluso reconfortados por el hecho que la cifra 2 ha sido escrita en amarillo. Lo cual explica los resultados negativos que se encuentran en las respuestas de las pruebas internacionales de evaluación.

No debemos considerar que los ejemplos de deslizamiento metadidáctico están presentes sólo en las escuelas primarias y medias. Nos limitamos a proponer sólo uno entre los muchos ejemplos que también se encuentran en los primeros años de la escuela superior.

9. La llamada regla de Ruffini, famosa en los primeros años de la escuela secundaria de varios países.

El alumno está estudiando los polinomios y debe saber realizar la fácil división $(2x^3-3x^2-5x-2) \div (x-2)$ lo cual le llevaría al cociente $2x^2+3x+1$. Este tema constituye un óptimo argumento del saber matemático. Pero, por lo general no se le enseña cómo hacer la división, que entre otras cosas es un algoritmo que no ofrece dificultades. Se le enseña, por el contrario, un esquema formado por todos los coeficientes en juego que van colocados en una particular tabla y en un determinado orden.

El aprendizaje deja de ser la división entre polinomios, y pasa a ser el cómo organizar los coeficientes en esta tabla y el uso que de estos se hace. Es este mecanismo el que sustituye el aprendizaje, aquel que los libros de texto y los docentes están esperando, un evidente deslizamiento metadidáctico a causa del cual se pierde un significativo saber que sería importante poseer.

10. Ejemplos análogos difundidos por el mundo están constituidos por el uso de tablas específicas para realizar cálculos logarítmicos, hoy eliminadas gracias al uso generalizado de las calculadoras y de los programas de computación. También se encontraban los cálculos para demostrar que $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\, \text{sen}\beta$; el objetivo de estas igualdades (y otras tantas análogas) estaba relacionado con el hecho que las tablas trigonométricas contenían los

valores de las funciones trigonométricas de los ángulos entre 0° y 90° y por tanto para calcular por ejemplo *sen*110° de debía considerar *sen*110° como *sen* (90°+20°). Y así, en cambio del estudio de la trigonometría, se estudiaban estas infernales e inútiles reglas algorítmicas. Todo esto se acabó gracias a la introducción de la calculadora y los programas de computación. Pero, nos preguntamos: ¿será qué estos instrumentos llevaron finalmente al estudio de la verdadera trigonometría como teoría y no como conjunto de reglas?

Nos detenemos aquí, pero se podría continuar con muchos otros ejemplos en cada uno de los dominios de la Matemática y en todos los niveles escolares.

CONCLUSIONES

Conocimientos y saberes forman una pareja de metaconocimiento con mutuas influencias recíprocas. El conocimiento es el medio implícito para activar y gestionar los saberes. Los saberes son los instrumentos institucionales y culturales que permiten aprender los conocimientos, propios y de los otros. Querer tratarlos de manera unívoca, en particular pensar el conocimiento como un saber, constituye un deslizamiento metadidáctico permanente. Cada conocimiento implícito en un saber requiere, para funcionar, nuevos conocimientos que, una vez fijados, no pueden ser considerados como tales. Resultan errores, malentendidos, fracasos que relanzan exigencias imposibles y prácticas ineficaces. Desde una visión económica, los conocimientos disponibles en aula son el capital y los intereses son los saberes adquiridos; es implícito el sutil e incierto juego de los conocimientos vivos, dudosos y fugaces con los saberes seguros y compartidos, el juego del dicho y del no dicho.

Antes de pretender "mejorarlo" con medidas coyunturales y drásticas, es mejor, como mínimo, estudiarlo con humildad.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Los autores discutieron el marco teórico para contribuir a la producción de este artículo y participaron colectivamente en su construcción.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por los autores para correspondencia, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Ausubel, D. P. (1968). Educational psychology: *A cognitive view*. Holt, Rinehart & Winston.

Boas, R. P. (1990). George Pólya, Deciembre 13, 1887 – Septiembre 7, 1985. National Academy of Sciences (Eds.), *Biographical Memoirs*: Volume 59 (pp. 338–355). National Academy of Sciences. https://www.nap.edu/catalog/1652/biographical-memoirs-v59.

Bonotto, C., & Baroni, M. (2011). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? I Parte. *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *34 A*(1), 9-40.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Próologo de Bruno D’Amore. Pitagora.

Brousseau, G., &D’Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica. De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41-54. http://doi.org/10.24844/EM3003.02.

Carifio, J (2015). Updating, Modernising, and Testing Polya’s Theory of [Mathematical] Problem Solving in Terms of Current Cognitive, Affective, and Information Processing Theories of Learning, Emotions, and Complex Performances. *Journal of Education and Human Development*, *4*(3), 105-117.

D’Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *47*(2), 14-17.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prologo de Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [D’Amore, B. (2006). Didáctica de la Matemática. Prólogos de Guy Brousseau, Colette Laborde, Luis Rico. Editorial Magisterio].

D’Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Digital Docet.

D’Amore, B. (2020). *Los problemas de matemática en la práctica didáctica*. Magisterio.

D’Amore, B., &Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d’aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica, 34*(66), 43-52.

D’Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete) - An effect of the didactical contract: Imagining implicit requirements (even in problems that involve real concrete situations). *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161-196. http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/91-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-ottobre-2019-numero-2.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). Gli effetti del contratto didattico in aula. Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica. *Prefazione e postfazione di Guy Brousseau*. Bologna: Pitagora. [D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2018). El contrato didáctico en Educación Matemática. *Prólogo y epílogo de Guy Brousseau*. Magisterio.

D’Amore, B., &Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. IV vol. Dal XVIII al XXI secolo. Prefación de Gabriele Lolli. Dedalo.

D’Amore, B., & Zan, R. (1996a). Mathematical Problem Solving. En N. Malara, M. Menghini & M. Reggiani M. (Eds.), Italian Research in Mathematics Education 1988-1995. *Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*. Roma: CNR. 136-150. [Este texto fue publicado en: Gagatsis, A., & Rogers, L. (Eds.) (1996). Didactics and History of Mathematics. Erasmus ICP 95 G 2011/11. University of Thessaloniki. 35-52].

D’Amore, B., & Zan, R. (1996b). Contributi italiani sul tema “Problemi” (1988-1995). *La matematica e la sua didattica, 10*(3), 300-321.

Forehand, G. A. (1976). *Formulazioni e strategie per la ricerca sulla risoluzione dei problemi*. En: Kleinmuntz B. (Ed.) (1976). Problem solving. Ricerche, metodi, teoria. Armando.

Gagné, R. M. (1962). *The acquisition of knowledge*. Psychological Review. *69*, 355-365.

Gagné, R. M. (1973). *Le condizioni dell'apprendimento*. Roma: Armando. [Ed. orig. 1965, Holt, Rinehart & Winston].

Gagné, R. M. (1976). *Problem solving negli uomini: eventi interni ed esterni.* En: Kleinmuntz B. (Ed.) (1976). Problem solving. Ricerche, metodi, teoria. Armando.133-150.

Gagné, R. M., &Briggs L. J. (1974). *Principles of instructional design*. Holt, Rinehart & Winston.

Gagné, R. M., &Brown, L. T. (1961). Some factors in the programming of conceptual learning. *Journal of Experimental Psychology*, *62*, 313-321.

Gagné, R. M., Mayor, J. R., Garstens, H. L., &Paradise, N. E. (1962). Factors in acquiring knowledge of a mathematical task. *Psychological Monographs: GeneraI and Applied*, *7*, 76.

Gagné, R. M., &Paradise. N. E. (1961). Abilities and learning sets in knowledge acquisition. *Psychological Monographs: General and Applied*, *75*(14), 1-23.

Hadamard, J (1945/1993). *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*. Milano: Raffaele Cortina. [Ed. orig. 1945: Psychology of Invention in the Mathematical Field. Dover].

Kleinmuntz, B. (Ed.) (1976). *Problem solving*. Ricerche, metodi, teoria. Armando.

Kline, M. (1973). *Why Jonny Can't Add?* St. Martin's Press.

Pólya, G. (1945/1967). *Come risolvere i problemi di matematica. Logica e euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli. [Ed. or. 1945: How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press].

Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning. *Vol. 1: Induction and analogy in mathematics. Vol. 2: Patterns of plausible inference.* Princeton University Press.

Resnick L. B., &Ford, W. W. (1991). *Psicologia della matematica ed apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. orig. 1981, Lawrence Erlbaum Associates].

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 57-71.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Thom, R. (1970/1980).La Matematica “moderna”: errore pedagogico e filosofico?*L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 3AB(3), 4-24. [Ed. orig. 1970: Les Mathématiques “Modernes”: un erreur pédagogique et philosophique? *L’âge de la science*, *3*, 225-236].

Thom, R. (1973). Modern Mathematics; does it exist? In A.G. Howson (Ed.), Developments in mathematics education. *Proceedings II ICMI 1972*. Cambridge Univ. Press.

Toulouse, É. (1910). *Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle: Henri Poincaré*. Flammarion.

Van Bendegem, J. P. (2016). The Philosophy of Mathematical Practice: What Is It All About? In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Survays* (pp. 13-18). Faculty of Education, University of Hamburg.

Zalamea, F. (2012). *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. Sequence Press.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Pitagora

Zan, R. (2000). *L’insegnante come solutore di problemi. La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 48-71.

Zan, R. (2002). I comportamenti dei bambini di fronte al problema scolastico standard: alcune riflessioni. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 278-305.

Zan, R. (2007). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *30A-B*(6), 741-762.