ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6741

Modelización de integrales impropias, un estudio de caso

Mateus-Nieves, Enrique [a]
Hernández Montañez, Wilfaver [b]

[a] Universidad Externado de Colombia, Bogotá. D. C., Colombia
[b] SED Bogotá. Bogotá. D. C., Colombia

Recebido para publicação 13 jul. 2021. Aceito após revisão 29 jul. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: se evidencia en los estudiantes universitarios poca claridad en la aplicación de contenidos relacionados con integrales impropias debido a una ausencia de significado que no les permite hacer conexión con el entorno y con problemas de la vida cotidiana. **Objetivo**: reconocer a las integrales impropias como una herramienta matemática con múltiples aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas. **Diseño**: investigación-acción de enfoque cualitativo, **Entorno y participantes**: estudiantes universitarios de ingeniería. **Recogida y análisis de datos:** se diseñó y aplicó una propuesta que busca articular la modelización matemática con el uso de software, donde se experimentó y resolvió una secuencia de diez situaciones seleccionadas que involucran este tipo de integrales. **Resultados**: Se destaca la importancia de la modelización como recurso didáctico-dinámico porque ayuda a los estudiantes a alcanzar y comprender situaciones reales que involucran integrales impropias en diferentes contextos. **Conclusiones:** A pesar de los numerosos errores detectados en los estudiantes, esta estrategia permitió evidenciar desarrollo de competencias matemáticas en los jóvenes, manifiestas en progreso de habilidades del pensamiento matemático avanzado.

Palabras clave: Integrales impropias, Modelización matemática, Estudiantes de ingeniería.

Modelling improper integrals, a case study

ABSTRACT

Background: University students show little clarity in applying content related to improper integrals due to a lack of meaning that does not allow them to connect them with the environment and everyday life problems. **Objective:** To recognise improper integrals as a mathematical tool with multiple applications inside and outside mathematics. **Design:** Qualitative action research. **Setting and**

Corresponding author: Mateus-Nieves, Enrique. jeman124@gmail.com

participants: University engineering students. **Data collection and analysis:** A proposal was designed and applied to articulate mathematical modelling by using software, where a sequence of ten selected situations involving this type of integrals was experimented and solved. **Results:** The importance of modelling as a didactic-dynamic resource is highlighted because it helps students to reach and understand real situations involving improper integrals in different contexts. **Conclusions:** Despite the numerous errors detected in the students, this strategy made it possible to demonstrate that they developed mathematical competencies, which was manifested in the progress of advanced mathematical thinking skills.

Keywords: Improper integrals, Mathematical modelling, Engineering students.

Modelagem de integrais impróprios, um estudo de caso

RESUMO

Contexto: os estudantes universitários mostram pouca clareza na aplicação de conteúdos relacionados com integrais impróprios devido a uma falta de significado que não lhes permite fazer uma ligação com o ambiente e com os problemas da vida quotidiana. **Objetivo:** reconhecer os integrais impróprios como uma ferramenta matemática com múltiplas aplicações dentro e fora da matemática. **Concepção**: investigação de ação qualitativa. **Cenário e participantes**: estudantes universitários de engenharia. **Recolha e análise de dados**: foi concebida e aplicada uma proposta que procura articular a modelação matemática com a utilização de software, onde foi experimentada e resolvida uma sequência de dez situações selecionadas envolvendo este tipo de integrais. **Resultados**: a importância da modelação como recurso didático-dinâmico é realçada porque ajuda os estudantes a alcançar e compreender situações reais que envolvem integrais impróprios em diferentes contextos. **Conclusões:** Apesar dos numerosos erros detectados nos estudantes, esta estratégia permitiu demonstrar o desenvolvimento de competências matemáticas nos jovens, manifestado no progresso de competências avançadas de pensamento matemático.

Palavras-chave: Integrais Impróprios, Modelagem Matemática, Estudantes de engenharia.

INTRODUCCION

En la práctica docente universitaria se observan dificultades en los alumnos que toman el curso Cálculo II. Se observa escasa claridad en la aplicación de contenidos con la solución de situaciones problémicas, lo que muestra una falta de conexión con el entorno y con problemas cotidianos que involucran el aprendizaje de integrales impropias[1]. Conceptos de importancia para los alumnos que estudian matemáticas o ingeniería por la cantidad de aplicaciones que tienen, entre ellas: cálculo de probabilidades para definir reglas funcionales, cálculo de transformadas de Fourier y Laplace, cálculos físicos como trabajo y energía, entre otras.

Este trabajo busca aportar elementos que ayuden a resolver la necesidad de mostrar y manipular la aplicación de contenidos matemáticos en problemas concretos propios del quehacer profesional. Para ello, se seleccionaron y aplicaron diez situaciones problema específicas de ingeniería que implican el uso de este tipo de integrales. Por razones de espacio, aquí presentamos una de ellas, elegida porque ofrece elementos de análisis que ayudan a enriquecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje de este objeto matemático, que poco ha sido tratado en la literatura existente. A partir de esta selección, se describe una propuesta de modelización matemática en la que el profesor experimenta y resuelve la situación seleccionada, a partir de una adaptación propia de la propuesta de Blum & Borromeo-Ferri (2009), visualizándola como instrumento de investigación y al mismo tiempo como estrategia didáctica. Este trabajo se realizó en dos momentos, como estrategia se incorporó el uso de una herramienta tecnológica.

Entre los resultados encontrados, se destaca la importancia de utilizar la modelación matemática como un recurso didáctico, dinámico-metodológico, que ayuda a los estudiantes a comprender situaciones reales, relacionarlas con problemas factibles de matematizar situaciones de carácter tanto intra como extra matemático. Esta estrategia proporcionó a los alumnos la posibilidad de posicionarse en relación con los objetos estudiados, evidenciado en desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático avanzado, tales como: abstraer, representar, conceptualizar, inducir y visualizar diferentes situaciones problema, que les permitió sintetizar, definir demostrar, formalizar y generalizar. En otras palabras, permitió evidenciar desarrollo de competencias propias de las matemáticas avanzadas.

[1] Integral definida que cubre un área no limitada; cuando uno o ambos límites de integración son infinitos o cuando el integrando considera una función con un número finito de discontinuidades en el intervalo en cuestión.

ANTECEDENTES

Presentamos este apartado desde dos miradas: Modelación matemática y trabajos adelantados con integrales buscando centrar el interés en integrales impropias.

Con relación a Modelación matemática

Blomhøj (2004) plantea que la modelización como estrategia didáctica acerca efectivamente a los estudiantes a las dimensiones conceptuales y algorítmicas del cálculo, permitiéndoles establecer una conexión entre los conceptos del Cálculo Integral, los algoritmos que lo caracterizan y que están presentes en su quehacer profesional. Por su parte, Villalobos, Brenes & Mora (2012) muestran algunas ventajas que ofrece la modelización matemática dado que permiten la posibilidad de representar un problema, tomar decisiones, generar y verificar hipótesis, hacer predicciones y dar interpretaciones en un contexto específico, favoreciendo el aprendizaje por descubrimiento y por cooperación, así como el desarrollo de habilidades y actitudes positivas relacionadas con la toma de decisiones e interacción entre pares. Mateus-Nieves (2022) considera que el aprendizaje de las matemáticas provee apoyo cognitivo a las conceptualizaciones estudiantiles colocando esta ciencia en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria, desde la matemática universitaria. Destaca la importancia de estudiar invariantes topológicas porque permiten encontrar diferencias y similitudes en trayectorias tridimensionales cerradas, elementos que conforman la estructura de una superficie.

Relacionados con integrales

Alanis y Soto (2012) afirman que la enseñanza tradicional del cálculo no logra que los estudiantes reconozcan, comprendan o apliquen el concepto de integral en contextos que no han sido estudiados en clase. Thompson, Byerley & Hatfield (2013) proponen una aproximación conceptual al cálculo mediante el uso de recursos tecnológicos (específicamente simulaciones). Donde la enseñanza de la integral no se limita al cálculo del área demarcada por una curva, como se hace tradicionalmente, sino que las actividades se realizan dentro de contextos que responden a situaciones concretas.

Mateus-Nieves (2016) realiza un análisis didáctico sobre cómo tres grupos de estudiantes universitarios aprenden a utilizar el método de integración por partes (MIP). Identifica dificultades en los estudiantes para reconocer el tipo de integral involucrada en la situación planteada. Muestra cómo los alumnos hacen uso mecanicista del algoritmo MIP, sin comprenderlo, a través de ejercicios repetitivos. Enfatiza que es posible que los estudiantes comprendan y apliquen sólidamente este trabajo con integrales, si las entienden, es decir, si se dan cuenta de la relación que mantienen con la estructura relacional de los problemas a los que se aplican. Este mismo autor en (Mateus-Nieves, 2019) presenta una ampliación de la investigación de 2016, con un estudio para la integral desde tres dimensiones: epistémica, para abordar la génesis histórica del concepto; cognitiva, para considerar las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemáticas que involucran el concepto. Y didáctica, donde propone situaciones problema que pretenden enriquecer el campo de las prácticas sociales que se abordan con el concepto. A partir de este estudio, indica que las nociones matemáticas para la integral tienen un alto nivel de abstracción, fundamental en el desarrollo de las matemáticas avanzadas y de difícil aprendizaje para los estudiantes, por lo tanto, un estudio que tenga en cuenta las condiciones lógicas involucradas en el proceso de constitución de este objeto matemático, contribuye a una mejor comprensión del mismo y a su posible articulación.

Mateus-Nieves & Hernández (2020) presentan un estudio realizado con tres grupos de estudiantes universitarios que aprenden Cálculo Integral. Rediseñan la estructura curricular del curso de Cálculo II, articulando las dimensiones epistémica, cognitiva y didáctica para los diversos significados identificados para la integral, buscando que los estudiantes den sentido a lo que llaman en su trabajo significados parciales para la integral. Muestran la integral como una herramienta de resolución de problemas, donde los alumnos alcanzan un nivel de abstracción, fundamental en el desarrollo de la matemática avanzada. Identifican la percepción implícita de una cultura en el profesor y en los alumnos, donde aprender a decir qué es la integral y representarla geométricamente, sin tener una comprensión de la misma, es suficiente para aprobar la asignatura (ratificando la presencia de un enfoque puramente formal-mecanicista).

Mateus-Nieves (2020) presenta una reflexión sobre el trabajo con integrales impropias donde destaca que la enseñanza tradicional no lleva a los alumnos a adquirir la capacidad de comprender que existe un objeto matemático llamado "integral", que a su vez es unitario y sistémico, que está constituido por varios significados (tipos de integrales), y que éstos pueden ser utilizados en diferentes situaciones de carácter intra y extra matemático. Mateus-Nieves (2021) indica que la enseñanza tradicional se mantiene con un enfoque mecanicista, que evalúa a los estudiantes de tal manera, que sólo aplican un algoritmo, de manera iterativa, sin entender lo que están haciendo ni los beneficios de utilizar esta herramienta. Este tipo de enseñanza sugiere que lo importante es dominar los procedimientos para resolver ejercicios, o memorizar definiciones y entender la demostración de teoremas (enfoque formal), dejando de lado la utilidad y riqueza de este ente matemático para la resolución de problemas.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo se fundamenta en la modelización matemática articulada con la enseñanza del cálculo integral mediado por el uso de software matemático.

Modelización matemática

Adoptamos la posición teórica de Blum & Borromeo-Ferri (2009), como el proceso de construcción de un modelo dirigido desde una situación real a un modelo matemático. Mateus-Nieves (2022 en prensa) muestra como materializar este proceso: considera el ciclo de modelización propuesto por Blum & Leiß (2007) en términos de 7 transiciones: 1) el problema o la situación propuesta debe ser entendida por el estudiante, esto es, debe construir un modelo de la situación (transiciones: comprensión y construcción); 2) la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisa (transiciones: simplificación y estructuración), dando lugar a un modelo real de la misma; 3) transición: matematización, transforma el modelo real de la situación en un modelo matemático; 4) transición: trabajo matemático, la puesta en práctica del modelado debe producir resultados matemáticos; que, 5) deben ser interpretados en el mundo real (transición: interpretación); 6) transición: validación y verificación de resultados, aquí es posible que sea necesario reiniciar un ciclo donde sea preciso repetir alguna(s) transición (es). El ciclo se cierra cuando el alumno expone el problema y su posible solución.

Mateus-Nieves (2022) plantea el ciclo de modelización desde dos momentos: 1) de *sensibilización,* con el objeto que el estudiante desarrolle la intuición a partir de identificar, describir y analizar las acciones que llevan a cabo cuando cubren las subcompetencias trazadas para las transiciones: *construcción y estructuración* (propuestos en el cuadro 1 mostrado en la sección de resultados). Este momento inicia con una situación dada en el mundo real, que puede ser a partir de una imagen, un texto o ambos, luego existe una transición, equivalente al entendimiento parcial del problema, que puede ser a nivel implícito e inconsciente para el modelador. La transición a la *estructuración* se logra cuando el estudiante alcanza una representación mental de la situación, donde toma decisiones y filtra información del problema. Aquí depende del estilo de pensamiento matemático del individuo ya que en este momento es donde se define cómo tratar el problema en las próximas transiciones del ciclo de modelización. 2) Momento de implementación y evaluación, donde se buscó articular las transiciones: *matematización, resolución, interpretación, validación y exposición*. Con este proceso se logra la idealización y simplificación del problema, haciendo que el proceso sea más consciente para el estudiante. La modelización real muestra cómo es construido el modelo a partir de dibujos o fórmulas que representan la situación real planteada, que depende de las declaraciones verbales, el sustento de las representaciones externas que debe incluir el conocimiento extra matemático que posee la persona y que relaciona con el modelo real construido.

En la transición del ciclo de modelización propuesto es posible demostrar las dificultades y los progresos de los alumnos, como forma de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Durante el proceso de modelización se espera que el alumno sustituya el objeto cognitivo por su imagen matemática. El modelo matemático combinando la teoría con el experimento, se facilita cuando se utilizan herramientas tecnológicas como el ordenador y diferente software matemático. Mateus-Nieves & Hernández (2020. p. 201) afirman que "el proceso de construcción de conceptos abstractos como la integral es de difícil comprensión para el estudiante", por lo que en este trabajo se asume la modelización matemática como herramienta didáctica para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de este tipo de integrales buscando cambiar en enfoque formal mecanicista que tradicionalmente se ha venido implementando.

Durante la transición del ciclo es clave que tanto el modelador (profesor), como los estudiantes reconozcan que se requiere conocimiento extra matemático para la construcción del modelo matemático, dado que aparecen representaciones externas por dibujos o fórmulas, donde las declaraciones deben ser a nivel matemático, lo que implica, hacer trabajo matemático. Las competencias matemáticas del modelador, para obtener resultados matemáticos, deben ser interpretadas, incluso de manera inconsciente, para obtener resultados reales validables, discutiendo la correspondencia entre los resultados reales y la representación mental de la situación.

Blum & Borromeo (2009) plantean que un individuo puede resolver un problema pasando por diferentes transiciones del ciclo sin seguir necesariamente el orden expuesto anteriormente; establecen que este ciclo de modelización puede no definir una trayectoria lineal de pensamiento. Las transiciones del ciclo de Blum & Leiß (2007) citadas en Mateus-Nieves (2022) constituyen puntos de referencia para el análisis de las estrategias de modelización, que permiten estructurar la búsqueda y categorización de los posibles errores que puede cometer un alumno. El estudio de dichas estrategias y de los errores junto con la identificación de los tipos de pensamiento proporcionan herramientas para un proceso de análisis-síntesis que permite elaborar el perfil y detectar necesidades formativas en los alumnos participantes.

Integrales impropias

Dentro del campo de la integración, ocupa un lugar especial las integrales impropias, motivo del estudio de este documento, porque representan una herramienta potente cuando se tienen integrales definidas en donde uno o ambos límites de integración son infinitos o bien, cuando el integrando considera una función con un número finito de discontinuidades en el intervalo en cuestión. La convergencia de la integral se da si el límite existe, en caso contrario se dice divergente. En el estudio de la integral definid $\int_a^b f(x)\,dx$ se ha a sobre entendido, hasta ahora que: 1) Los límites de integración son números finitos. 2) La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Si f es discontinua debe ser acotada en este intervalo. Cuando se elimina una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una *integral impropia* qué puede ser clasificada como de primera segunda o tercera especie. Es importante aclarar al estudiante que toda integral impropia puede mediante un cambio de variable adecuado, transformarse en una integral impropia de primera especie. Uno de los temas a trabajar con este tipo de integrales son los criterios de comparación que aquí describimos para integrales impropias de primera especie.

> *Primer Criterio de Comparación*: Sean f y g dos funciones de $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ que son integrables en el intervalo $[a, \alpha], \forall \alpha \geq a,$ tales que existe un número $b > a$ y $0 \leq g(x) \leq f(x)\ \forall x \geq b$. Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente (divergente), entonces la $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente (divergente).

Segundo Criterio de Comparación: Sean f y g dos funciones de $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ que son integrables en el intervalo $[a, \alpha], \forall \alpha \geq a$, tales que $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = L \in \mathbb{R}$:

- Si $L \neq 0$, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ tienen el mismo carácter.
- Si $L = 0$ y $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente.

Para poder utilizar alguno de los dos criterios es necesario disponer de una función $f(x)$ de cuya integral impropia sea conocido su carácter. Cuando se trata de alguna aplicación de la integral definida y ésta es impropia, como en el caso de un área bajo la curva, se hace necesario considerar que, si la integral es convergente, el valor del límite que la define será el valor finito del "área infinita". En caso de ser divergente, se considera que el área es infinita.

METODOLOGÍA

Se trata de una investigación-acción de enfoque cualitativo de estudio de caso, donde la intervención pretende demostrar cambios en estudiantes universitarios que cursan Cálculo 2. Se tomó la postura planteada en Simons (1996. p. 174) que muestra técnicas frecuentemente adoptadas en los estudios de caso, como: observación y análisis documental, donde el investigador del caso puede "contar la historia de cómo fue experimentada e interpretada sobre el terreno la innovación, desde la perspectiva y con las palabras de los participantes clave". La flexibilidad del estudio de caso permite seguir y documentar cambios en la muestra, elementos que permiten al investigador estudiar los efectos de la innovación en el tiempo.

Muestra: cincuenta estudiantes de tres carreras de ingeniería, y dos profesores[2] que imparten la asignatura en tres grupos. Se buscó articular la modelización matemática con el uso de software, como metodología de

[2] Tanto los estudiantes como los profesores encargados de impartir la asignatura, fueron personas mayores edad, aprobaron participar libre y voluntariamente de la investigación, mediante consentimiento informado que cada uno firmó, siempre reservando su identidad en los resultados que se exponen. Por ello, los autores eximen explícitamente a Acta Scientiae de cualquier consecuencia derivada de la misma, incluyendo la asistencia integral y eventual compensación por cualquier daño resultante a cualquiera de los participantes de la investigación, de conformidad con la Resolución nº510, de 7 de abril de 2016, del Consejo Nacional de Salud de Brasil.

enseñanza para este tipo de integrales; porque “ayuda a los estudiantes a comprender mejor los contextos en los que se desenvuelven, apoya el aprendizaje de las matemáticas permitiéndoles desarrollo de competencias y actitudes adecuadas hacia las matemáticas” (Blum y Borromeo-Ferri, 2009, p. 47). Se eligieron diez situaciones problémicas, propias de ingeniería cuya solución implica el uso de integrales impropias. Se organizó la muestra en subgrupos de tres alumnos para realizar las actividades programadas en dos momentos: 1. Sensibilización; 2. implementación y evaluación; lo que permitió, desde los registros en diario de campo, hacer seguimiento exhaustivo al desarrollo alcanzado por cada estudiante.

El primer momento de *sensibilización* se desarrolló a lo largo de tres semanas. Como aprestamiento a lo que aquí se denomina pre-modelacion; se introdujo a la muestra en situaciones matemáticas problema de contexto real, desde dos estrategias: 1) presentar los contenidos del programa a partir de un modelo matemático conocido, por ejemplo, la integral definida enseñada como técnica para calcular una antiderivada (presentación y manejo del algoritmo). Conceptualización de la integral definida desde diferentes significados[3], entre ellos: antiderivada de una función; área bajo la curva; noción de acumulación y tasa de cambio como procesos mutuamente dependientes. Objetivo: permitir a los alumnos interpretar estos significados, articulándolos a diferentes situaciones problémicas; inicialmente, a situaciones de carácter intra y posterior a otras situaciones extra matemáticas. Cada situación analizada debía primero ser graficada en el cuaderno, luego utilizando GeoGebra online y otros programas de graficación de libre acceso a elección de los estudiantes. De esta manera los alumnos se familiarizaron con las diez situaciones, visualizar las gráficas de las regiones, identificar, relacionar y ampliar el significado de la integral como razón de cambio, facilitando un acercamiento a la noción de acumulación, como procesos mutuamente dependientes. 2) Implementar en algoritmos lógico-numéricos (del software elegido), las cualidades presentes en la situación dada. El objetivo de este momento fue identificar, describir y analizar las acciones que los alumnos realizan ante las situaciones problema planteadas y cuál significado le asignan a un objeto matemático que requiere el uso de integrales impropias con funciones de una variable. Esto para cubrir los pasos 1 y 2 de transición del ciclo de modelización propuesto en la tabla 1.

[3] El significado de una matemática se refiere al uso que se le da en el juego de lenguaje en el que participa. Godino (2002) indica que el significado (de un objeto matemático) está vinculado a los problemas en los que participa y a las acciones que se realizan para resolver esos problemas.

El segundo momento de *aplicación y evaluación*, buscó matematizar la situación a partir de los datos del contexto, síntesis y regreso al contexto real, buscando articular los cinco pasos de transición del ciclo propuesto en la tabla 1. Objetivo: asegurar que los alumnos matematicen la situación problémica propuesta; interpretar las posibles vías de solución y validar si la respuesta alcanzada satisface las necesidades planteadas en la situación. Como estrategia pedagógica cada subgrupo entregó un informe escrito donde compartieron los resultados alcanzados. Los investigadores, de forma anónima, compartieron cada trabajo con el grupo general independiente si la respuesta encontrada satisfacía o no la petición del problema. La idea del anonimato fue: conseguir seguridad y confianza en los alumnos al observar la exposición de su trabajo sujeto a las observaciones del grupo general, que ningún alumno se sintiera en desventaja con respecto a sus compañeros al exponer su trabajo; de ello se dejó registro escrito en el diario de campo.

En ambos momentos el trabajo en subgrupos buscaba que los alumnos discutieran, analizaran, construyeran, investigaran las posibles soluciones a las situaciones propuestas y finalmente entregaran un informe escrito, donde sólo los investigadores sabían a qué subgrupo correspondía cada producción. El grupo general debía comprobar si la propuesta de modelización ofrecida respondía a las necesidades planteadas en el problema, si eran suficientes o incompletas. Para este manuscrito, los investigadores seleccionamos una de esas situaciones, por caracterizarse como representativa de las bondades y dificultades percibidas en los estudiantes durante el desarrollo del ciclo de modelización y que consideramos aporta a los procesos de enseñanza y de aprendizaje del cálculo integral. Se comparte en detalle a continuación.

RESULTADOS Y ANALISIS

Se buscó articular el ciclo de modelización matemática con el uso de software en los ambos momentos; partimos de la premisa que la incorporación de la tecnología como parte del proceso, despliega la autonomía en los estudiantes con respecto al profesor; les permite desarrollar habilidades para la búsqueda de información y mayor participación e interés en la clase. La tabla 1 muestra el proceso seguido. Cabe aclarar que luego de ser analizadas y discutidas las respuestas ofrecidas por los subgrupos con el grupo general, cada subgrupo presentó un informe escrito como soporte del trabajo realizado, en el que hicieron los ajustes requeridos a las 10 situaciones propuestas, de acuerdo con las discusiones plenarias sobre la idoneidad de las situaciones y la formalización del contenido del programa por parte del profesor.

Tabla 1

Articulación ciclo de modelización matemática. (Creación propia)

Momentos	Transiciones Ciclo de modelación	Sub competencias desde el Cálculo Integral
1 de sensibilización	Entendimiento parcial del problema	Presenta el algoritmo para calcular una antiderivada (presentación y manejo del algoritmo, regla de Barrow). Identifica la relación entre: área bajo la curva y la integral definida. Representa la función en el plano cartesiano y determinar la región que define el área solicitada. Utiliza el software en línea para identificar y visualizar la gráfica de la región.
	Representación mental de la situación	Indica la definición funcional de la figura bidimensional representada en el plano. Representa en un diagrama todas las ecuaciones (rectas y curvas) que representan las partes de la función representada. Construye las gráficas de las ecuaciones considerando el dominio de la función representada. Reconoce que la integral definida de la tasa de cambio de una cantidad da el cambio neto de esa cantidad. Asocia esas integrales definidas: describen la acumulación de una cantidad, por lo que la integral definida da el cambio neto de esa cantidad. Relaciona la tasa de cambio y la acumulación como procesos claramente dependientes
	Idealización y simplificación del problema (Interpretación)	Indica el área cubierta por la función en la variación asignada para x. Reconoce el área de la región como la integral definida en el intervalo dado. (Suma de Riemann). Identifica, a partir del programa, el volumen y/o la superficie del sólido de revolución. Relaciona el volumen y/o el área de la superficie como resultado del cálculo de una integral impropia.
2 aplicación y evaluación	Modelo real (Matematización -Resolución)	Relaciona la superficie de la figura tridimensional con la superficie bidimensional previamente calculada. Relaciona las unidades de medida para cada caso. Establece el sólido de revolución que representa la situación dada. Construye figuras tridimensionales a partir de funciones bien definidas, digitalizadas en el software de un sólido de revolución. Expresa y registra correctamente en el software los intervalos en los que se analiza la función que representa la situación problemática propuesta. Calcula el volumen y/o la superficie del sólido de revolución y expresar el resultado utilizando las unidades de medida específicas. Diagrama el sólido correspondiente en el software.

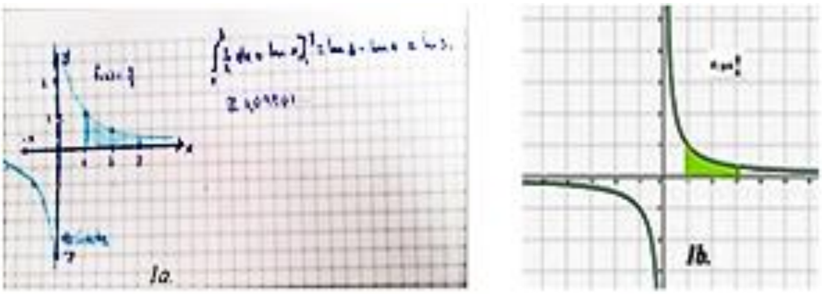
Validación	Expresa de forma concreta y en un contexto real los resultados encontrados relacionados con la superficie y el volumen del sólido generado. Reconoce las unidades de medida de la superficie y el volumen generados por el sólido. Comprueba si los resultados obtenidos se corresponden con la situación planteada y satisfacen las necesidades solicitadas. Socializa el proceso desarrollado a lo largo de la experiencia. Sustenta coherentemente el trabajo desarrollado y la posible extensión a otras posibles situaciones.

Primer momento: de sensibilización

Se muestra la situación seleccionada, ya que ofrece elementos de análisis que aportan a la investigación. Durante la pre-modelacion matemática como estrategia, los alumnos ya habían aprendido qué es una integral definida y cómo se calcula. Se pidió que graficaran en sus cuadernos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y calcular el área de la región incluida en el intervalo $1 \leq x \leq 3$. Luego tenían que explicar cómo habían realizado este proceso y cuál era el valor del área (Figura 1a), posteriormente debían pasar al software y realizar los cálculos. Comparar los resultados y decidir sobre las ventajas de utilizar la tecnología (Figura 1b).

Figura 1

Producción de E13, 1.a. Producción en el cuaderno; 1b producción con el software



Se les pidió graficar e interpretar lo que sucede si ampliamos el intervalo de integración entre $1 \leq x \leq \infty$ (Figura 2), y expresar la integral. La respuesta obtenida fue: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ a pesar que hasta ese momento, no se había definido que este registro corresponde a una *nueva integral*, llamada *impropia*, que implica un trabajo adicional al aplicado a las integrales definidas. Se les preguntó, *¿esta integral les permite calcular el área de la región delimitada por la curva en el intervalo dado*? Algunos alumnos matematizaron utilizando lápiz, papel y calculadora tratando de encontrar una respuesta, el alumno E3 mencionó: "*profesor, en la calculadora nos salió error matemático*, *¿hemos hecho algo mal*?" el profesor a cargo les preguntó *¿cómo hicieron el trabajo*? Este subgrupo no logró responder cuando otro compañero, E12 dijo: "*nosotros no lo hicimos en el cuaderno, usamos el software y dice que la integral es divergente, ¿qué significa, profe*?" (Figura 2b), E39 dice: "*profesor, ¿por qué cada subgrupo tiene una respuesta diferente?* [registros tomados del diario de campo correspondiente al subgrupo 3]. A partir de estas producciones se formalizó la matematización de una integral impropia como una integral definida donde uno, o ambos limites pueden contener el infinito, o como aquellas donde existen discontinuidades para la función sobre el intervalo en cuestión, buscando articular estos significados con las tres especies de integral impropia, y a su vez, estos con diferentes situaciones problémicas.

Luego que se hubo formalizado el concepto de integral impropia, y las tres especies, en las actividades dadas a los alumnos, les pedimos que ampliaran el concepto girando esta figura sobre el eje x del plano[4], debían graficar el resultado en papel; la figura 2c muestra la producción del alumno E24. Luego debían repetir el proceso en el software, comparar las imágenes, discutir la situación y pensar si era posible calcular el volumen y la superficie de esa porción de sólido que se formó, formalizando que en matemáticas a esta construcción se le conoce como "*trompeta de Torricelli*" o "*cuerno de Gabriel*".

[4] Se les señaló previamente que este tipo de giro en la función genera un sólido de revolución.

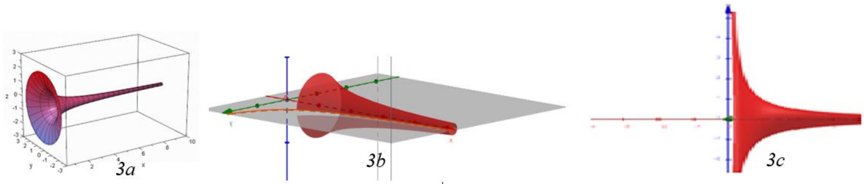
Figura 2

2a. Trazado de la curva en el intervalo $1 \leq x \leq \infty$*. 2b producción de E21 en el software. 2c producción de E24.*

El subgrupo del alumno E19 utilizó applets de GeoGebra online, proporcionó las imágenes relacionadas en la figura 3 para responder a las preguntas anteriores. Esta visualización en 3D les permitió observar la variación del tamaño del sólido a medida que *x* se acercaba al infinito o retrocedía hacia 1, así como la formación del sólido al variar *y*.

Figura 3

Trazado de la trompeta de Gabriel. 3ª cuerno de Gabriel[5]*; 3b. Trompeta de Torricelli*[6]*; 3c trompeta de Torricelli*[7] *cuando se analiza* $x \in (0, \infty)$.



De esta situación tomada de los registros del diario de campo correspondiente al subgrupo 14 podemos analizar: se trata de un problema enmarcado en un contexto puramente matemático. Es una función que está en un intervalo abierto por derecha, se pide que intenten calcular el área (la integral)

---

[5] Imagen disponible en https://maskupnfm.wordpress.com/2011/11/10/cuerno-de-gabriel/

[6] Sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la superficie delimitada por la curva $y = \frac{1}{x}$ y el eje *x* del plano. Fuente: https://www.geogebra.org/m/th9kdb8c

[7] Para comprender mejor estas dificultades, se recomienda profundizar en los aspectos epistemológicos y cognitivos de estos conceptos.

utilizando métodos gráficos y numéricos. De los resultados entregados, podemos diferenciar dos tipos de estudiante, los del primer grupo están más seguros de sus conocimientos y se arriesgan a realizar el trabajo utilizando su cuaderno y calculadora, los del otro grupo utilizan directamente el software. En ambos tipos de alumnos se observa el uso de registros de representación semiótica gráfica y algebraica. Todos realizan los gráficos bien, situados sobre el eje en el intervalo solicitado, luego la construcción del sólido de revolución. Esto muestra un adecuado manejo de los procedimientos instrumentales, uso de representaciones gráficas y simbólicas. Pero al calcular el área de la región esperaban valores aproximados del área total como si fuera una "integral definida". Los alumnos que utilizaron el software, al ver la respuesta "*la integral diverge*" (Figura 2b), muestran desconcierto porque esperaban una cifra numérica, los alumnos que hicieron su trabajo en el cuaderno se equivocan al tomar los extremos del intervalo de integración en los puntos de discontinuidad de la función, en este caso ∞ y evaluarlos de la misma manera que en la figura 1a. este error podría estar relacionado con al menos dos conceptos centrales del cálculo: *continuidad* y *completitud* de los números reales no tratados en este trabajo.

Observamos en los alumnos que la discontinuidad de las funciones los lleva a cometer una serie de errores en los que aplican los métodos gráfico, numérico y algebraico como procedimientos rutinarios sin cuestionarse la mejor forma de resolver el problema. La resolución algebraica la extrapolan directamente de la aplicada a la integral definida, E18 mencionó: "*lo que hicimos fue aplicar la regla de Barrow, luego tendimos el límite y nos dio un valor*". Por otro lado, los alumnos que utilizaron directamente el software no fueron capaces de establecer una conexión entre los resultados obtenidos con los registros algebraicos y gráficos, no identificaron coherentemente la información proporcionada por el problema, como tampoco coordinan coherentemente los diferentes registros utilizados con los datos proporcionados por el software. Resuelven la tarea correctamente, pero no saben interpretarla porque desconocen el proceso seguido (el paso a paso), realizado por el software. Cabe destacar que algunos alumnos que repiten la asignatura identifican que se trata de una integral impropia, en lugar de la integral ordinaria de Riemann, sin embargo, en la interpretación fallan porque les cuesta expresar de forma concreta y en un contexto real los resultados encontrados relacionados con la superficie y el volumen del sólido generado. Para estos alumnos todavía no está claro que aplicar una integral impropia donde uno de sus límites es infinito esté relacionado con la evaluación de la integral de una función de densidad de probabilidad[8].

Posteriormente, a partir de esta situación concreta, se experimentó, resolvió y formalizó la existencia de integrales impropias, determinando las condiciones necesarias para clasificarlas como de primera, segunda o tercera especie. Las de tercera especie se formalizaron a partir de la pregunta: *¿es posible considerar la trompeta de Torricelli cuando $x \in (0, \infty)$?* (figura 3c). A partir de ahí se definió este tipo de integral como la suma $\int_0^\infty \frac{1}{x}\, dx = \int_0^a \frac{1}{x}\, dx + \int_a^\infty \frac{1}{x}\, dx,\ a \in (0, \infty)$.

A partir de esta modelización previa, se propusieron otras situaciones en las que los alumnos debían esbozar una posible matematización que les permitiera encontrar algún tipo de solución factible. La secuencia de actividades programadas se diseñó de forma que los alumnos pudieran justificar los procesos seguidos. Para fijar los conceptos, utilizamos ejemplos analógicos que pudieran relacionarse con su vida cotidiana, por ejemplo, calcular corrientes, capacitancias, tiempos de carga y descarga de corriente; determinar las fuerzas que ejerce un fluido en el extremo de un tanque, entre otros. Se pudo comprobar que en ese momento los alumnos estaban preparados para abordar los pasos necesarios que implica la metodología del ciclo de modelización.

Segundo momento: de aplicación y evaluación

Buscamos articular matematización vs validación (Modelo real), respondiendo a los objetivos planteados en la tabla 1. Para este momento retomamos el trabajo adelantado por los alumnos cuando construyeron la gráfica en papel de la función $\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$, luego en $1 \leq x \leq \infty$. Posteriormente se formalizó que, al girar esta figura sobre el eje *x* del plano, se genera un sólido de revolución. Debían visualizar la región, trazar la figura tridimensional en un dibujo bidimensional, en sus cuadernos. Construir funciones bien definidas que permitan visualizar en el software la figura tridimensional. Aquí se detectaron dificultades en los alumnos en los siguientes aspectos: *estructuración*, si bien el gráfico (modelo) construido era correcto, no les ofrecía la posibilidad de identificar la(s) expresión(es) algebraica(s) que representa(n) la región, esto se observó porque los estudiantes no toman en cuenta los conocimientos

[8] Esta función evalúa la probabilidad de que un evento particular ocurra en algún número del intervalo [0,1].

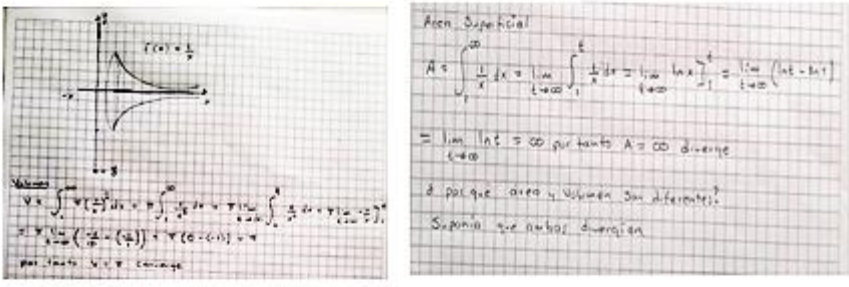
adquiridos previamente. Se identificó que *la transición entre el registro gráfico y el algebraico* fue bastante difícil para ellos. Señalamos que en algunos casos las ecuaciones presentadas no correspondían con la figura dibujada. Se pidió reflexionar sobre esta situación y realizar ajustes, aspecto que dificultó su proceso de aprendizaje. En particular, se identificaron dificultades para calcular el volumen, dado que algunos alumnos no lo relacionan con un sólido de revolución, creemos, porque no han desarrollado la capacidad de coordinar resultados e intuiciones para presentarlos formalmente.

Al presentar debilidades en los dos aspectos mencionados en el párrafo anterior, identificamos que falló la interpretación, manifiesta en dificultades para reconocer y relacionar que el volumen es finito pero la superficie es infinita, esto para la trompeta de Torricelli, en la figura 4 se muestra la producción en papel del alumno E20 a quien le cuesta entender los cálculos realizados; en la parte inferior escribe: "*¿por qué área y volumen son diferentes? supuse que ambos divergían*" [registros tomados del diario de campo correspondiente al subgrupo 9], esto nos permite evidenciar que para él, el hecho de pensar que la función tiende a infinito, implícitamente en su mente, la integral debe ser divergente, este razonamiento es provocado por el registro gráfico dado que la trompeta se extiende "infinitamente". Aquí surgió el interés de los investigadores por determinar cuántos alumnos se dieron cuenta de esta situación. Observamos 16 de 45, lo que permite inferir que la mayoría muestra una falta de significación de los conceptos anteriores y los relaciona con el registro gráfico; en términos de González-Martín (2002) este es un obstáculo de *compacidad vincular*, pues parece que estos alumnos sólo conciben un volumen como finito si la figura es cerrada y acotada.

Dificultades similares fueron evidenciadas cuando se trabajaron otras situaciones de las diez propuestas, entre ellas: a) calcular el trabajo realizado para elevar un objeto de masa m a una altura definida h; luego determinar el trabajo necesario para impulsarlo a una distancia infinita de la Tierra. b) determinar la fuerza de gravedad ejercida por una varilla uniforme cuya densidad es ρ=4 Kg/m y que ocupa toda la parte positiva del eje x ($x \geq 0$), sobre una masa $m = 1Kg$, situada en el punto de coordenadas (-2m,0).

Figura 4

Producción del estudiante E20



El trabajo realizado puso de manifiesto la creatividad de los alumnos, ya que cada subgrupo, al enfrentarse a la construcción de la figura propuesta, tuvo que imaginarla descompuesta en piezas bidimensionales. Esta actividad les permitió comprender la importancia de la continuidad de una función, identificar el dominio, el rango y establecer la diferencia entre función y relación. Así como la transición entre la representación gráfica y su correspondiente ecuación. Es decir, superar las dificultades encontradas en el momento de sensibilización (aspectos: entendimiento parcial del problema, representación mental de la situación e interpretación del problema).

Progresivamente se buscó integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento, particularmente la física, lo que permitió observar en los estudiantes, interés por las matemáticas en relación a su aplicabilidad; aprehensión de conceptos matemáticos y desarrollo de habilidades de pensamiento matemático avanzado, compartiendo la postura planteada por Mateus-Nieves & Rojas, (2020, p. 69) "en la educación superior, la matemática es una parte esencial del proceso de aprendizaje" , "en la educación superior, la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar y formalizar" (p. 70), y entre los procesos cognitivos con componente psicológico: "representar, conceptualizar, inducir y visualizar" (ídem, p. 70).

CONCLUSIONES

El uso de software matemáticos ofrece a los alumnos: claridad en la ejecución y jerarquía de las operaciones, reconociendo las gráficas de una función como categoría que articula la modelización y la tecnología. Aquí compartimos la posición de Trouche (2004) que el uso de recursos tecnológicos como factor de aprendizaje, donde el dispositivo electrónico se convierte en un instrumento para graficar, calcular y resolver situaciones, permite implementar la dupla modelización-tecnología en la construcción del conocimiento matemático en el aula.

Entre las debilidades encontradas que requieren mayor trabajo está el compromiso en el momento de ampliación y evaluación, debido a que, aunque los alumnos intentan hacer interpretaciones de los resultados, no están acostumbrados a explicarlos, esta situación genera inseguridad en el trabajo realizado y la creencia, a veces falsa, en los resultados del software como siempre veraz e infalible, sin considerar que, si los datos se registran incorrectamente, el software producirá inconsistencias como las descritas anteriormente. Por ello, es necesario reconocer que el uso del razonamiento intuitivo, tanto algebraico como gráfico, está relacionado con el nivel de comprensión de los conceptos implicados, de modo que los alumnos con grandes lagunas conceptuales difícilmente podrán utilizar este tipo de razonamiento.

Se observó la creencia generalizada, que las propiedades de una figura, en un número de dimensiones, se mantienen a medida que este número aumenta o disminuye; así, una figura de área infinita debería generar un volumen infinito, posiblemente debido a la ausencia de coordinación entre registros; lo que González & Camacho (2002) llaman presencia del obstáculo de las dimensiones homogéneas. También se evidenció una concepción estática del proceso de límite como una simple operación algebraica, identificada en las dificultades para conceptualizar el cálculo del área de una figura de aspecto infinito.

Entre los errores analizados, destaca la falta de sentido al interpretar erróneamente los enunciados de un teorema o criterio y utilizarlo para resolver una situación no relacionada con el caso, lo que lleva a respuestas incorrectas. Por ejemplo, pensando que una función que es simétrica respecto a un eje axial, la evalúan en un subintervalo de integración, y luego la multiplican por 2, pensando que obtendrán el valor de la integral total, como si el eje de simetría fuera el eje Y del plano. Esto confirma una falta de coordinación entre los registros gráfico y algebraico, así como una mala comprensión de la definición de la integral definida. El hecho de no tener claros los criterios y su uso refleja falta de conexión con los significados atribuidos a la integral. Por ello, consideramos que una correcta comprensión del concepto de integral impropia requiere que el alumno visualice el cálculo de áreas como un proceso dinámico, que le permita concebir la función integral y luego calcular su límite, y no sólo pensar en ella como un área que debe ser siempre positiva.

Dificultades encontradas en el desarrollo de la propuesta

En una de las situaciones[9], fue necesario trabajar el área entre curvas, donde el alumno tuvo que plantear la integral definida y resolverla a partir de la gráfica proporcionada. En la resolución algebraica, extrapolaron el procedimiento utilizando una función a trozos en diferentes subintervalos, mostrando así un adecuado manejo de los procedimientos instrumentales. Sin embargo, en esta situación se observa un limitado desarrollo del pensamiento conceptual, dado que los alumnos se ven impedidos de transitar por las diferentes representaciones semióticas, ya que les resulta difícil establecer una conexión entre los resultados obtenidos con los registros algebraico y gráfico, siendo evidente la incapacidad de identificar coherentemente la información que proporciona el problema y la falta de coordinación coherente entre los diferentes registros utilizados. Resuelven la tarea correctamente con la ayuda del software, pero cometen errores sobre el papel; el hecho de que la función sea continua a trozos parece influir notablemente en su razonamiento. Por lo tanto, consideramos que: plantear este tipo de situaciones requiere de la creatividad del profesor, ya que la evidencia muestra que no se encuentran muchas de estas actividades en los libros de texto propuestos en la bibliografía del curso.

Se evidenció falta de significado de herramientas fundamentales para la comprensión de conceptos tales como: uso de límites, noción de convergencia, definición de integral definida, y algunos conocimientos mínimos de secuencias y series (criterios de convergencia), sin los cuales será difícil adquirir una comprensión adecuada del concepto de integral impropia. Este es un tema que queda abierto para futuras investigaciones. Ratifica lo expuesto en Mateus-Nieves & Moreno (2021) sobre la necesidad de más proyectos de investigación dirigidos a renovar las metodologías de enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas para los estudiantes universitarios, tema poco tratado.

[9] Construye un túnel de 2,3 km de largo por 15 m de ancho. La forma del túnel es un arco cuya ecuación es $y = 25 \cos(\pi x/50)$. A continuación, tienen que calcular el área bajo el supuesto de que el túnel tiene una longitud infinita.

AGRADECIMIENTOS

A los tres grupos de estudiantes y a los dos profesores que nos permitieron observar, grabar y acompañar sus clases, con el fin de ofrecer herramientas didáctico-metodológicas para mejorar su desempeño.

APORTACIONES DE LOS AUTORES

Los autores desarrollaron la investigación en un trabajo equitativo. MNE construyó la estructura formal de este trabajo como resultado.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que apoyan este estudio serán puestos a disposición por el autor si se solicitan razonablemente.

REFERENCIAS

Alanís, J. & Soto, A. (2012). La Integral de funciones de una variable: Enseñanza Actual. *El Cálculo y su Enseñanza*, *3(1),* 1-6.

Borromeo, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 3* (2), 86-95.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application* , *1*(1), 45-58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics,* (p. 222-231). Horwood.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling-A theory for practice. *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, *1*, 145-159.

Byerley, C. & Hatfield, N. (2013). A Conceptual Approach to Calculus Made Possible by Technology. *Computers in the Schools*, 30, 124–147. https://doi.org/ 10.1080/07380569.2013.768941 .

Castro, N. (2013). *Efectos de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la modelación y solución de problemas matemáticos que involucran ecuaciones de primero y de segundo grado* (Trabajo de maestría). Universidad de la Salle. Bogotá.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: Una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (Tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, México D. F.

Godino, J. (2002). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción en matemática educativa. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22(2-3),* 237-284.

González-Martín, S. & Camacho, M. (2002). The comprehension of the concept of improper integral in Mathematics students: representation and transference. In Giménez, J., Hahn, C. y Fitzsimons, G. (eds.). *Proceedings of the 54th* CIEAEM.

Mateus-Nieves, E. (2016). Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. *Bolema, 30*(55)*,* 559-585. http://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a13.

Mateus-Nieves, E. (2019). Extensions to the integral concept. Conference: *Didactic Meeting of Calculus (infinitesimal).* Bogotá, D. C. Project: Doctorado en Educación Matemática. http://doi.org/10.13140/RG.2.2.34282.95689 .

Mateus-Nieves, E. (2020). Una reflexión sobre las Integrales Impropias. Proceedings of the *Didactic Meeting of Calculus (infinitesimal).* Bogotá, D.C. http://doi.org/10.13140/RG.2.2.20792.37123 .

Mateus-Nieves, E. & Hernandez, W. (2020). Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNION, XVI*(60), 196-211.

Mateus-Nieves, E. & Moreno, E. (2021). Development of Variational Thinking for the Teaching of Preliminary Notions of Calculus. A Classroom Experience in Basic Education. *Acta Scientiae*, *23*(2), 113-135. http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716.

Mateus-Nieves, E. & Rojas, C. (2020). Mathematical generalization since the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Scientiae*, (Canoas), 22(3), ISSN: 2178-7727. http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5567.

Mateus-Nieves, E. (2021). Epistemología de la integral como fundamento del Cálculo Integral. *Bolema*, 35(71), 1593-1615, http://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17.

Mateus-Nieves, E. (2022 en prensa). Modelling of the fundamental group of a knot as a strategy for establishing the structure of a Surface. *Bolema,* 36(73).

Simons, H. (1996). El Enfoque de Estudio de Casos en el Proyecto sobre la Enseñanza de Ciencias, Matemáticas y Tecnología (SMTE) de la OCDE. *Revista de Educación*, *310*(19), 173-18

Thompson, P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to Calculus made possible by technology. *Computers in the Schools, 30,* 124-147.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9(3)*, 281–307.

Villalobos, J., Brenes, S., & Mora, S. (2012). Herramienta asistida por computadora para la enseñanza del álgebra relacional en bases de datos. *Revista Uniciencia*, *26,* 179-195.