ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6834

Caracterización de Respuestas de Estudiantes de Educación Secundaria en Problemas de Comparación de Razones

Salvador Castillo [a]
Ceneida Fernández [a]

[a] Universidad de Alicante, Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Alicante, España

Recibido para publicación 15 sep. 2021. Aceptado después de la revisión 29 jul. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: El razonamiento proporcional es una parte fundamental del currículo de Educación Primaria y Secundaria. Sin embargo, las investigaciones han mostrado que estudiantes, tanto de primaria como de secundaria, tienen dificultades para razonar proporcionalmente. La mayoría de estas investigaciones han usado situaciones proporcionales de valor perdido, teniendo poca información sobre cómo los estudiantes de primaria y secundaria dan significado y utilizan los conceptos de razón y proporción cuando resuelven problemas proporcionales de comparación de razones. **Objetivos**: Este estudio se centra en caracterizar cómo estudiantes de educación secundaria (12-16 años) resuelven problemas de este tipo. **Diseño**: Se diseñaron como instrumento de recogida de datos dos problemas de comparación de razones con cantidades intensivas que se podían resolver por parejas de exposiciones o composiciones. **Entorno y Participantes**: Estos problemas fueron resueltos por 248 estudiantes de Educación Secundaria de 1º hasta 4º curso (12-16 años). **Datos recopilados y análisis**: Se llevó a cabo un análisis inductivo de generación de categorías con el objetivo de identificar las distintas actuaciones de los estudiantes. **Resultados**: Se identificaron tres tipos de actuaciones en función de si los estudiantes mostraban comprensión de las cantidades relativas: comparación relativa, tendencia relativa y comparación no relativa. Las subcategorías identificadas en las actuaciones de tendencia relativa mostraron dificultades con las componentes críticas de los problemas: dificultades con el referente y con las técnicas de normalización. **Conclusiones**: Los resultados muestran que, al final de la educación secundaria, los estudiantes siguen teniendo dificultades en la comprensión de razón y de las cantidades intensivas.

Keywords: Razón; Cantidades Intensivas; Comparación de razones; Educación Secundaria.

Autor correspondiente: Salvador Castillo. Email: salvador.castillo@ua.es

Secondary school students’ performances on ratio comparison problems

ABSTRACT

Background: Proportional reasoning is a fundamental part of the Primary and Secondary Education curriculum. However, research has shown that students, both primary and secondary, have difficulty reasoning proportionally. Most of these studies have used missing-value proportional problems, so studies focused on how primary and secondary school students use the concepts of ratio and proportion when solving ratio comparison problems are scarce. **Objectives**: This study focuses on characterizing how secondary school students (12-16 years old) solve ratio comparison problems. **Method**: The instrument to collect that was two ratio comparison problems with intensive quantities that could be solved as a couple of expositions or compositions. **Participants and context**: 248 Secondary Education students from 6th to 10th grade (12-16 years) solved these problems. **Data collection and analysis**: An inductive analysis was carried out in order to identify categories of students’ performances. **Results**: Three types of students’ performances were identified depending on whether the students showed understanding of the relative quantities: relative comparison, relative trend, and non-relative comparison. The subcategories identified in the relative trend performance showed difficulties with the critical components of the problems: difficulties with the referent and with the norming techniques. **Conclusions**: Results showed that, at the end of secondary education, students’ difficulties in understanding the ratio concept and the intensive quantities persisted.

Keywords: Ratio; Intensive quantities; Ratio comparison; Secondary Education.

Caracterização das respostas dos alunos do 12 ao 16 anos de idade em problemas de comparação de razões

RESUMO

Contexto: O raciocínio proporcional é uma parte fundamental do currículo do ensino fundamental e médio. No entanto, as investigações têm mostrado que os alunos tanto do ensino fundamental como do médio têm dificuldade de raciocinar proporcionalmente. A maioria dessas investigações utilizou situações proporcionais de valor omisso, mas há pouca informação disponível sobre como os alunos do ensino fundamental e médio dão sentido e utilizam os conceitos de razão e proporção na resolução de problemas proporcionais de comparação de razões. **Objetivos**: Este estudo centra-se na caracterização de como os alunos do 12 ao 16 anos de idade resolvem problemas deste tipo. **Design**: Dois problemas de comparação de razão com quantidades intensivas que poderiam ser resolvidos em pares de exposições ou composições foram projetados como um instrumento de coleta de dados. **Ambiente e participantes**: Estes problemas foram resolvidos por 248 alunos do 12 ao 16 anos. **Coleta e análise de dados**: Foi realizada uma análise indutiva de geração de categorias a fim de identificar os diferentes desempenhos dos alunos. **Resultados**: Três tipos de ações foram identificados com base se os alunos mostraram compreensão das quantidades relativas: comparação relativa, tendência relativa e comparação não-relativa. As subcategorias identificadas nas performances de tendência relativa mostraram dificuldades com os componentes críticos dos problemas: dificuldades com o referente e com as técnicas de normalização. **Conclusões**: Os resultados mostram que, no final do ensino médio, os alunos continuam a ter dificuldades na compreensão de razão e de quantidades intensivas.

Palavras-chave: Razão; Quantidades intensivas; Comparação de razões; Ensino fundamental e médio.

INTRODUCCIÓN

La comprensión de los conceptos de razón, proporción y el desarrollo del razonamiento proporcional han sido ampliamente estudiados desde la década de los 80 (Cramer & Post, 1993; Fernández, 2009; Gómez, 2016; Howe et al., 2011; Karplus et al., 1983; Lamon, 2012; Lesh et al., 1988; Lobato & Ellis, 2010; Noelting, 1980a, 1980b; Simon & Placa, 2012). Razonar proporcionalmente implica comparar cantidades en términos relativos mediante el uso de razones (Karplus et al., 1983).

El razonamiento proporcional es una parte fundamental del currículo de Educación Primaria y Secundaria. No sólo se encuentra en los diferentes bloques del currículo de matemáticas, sino también aparece en otras áreas como física, economía, química o dibujo. Investigaciones han mostrado que estudiantes, tanto de primaria como de secundaria, tienen dificultades para distinguir situaciones proporcionales de las que no lo son, y el efecto de algunas variables de los problemas como el contexto o las razones enteras o no enteras en los niveles de éxito y las estrategias usadas por los estudiantes (Alatorre & Figueras, 2005; Fernández & Llinares, 2012; Fernández et al., 2012; Jiang et al., 2017; Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, et al., 2005, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010). De hecho, estas dificultades también se observan en la población adulta, incluyendo tanto estudiantes para maestro como profesores en servicio (Buforn & Fernández, 2014; Buforn et al., 2020; Burgos, Beltrán-Pellicer, et al., 2018; Burgos, Godino & Rivas, 2019; Lamon, 2007; Rivas et al., 2012; Valverde & Castro, 2009). Esto conlleva que los profesores, cuando trabajan los conceptos de razón y proporción, se centren sólo en enseñar a sus estudiantes técnicas procedimentales para enfrentarse a problemas que implican estos conceptos (Burgos, Godino & Rivas, 2019).

La mayoría de investigaciones previas se han centrado en mostrar características del desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes de primaria y secundaria en situaciones proporcionales de valor perdido (Fernández & Llinares, 2012; Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren et al., 2005). En los problemas de este tipo, se presenta una igualdad de razones en la que se conocen tres elementos, debiendo buscar el cuarto. Sin embargo, se tiene poca información sobre cómo los estudiantes de primaria y secundaria dan significado y utilizan los conceptos de razón y proporción cuando resuelven problemas proporcionales de comparación numérica o comparación de razones (Alatorre & Figueras, 2005; Fernández, 2009; Nunes et al., 2003). En estos problemas, se comparan dos razones cuya información numérica está dada de forma completa. En este estudio, nos centraremos en estos problemas.

MARCO TEÓRICO

Concepto de Razón

Freudenthal (1983) define razón como "una función de un par ordenado de números o valores de magnitud" (p. 180). De esta forma, el significado de razón no reside en su algoritmo como cociente por el que se le asigna un valor numérico, sino en la comparación de razones, pudiendo hablar de igualdad o desigualdad de razones sin saber el tamaño de la razón, de forma que se puede decir que A es a B como C es a D sin calcular los valores A/B y C/D (Freudenthal, 1983, p. 180).

Uno de los retos en su enseñanza es que implica la aparición de cantidades intensivas que no pueden medirse directamente (Simon & Placa, 2012). Las cantidades extensivas representan atributos directamente medibles de un objeto, de forma que las cantidades extensivas pueden sumarse (masa, distancia, volumen), mientras que las intensivas son aquellas que representan atributos que no pueden medirse directamente ni sumarse (densidad, precio) (Piaget, 1952; Schwartz, 1988; Simon & Placa, 2012; Thompson, 1994). En general, el cociente entre dos cantidades extensivas resulta en una intensiva. Nunes et al. (2003) mostraron que los estudiantes de educación primaria tienen dificultades resolviendo problemas proporcionales de comparación numérica con cantidades intensivas. Este estudio concluyó que las cantidades intensivas suponen una dificultad superior a las extensivas por dos motivos: requieren comprender las relaciones de dependencia entre la cantidad intensiva y sus componentes extensivas, así como la capacidad de pensar en términos relativos para trabajar con cantidades intensivas.

En el desarrollo de la comprensión de razón, Freudenthal (1983) subraya la importancia de dos ideas: relativamente y normalización. La idea de *relativamente* en el sentido de "poner algo en relación con" implica emplear el término razón como un número que relaciona dos cantidades en una situación y proyecta esta relación en una segunda situación en la que la relación entre las dos cantidades permanece igual (Smith, 2002). Por ejemplo, la clase A tiene 30 alumnos de los cuales 20 son chicas y 10 son chicos mientras que la clase B tiene 60 alumnos de los cuales 40 son chicas y 20 son chicos. Si se pregunta sobre qué clase tiene más alumnas, si no se relativiza, la respuesta será la B ya que la cantidad es mayor en términos absolutos, pero realmente se espera una comparación en términos relativos donde la respuesta sería que la cantidad de chicas en ambas clases es la misma. Por otra parte, *normalizar* describe el proceso de reconceptualizar un sistema con relación a una unidad fija o estándar. Por ejemplo, imaginar que la Tierra es del tamaño de la cabeza de un alfiler (1 mm de diámetro) y entonces reconceptualizar el sistema solar en términos de esta definición (Freudenthal, 1983; Lamon, 1993).

Problemas de comparación de razones

Los problemas de comparación de razones implican las ideas *relativamente* y *normalización*. En estos problemas, existen relaciones multiplicativas entre cantidades, las cuales expresan cantidades relativas, es decir, "cantidades que se encuentran en una relación multiplicativa con otra cantidad de referencia" (la cual se conoce como "referente") (Gómez & García, 2015; p. 267). Además, estas situaciones implican el uso de técnicas de normalización que permiten comparar las cantidades intensivas generadas por las razones.

Según Freudenthal (1983) las situaciones que pueden relativizarse, como los problemas de comparación de razones, deben considerarse en un contexto más amplio que el de las relaciones en una misma magnitud y entre magnitudes distintas, englobándolas en comparación de parejas de *exposiciones* o *composiciones*. Las parejas de exposiciones consisten en un conjunto Ω de elementos (x_1, x_2, …), con dos funciones ω_1 y ω_2, que asignan una magnitud a cada elemento del conjunto, de forma que las razones $\omega_1(x_i)/\omega_2(x_i)$, son comparadas. Un ejemplo de parejas de exposiciones sería la comparación entre un corredor A que recorre 100 m en 10 s con un corredor B que recorre 150 m en 15 s. Los corredores son elementos del conjunto Ω = {corredor A, corredor B}, donde a cada uno se le asocia dos magnitudes, distancia (M_1) y tiempo (M_2) (cantidades extensivas), mediante las funciones ω_1 y ω_2, respectivamente. De esta forma, la función ω_1 asigna al corredor A y al B los 100 y 150 metros que recorren, respectivamente, mientras que la función ω_2 les asigna los 10 y 15 segundos que tardan en recorrer dichas distancias. Las razones que se comparan (cantidades intensivas) son distancia/tiempo = 100/10 del corredor A y distancia/tiempo = 150/15 del corredor B.

Las parejas de composiciones consisten en las partes x_1 y x_2 de dos universos Ω_1 y Ω_2, con dos funciones ω_1 y ω_2, representando cada función una magnitud, de forma que las razones $\omega_i(x_1)/\omega_i(x_2)$ son comparadas. Una situación de parejas de composiciones sería la comparación entre dos mezclas de hormigón, Ω_1 y Ω_2, cuyos elementos son agua y cemento (Ω_1 = {agua, cemento} y Ω_2 = {agua, cemento}), donde la mezcla Ω_1 se compone de 20 dm^3 de agua y 10 dm^3 de cemento, y la mezcla Ω_2 se compone de 30 dm^3 de agua y 15 dm^3 de cemento. La función ω_1 le asocia al agua y al cemento del conjunto Ω_1 sus respectivos volúmenes de 20 y 10 dm^3 (cantidades extensivas) y, de igual forma, la función ω_2 le asigna al agua y al cemento del conjunto Ω_2 sus respectivos volúmenes de 30 y 15 dm^3 (cantidades extensivas). Las razones que se comparan (cantidades intensivas) son volumen agua/volumen cemento = 20/10 en la mezcla 1 y volumen agua/volumen cemento = 30/15 en la mezcla 2.

En estas situaciones, la normalización permite unificar los antecedentes (numerador) o los consecuentes (denominador) de las razones para favorecer la comparación (Gómez, 2016). Esta normalización puede hacerse empleando cualquier técnica para comparar razones, como la razón unitaria, cociente, fracciones equivalentes, producto cruzado o la construcción progresiva (Cramer & Post, 1993; Hart, 1981; Lamon, 2012).

Usando la definición de componente crítica de Sanz y Gómez (2005) “los elementos o información del enunciado cuya identificación hacen posible la resolución del problema” (p. 90), se consideran componentes críticas de los problemas de comparación de razones: la identificación de la relación multiplicativa, la identificación de la igualdad o desigualdad de sus razones y la identificación de sus referentes (Gómez & García, 2015).

Una revisión de estudios previos centrados en problemas de comparación de razones

La literatura sobre los problemas de comparación de razones se ha centrado en mostrar niveles de éxito en estudiantes de primaria (Nunes et al., 2003) y en la identificación de estrategias de los estudiantes y el efecto de algunas variables de los problemas, como el contexto o la estructura numérica, en las estrategias de los estudiantes de diferentes niveles educativos (estudiantes de primaria en Alatorre & Figueras, 2003; estudiantes de 6º a 8º curso en Karplus et al., 1983; estudiantes de 6 a 16 años en Noelting, 1980a, 1980b).

Algunas de las estrategias correctas usadas por los estudiantes en estos tipos de problemas identificadas en estudios anteriores son la razón unitaria, la estrategia de la fracción, el producto cruzado (Cramer & Post, 1993), o la construcción progresiva o *building-up* (Hart, 1981). En cuanto a las estrategias incorrectas, se ha identificado que los estudiantes ignoran parte de la información (Ben-Chaim et al., 1998); o usan estrategias no adecuadas, en este tipo de problemas como la estrategia aditiva (Cramer & Post, 1993). Además, se ha mostrado que el uso de una estrategia u otra puede estar condicionado por variables del problema como la presencia o no de razones enteras, el tamaño de los datos, el orden en el que se presentan (Monje & Gómez, 2019; Noelting, 1980a; Smith, 2002); o por el contexto, considerando más sencillos los contextos de compra que los de mezcla, y los que incluyen cantidades discretas en vez de continuas (Tourniaire & Pulos, 1985).

Sin embargo, los estudios focalizados en las actuaciones de los estudiantes teniendo en cuenta las componentes críticas de estos problemas son escasos (Gómez & García, 2015; Monje & Gómez, 2019, ambos estudios con futuros maestros). Algunas de las actuaciones que Gómez y García (2015) identificaron cuando los futuros maestros resuelven problemas de comparación de razones son: obtener y comparar razones correctamente, tener dificultades con el referente, no realizar las operaciones necesarias, o comparar cantidades absolutas. Monje y Gómez (2019), siguiendo con el trabajo de Gómez y García (2015), obtuvieron actuaciones similares, clasificándolas en función de si los futuros maestros realizaban comparaciones relativas correctamente, las realizan incorrectamente (que llamaron actuaciones de tendencia relativa) o si no realizan comparaciones relativas.

Objetivo

El objetivo de este estudio es caracterizar cómo estudiantes de educación secundaria (12-16 años) resuelven problemas de comparación de razones analizando la relación entre las componentes críticas de estos problemas y las actuaciones de los estudiantes.

Teniendo en cuenta el objetivo de investigación, se ha formulado la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas de comparación de razones?

MÉTODO

Participantes

Los participantes fueron 248 estudiantes de un centro público de Educación Secundaria de la provincia de Alicante (España). En particular, 68 alumnos de 1.º, 52 alumnos de 2.º, 64 alumnos de 3.º y 64 alumnos de 4.º. Aproximadamente, el número de alumnas y alumnos en cada grupo fue el mismo. Los estudiantes provienen de un contexto socioeconómico mixto.

Los contenidos sobre razón y proporción en el currículo de Educación Primaria incluyen la introducción de los conceptos de fracción, razón, número decimal y porcentaje, y la introducción de la proporcionalidad directa y su uso en diferentes situaciones. En cuanto al currículo de educación secundaria se incluye la introducción de razón y proporción, la proporcionalidad directa e inversa, la constante de proporcionalidad, e interpretar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes y operar con ellos mediante estrategias de cálculo para utilizarlos en diferentes situaciones.

Instrumento

Los participantes resolvieron los siguientes problemas de comparación de razones:

- **Problema 1 (Oferta).** En la frutería A por cada 2 kg de manzanas que pago me llevo 3 mientras que en la frutería B por cada 3 kg de manzanas que pago me llevo 4. Si en las dos fruterías el precio del kg es el mismo, ¿qué oferta es más económica?
- **Problema 2 (Mezcla).** Para hacer batido de chocolate se necesita leche y chocolate. Juan ha usado 450 ml de leche obteniendo 600 ml de batido mientras que María ha usado 750 ml de leche y ha obtenido 900 ml. Si los dos han usado los mismos gramos de chocolate, ¿cuál sabrá más a chocolate?

Ambos problemas son situaciones de desigualdad de razones que pueden interpretarse tanto como parejas de exposiciones como parejas de composiciones, y en ambos son necesarias técnicas de normalización para la comparación.

Cada problema tiene dos elementos y tres cantidades extensivas (Tablas 1 y 2). En ambos problemas, una de las cantidades extensivas aparece unificada, es decir, que su valor es el mismo para ambos objetos. En el problema 1, aunque no se hacía explícito, esta cantidad es *cantidad regalada* (1kg en las fruterías A y B), y en el problema 2 que sí se hacía explícito, es *cantidad de chocolate* (150ml en los batidos de Juan y María).

Tabla 1

Cantidades extensivas del Problema 1.

Elementos	Frutería A	Frutería B
Cantidades extensivas	Cantidad pagada (2 kg)	Cantidad pagada (3 kg)
	Cantidad regalada (1 kg)	Cantidad regalada (1 kg)
	Cantidad llevada (3 kg)	Cantidad llevada (4 kg)

Tabla 2

Cantidades extensivas del Problema 2.

Elementos	Frutería A	Frutería B
Cantidades extensivas	Cantidad chocolate (150 ml)	Cantidad chocolate (150 ml)
	Cantidad leche (450 ml)	Cantidad leche (750 ml)
	Cantidad batido (600 ml)	Cantidad batido (900 ml)

En el primer problema, si se interpreta el problema como parejas de exposiciones, se tendrá un conjunto de fruterías $\Omega = \{$frutería A, frutería B$\}$. La función ω_1 podría asignar a cada frutería la cantidad pagada (P). La función ω_2 asignaría a cada frutería la cantidad llevada (LL) (Tabla 3). Por otra parte, la función ω_1 también podría asignar a cada frutería la cantidad regalada (R) y la función ω_2 asignaría la cantidad llevada (Tabla 4).

Tabla 3

Pareja de Exposiciones: Cantidad pagada (kg) / Cantidad llevada (kg).

	Frutería A	**Frutería B**
$\omega_1:\Omega \rightarrow$ Cantidad Pagada	$P_A = 2$	$P_B = 3$
$\omega_2:\Omega \rightarrow$ Cantidad Llevada	$LL_A = 3$	$LL_B = 4$
Razones comparadas	$\frac{P_A}{LL_A} = \frac{2}{3}$	$\frac{P_B}{LL_B} = \frac{3}{4}$

Tabla 4

Pareja de Exposiciones: Cantidad regalada (kg) / Cantidad llevada (kg).

	Frutería A	**Frutería B**
$\omega_1:\Omega \rightarrow$ Cantidad Regalada	$R_A = 1$	$R_B = 1$
$\omega_2:\Omega \rightarrow$ Cantidad Llevada	$LL_A = 3$	$LL_B = 4$
Razones comparadas	$\frac{R_A}{LL_A} = \frac{1}{3}$	$\frac{R_B}{LL_B} = \frac{1}{4}$

Considerando el problema como una pareja de composiciones, se compararía la cantidad llevada en ambas fruterías cuyos elementos serían cantidad pagada y cantidad regalada (Ω_A={cantidad pagada, cantidad regalada} y Ω_B={cantidad pagada, cantidad regalada}). La función ω_1 le asocia a la cantidad regalada y pagada de la Frutería A sus respectivos kg y la función ω_2 le asocia a la cantidad regalada y pagada de la Frutería B sus respectivos kg (Tabla 5).

Tabla 5

Pareja de Composiciones: Cantidad regalada (kg) / Cantidad pagada (kg).

	Cantidad Regalada	Cantidad Pagada	Razón comparada
$\omega_1:\Omega_A$ → Cantidad de kg (Frutería A)	$R_A = 1$	$P_A = 2$	$\frac{R_A}{P_A} = \frac{1}{2}$
$\omega_2:\Omega_B$ → Cantidad de kg (Frutería B)	$R_B = 1$	$P_B = 3$	$\frac{R_B}{P_B} = \frac{1}{3}$

El segundo problema, al igual que el problema 1, se puede resolver mediante parejas de exposiciones o de composiciones. Como parejas de exposiciones se tendrá el conjunto de batidos Ω = {Batido de Juan, Batido de María}. La función ω_1 asigna, a cada batido, la cantidad de chocolate (C) (Tabla 6) o la cantidad de leche (L) (Tabla 7); y la función ω_2 asigna a cada batido, la cantidad total (ml) de batido (B).

Tabla 6

Pareja de Exposiciones: Cantidad de chocolate (ml) / Cantidad de batido (ml).

	Batido Juan	Batido María
$\omega_1:\Omega$ → Cantidad de Chocolate	$C_J = 150$	$C_M = 150$
$\omega_2:\Omega$ → Cantidad de Batido	$B_J = 600$	$B_M = 900$
Razones comparadas	$\frac{C_J}{B_J} = \frac{150}{600}$	$\frac{C_M}{B_M} = \frac{150}{900}$

Tabla 7

Pareja de Exposiciones: Cantidad de leche (ml) / Cantidad de batido (ml).

	Batido Juan	Batido María
ω_1:Ω → Cantidad de Leche	$L_J = 450$	$L_M = 750$
ω_2:Ω → Cantidad de Batido	$B_J = 600$	$B_M = 900$
Razones comparadas	$\frac{L_J}{B_J} = \frac{450}{600}$	$\frac{L_M}{B_M} = \frac{750}{900}$

Tabla 8

Pareja de Composiciones: Cantidad de chocolate (ml) / Cantidad de leche (ml).

	Cantidad de Chocolate	Cantidad de Leche	Razón comparada
ω_1:Ω_J → Volumen (ml) (Batido Juan)	$C_J = 150$	$L_J = 450$	$\frac{C_J}{L_J} = \frac{150}{450}$
ω_2:Ω_M → Volumen (ml) (Batido María)	$C_M = 150$	$L_M = 750$	$\frac{C_M}{L_M} = \frac{150}{750}$

Si se resuelve el problema como una pareja de composiciones, se compararía el batido de cada uno de ellos (Juan y María) cuyos elementos son la cantidad de chocolate y la cantidad de leche (Ω_J={cantidad de chocolate, cantidad de leche} y Ω_M={cantidad de chocolate, cantidad de leche}. La función ω_1 le asocia a la cantidad de chocolate y a la cantidad de leche del Batido de Juan sus respectivos ml y la función ω_2 le asocia a la cantidad de chocolate y a la cantidad de leche del Batido de María sus respectivos ml (Tabla 8).

Los estudiantes resolvieron estos problemas individualmente en el horario habitual de clase de matemáticas, con un tiempo aproximado de unos 30 minutos. No se les dio ninguna instrucción a excepción de que justificaran sus respuestas y que podían emplear calculadora.

Análisis

Se llevó a cabo un análisis inductivo de generación de categorías (Strauss & Corbin, 1994). Tres investigadores analizaron, independientemente, las respuestas dadas por los estudiantes teniendo en cuenta las componentes críticas de los problemas con el objetivo de generar categorías que caracterizaran las actuaciones de los estudiantes:

- La idea "relativamente". Si el estudiante identifica las cantidades relativas, es decir, cantidades que se encuentran en una relación multiplicativa con otra cantidad de referencia. Se tuvo en cuenta si los estudiantes:
  - Identificaban la relación multiplicativa.
  - Identificaban el referente en la comparación.
- La idea de "normalización". Si el estudiante utiliza alguna técnica de normalización para comparar las razones.

Los desacuerdos fueron discutidos hasta llegar a un consenso. Las categorías identificadas se explicarán y ejemplificarán en los resultados.

RESULTADOS

En primer lugar, se describen y ejemplifican las actuaciones de los estudiantes según las categorías y subcategorías identificadas en el análisis. En segundo lugar, se muestran las frecuencias de estas categorías por problema y curso.

Actuaciones de los estudiantes

Del análisis realizado, las actuaciones se pueden agrupar en tres categorías generales, al igual que en el estudio de Monje y Gómez (2019) con estudiantes para maestro, según si los estudiantes identifican las cantidades relativas: comparación relativa, tendencia relativa y no relativa.

- Comparación relativa: En esta categoría se incluyen las actuaciones de estudiantes que muestran comprensión de las cantidades relativas.
- Tendencia relativa: En esta categoría se incluyen las actuaciones de los estudiantes que mostraron indicios de comprensión de las cantidades relativas sin alcanzar el éxito.
- Comparación no relativa: En esta categoría se incluyen las actuaciones de los estudiantes que no mostraron indicios de comprensión de las cantidades relativas.

A continuación, se describen las subcategorías identificadas dentro de cada una de estas categorías. Puesto que estas subcategorías fueron las mismas en ambos problemas, se ejemplifican con respuestas de estudiantes al problema 1.

Comparación relativa

Se incluyen las actuaciones de los estudiantes que son capaces de obtener las razones para ser comparadas tras aplicar una técnica de normalización. Las subcategorías identificadas se diferencian por interpretar el problema como pareja de exposiciones o composiciones y por el referente utilizado.

La subcategoría "como pareja de composiciones" recoge las actuaciones de los estudiantes que interpretan el problema como una pareja de composiciones usando la razón *cantidad regalada (kg) / cantidad pagada (kg)* en cada una de las ofertas del problema 1 y la razón *cantidad de chocolate (ml) / cantidad de leche (ml)* en cada batido del problema 2.

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la respuesta de un estudiante de 3º ESO que usa como técnica de normalización para comparar las razones (cantidad regalada / cantidad pagada) la búsqueda de un múltiplo común (6 kg que pago), así en la frutería A obtiene $1 \times 3 = 3$ kg que le regalan y en la frutería B obtiene $1 \times 2 = 2$ kg que le regalan.

Figura 1

Respuesta de un estudiante de 3º ESO que interpreta el problema como pareja de composiciones.

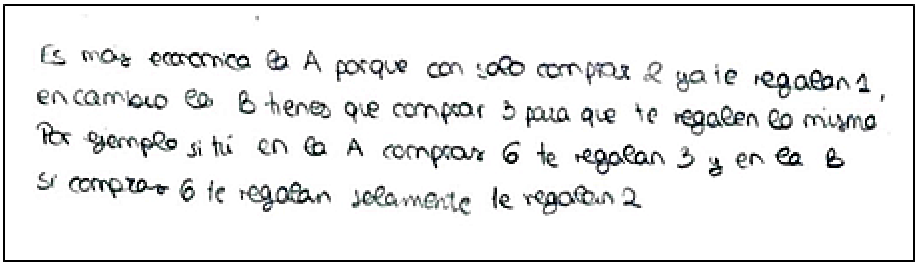
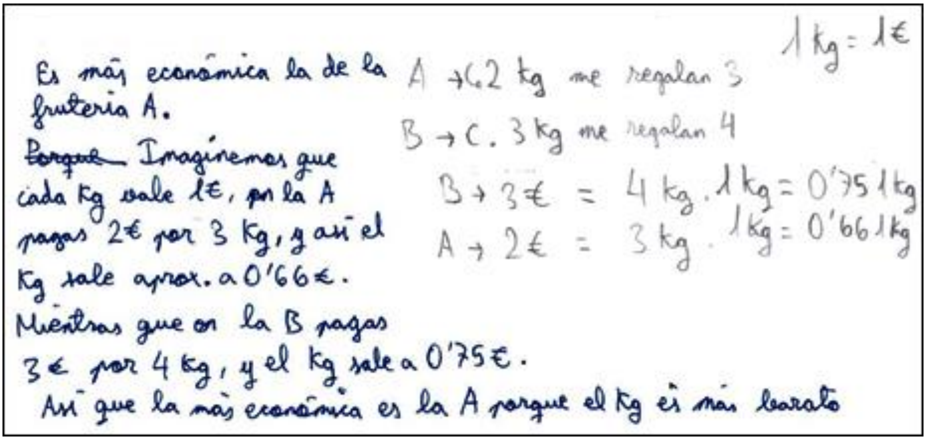

Es más económica la A porque con solo comprar 2 ya le regalan 1, encambio en la B tienes que comprar 3 para que te regalen lo mismo Por ejemplo si tú en la A compras 6 te regalan 3 y en la B si compras 6 te regalan solamente le regalan 2

Figura 2

Respuesta de un estudiante de 1º ESO que interpreta el problema como pareja de exposiciones.


Es más económica la de la frutería A.
~~Porque~~ Imaginemos que cada kg vale 1€, en la A pagas 2€ por 3 kg, y así el kg sale aprox. a 0'66€.
Mientras que en la B pagas 3€ por 4 kg, y el kg sale a 0'75€.
Así que la más económica es la A porque el kg es más barato

1 kg = 1€
A → C. 2 kg me regalan 3
B → C. 3 kg me regalan 4
B → 3€ = 4 kg. 1 kg = 0'75 1 kg
A → 2€ = 3 kg. 1 kg = 0'66 1 kg

En la subcategoría “como pareja de exposiciones” están las actuaciones de los estudiantes que interpretan el problema como pareja de exposiciones. Las razones usadas por los estudiantes son *cantidad pagada (kg) / cantidad llevada (kg)*, *cantidad regalada (kg) / cantidad llevada (kg)* y *cantidad pagada (€) / cantidad llevada (kg)* en el problema 1, y *cantidad de chocolate (ml) / cantidad de batido (ml)* y *cantidad de leche (ml) / cantidad de batido (ml)* en el problema 2, por lo que, en cada problema, las actuaciones difieren en el referente usado en la comparación. En la figura 2 se muestra la respuesta de un estudiante de 1º ESO que fija un precio de 1€ por kg pagado, calculando el precio que se paga en cada frutería respecto a los kg que se lleva, obteniendo la razón unitaria de cada uno (2€/3kg = 0.66€/kg en la frutería A y 3€/4kg = 0.75€/kg en la frutería B).

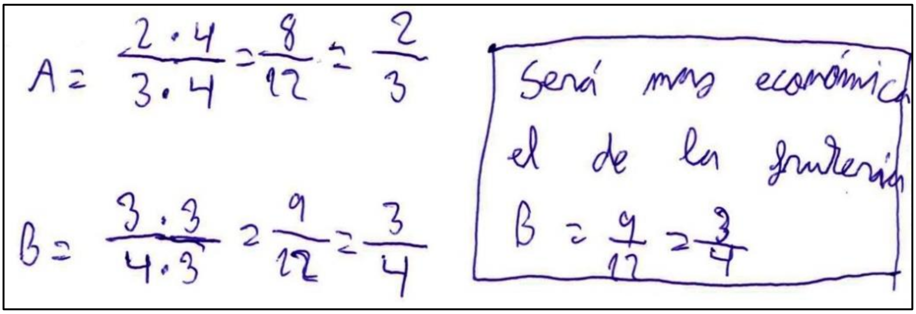
Tendencia relativa

En esta categoría se incluyen las actuaciones de los estudiantes que muestran evidencias de comprender las cantidades relativas, pero tuvieron dificultades con alguna componente crítica de los problemas. Se identificaron dos subcategorías: dificultad con el referente y dificultad con la técnica de normalización.

En la subcategoría "dificultad con el referente" los estudiantes son capaces de obtener las razones para ser comparadas aplicando una técnica de normalización, pero no interpretan correctamente el significado de las razones con relación al referente. Por ejemplo, en la figura 3, un estudiante de 2º ESO realiza la normalización usando la estrategia de la fracción (busca fracciones equivalentes con el mismo denominador 8/12 y 9/12), pero tiene dificultades en la interpretación del antecedente con relación al referente (consecuente – en nuestro caso, "cantidad llevada"), de forma que, aunque en la frutería A paga menos (8 kg) por lo que se lleva (12 kg) que en la frutería B (paga 9 kg y se lleva 12 kg), el estudiante responde que la B es más económica. Por tanto, la dificultad está relacionada con la pérdida de sentido del referente cuando se aplican las técnicas de normalización (Gómez & García, 2015).

Figura 3

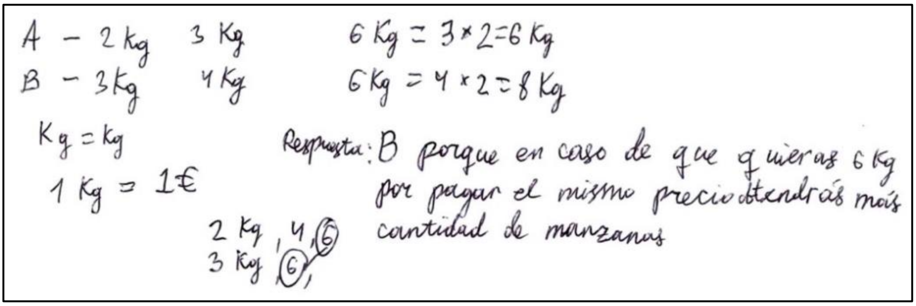
Respuesta de un estudiante de 2º ESO con dificultad con el referente.



En la subcategoría “dificultad con las técnicas de normalización” las dificultades están relacionadas con el uso de estas técnicas. Por ejemplo, en la figura 4, un estudiante de 3º ESO utiliza como técnica de normalización para unificar las cantidades pagadas, la búsqueda de un múltiplo común (6 kg), pero tiene dificultades para extenderla a las cantidades llevadas.

Figura 4

Respuesta de un estudiante de 3º de ESO con dificultad en la técnica de normalización.


A – 2 Kg   3 Kg   6 Kg = 3×2=6 Kg
B – 3 Kg   4 Kg   6 Kg = 4×2=8 Kg
Kg = kg
1 Kg = 1€
Respuesta: B porque en caso de que quieras 6 Kg por pagar el mismo precio obtendrás más cantidad de manzanas
2 Kg, 4, 6
3 Kg 6,

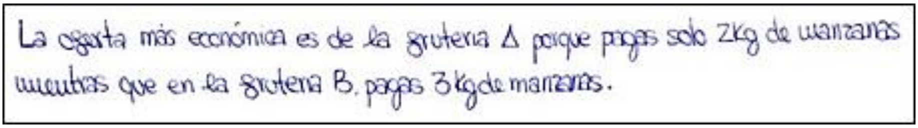
Comparación no relativa

Se obtuvieron cinco subcategorías: ignorar datos, respuestas aditivas, respuestas afectivas, respuestas incomprensibles, y respuestas en blanco.

En la subcategoría “respuestas en las que se ignora parte de los datos” se recogen respuestas de estudiantes que han respondido prestando atención únicamente a algunos datos del problema, sin identificar las cantidades relativas. Por ejemplo, en la figura 5 se muestra una respuesta en la que un estudiante de 4º ESO realiza comparaciones sólo entre las cantidades pagadas, ignorando que las ofertas están sujetas a la relación multiplicativa con la cantidad de referencia.

Figura 5

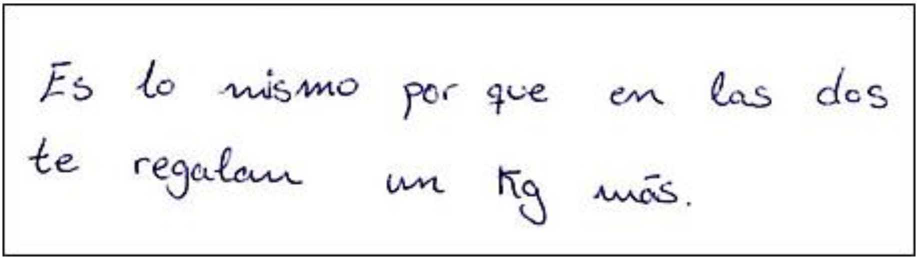
Respuesta de un estudiante de 4º ESO que presta atención únicamente a las cantidades pagadas.


La oferta más económica es de la frutería A porque pagas solo 2Kg de manzanas mientras que en la frutería B, pagas 3Kg de manzanas.

En la subcategoría “respuestas aditivas”, los estudiantes relacionan las cantidades de manera aditiva (razonan en términos absolutos) sin identificar la relación multiplicativa. La figura 6 muestra la respuesta de un estudiante de 2ºESO que responde que ambas ofertas son iguales ya que en ambas regalan un kg más del que se compra, es decir, ha restado las cantidades pagadas a las llevadas, obteniendo las cantidades regaladas de ambas fruterías, que son iguales, y las compara.

Figura 6

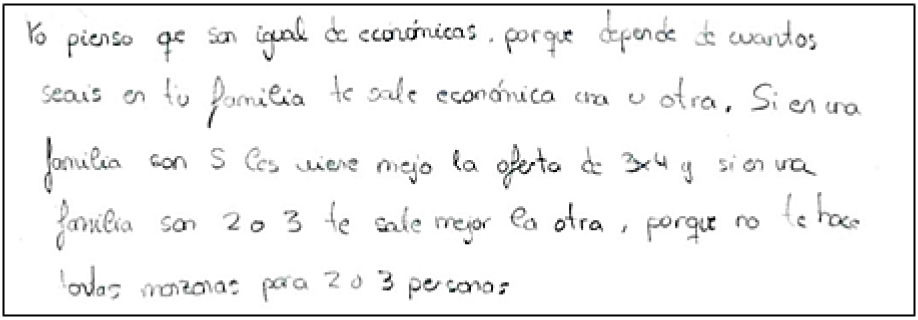
Respuesta aditiva de un estudiante de 2º ESO.



El tipo de respuestas de la subcategoría “respuestas afectivas” se basan en gustos personales o interpretaciones subjetivas de los estudiantes. En la figura 7, se muestra la respuesta de un estudiante de 3º ESO que señala que la elección dependerá del número de miembros que tenga la familia que realice la compra.

Figura 7

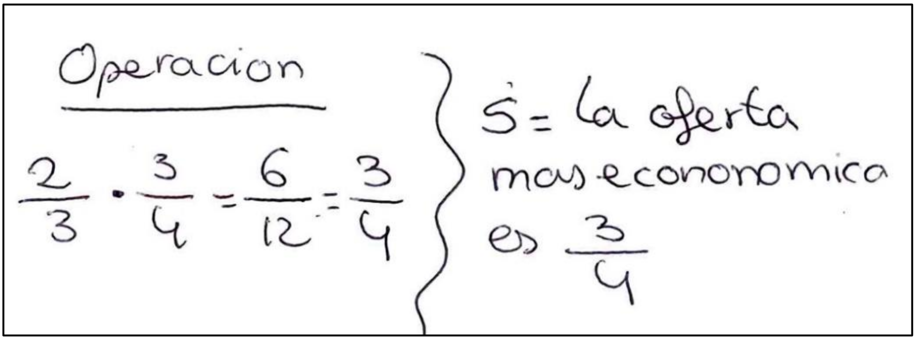
Respuesta afectiva de un estudiante de 3º ESO.



Las respuestas de la categoría “respuestas incomprensibles” son aquellas respuestas en las que los estudiantes realizan operaciones sin sentido. En la figura 8 se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta. Un estudiante de 2º ESO obtiene una fracción para cada oferta, pero posteriormente las multiplica de forma ilógica.

Figura 8

Respuesta incomprensible de un estudiante de 2º ESO.



Actuaciones de los estudiantes por problema y curso

Tabla 9

Porcentaje de cada una de las categorías de respuestas por problema y curso.

Curso	Problema 1 (Ofertas)			Problema 2 (Mezclas)			Éxito total
	Comparación relativa	Tendencia relativa	No relativa	Comparación relativa	Tendencia relativa	No relativa	
1º	25.0%	14.7%	60.3%	70.6%	7.4%	22.0%	47.8%
2º	25.0%	19.2%	55.8%	86.5%	3.8%	9.7%	55.8%
3º	20.3%	18.8%	60.9%	82.8%	4.7%	12.5%	51.6%
4º	50.0%	15.6%	34.4%	84.4%	1.6%	14.0%	67.2%
Total	30.1%	17.0%	52.9%	81.1%	4.4%	14.5%	55.6%

La Tabla 9 muestra el porcentaje total de respuestas de comparación relativa, tendencia relativa y no relativas en cada uno de los problemas por curso.

Aunque se observa un aumento de las respuestas de comparación relativa a lo largo de los cursos, el éxito es del 67.2% (media en ambos problemas) en 4º curso, lo que muestra que las dificultades de los estudiantes en los problemas de comparación de razones (o con las cantidades intensivas) no desaparecen a lo largo de la educación secundaria.

En la Tabla 10 se muestra el porcentaje de las subcategorías de actuación identificadas para los problemas 1 y 2.

Tabla 10

Porcentaje de las subcategorías identificadas para los problemas 1 y 2.

Categorías y Subcategorías	Problemas	
	1	2
Comparación relativa		
Como pareja de composiciones	6.8%	68.2%
Como pareja de exposiciones	23.3%	12.9%
Tendencia relativa		
Dificultad con el referente	5.6%	2.0%
Dificultad con la normalización	11.4%	2.4%
Comparación no relativa		
Respuesta en la que ignoran datos	19.0%	4.3%
Respuesta aditiva (absoluta)	8.1%	4.3%
Respuesta afectiva	7.3%	1.6%
Respuesta incomprensible o en blanco	18.5%	4.3%

En el problema 1 (ofertas), un 30.1% de las respuestas fueron de comparación relativa. Únicamente el 6.8% interpretó el problema como pareja de composiciones. El resto, un 23.3%, interpretó el problema como pareja de exposiciones. Las dificultades de los estudiantes en este problema se muestran por el 17% que empleó respuestas de tendencia relativa, teniendo dificultades con los referentes y con las normalizaciones, y por el 52.9% que proporcionó respuestas no relativas. De este último grupo, destaca la aparición de respuestas en la que se ignoraba parte de los datos o proporcionaron respuestas incomprensibles o en blanco.

En el problema 2 (mezclas), un 81.1% de las respuestas fueron de comparación relativa. En particular, un 68.2% interpretó el problema como pareja de composiciones y un 12.9% como pareja de exposiciones. Un 4.4% fueron respuestas de tendencia relativa presentando los mismos tipos de dificultades que en el primer problema. Por último, un 14.5% fueron comparaciones no relativas, cuyas subcategorías más frecuentes fueron ignorando datos del problema, respuestas incomprensibles o en blanco y respuestas aditivas.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos proporcionan información sobre las actuaciones de los estudiantes de educación secundaria cuando se enfrentan a problemas proporcionales de comparación numérica con cantidades intensivas, en función de las componentes críticas de los problemas. De esta manera, se han identificado tres tipos de actuaciones en función de si los estudiantes de secundaria identifican la relación multiplicativa, y, por tanto, muestran comprensión de las cantidades relativas: comparación relativa, tendencia relativa y comparación no relativa. Estas actuaciones coinciden con los resultados obtenidos por Monje y Gómez (2019) con estudiantes para maestro donde utilizaron tareas realistas de ofertas de folletos publicitarios, y los extienden con estudiantes de educación secundaria. Además, las subcategorías identificadas en las actuaciones de tendencia relativa muestran dificultades de los estudiantes con algunas componentes críticas: dificultades en la interpretación del antecedente con relación al consecuente (referente) en la comparación, y dificultades con las técnicas de normalización.

Por otra parte, las subcategorías identificadas en las actuaciones de comparación no relativa muestran que los estudiantes de secundaria tienen dificultades en la identificación de la relación multiplicativa, razonando en términos aditivos (absolutos) o ignorando parte de los datos. Ambas subcategorías han sido identificadas en estudios previos (Alatorre & Figueras, 2005; Ben-Chaim et al., 1998; Fernández & Llinares, 2012; Hart, 1981; Monje

& Gómez, 2019; Tourniaire & Pulos, 1985; Van Dooren et al., 2005). Respecto a la estrategia aditiva, los estudios han mostrado que suelen emplearse más en problemas donde aparecen razones no enteras, lo que coincide con las razones de los problemas de este trabajo, aunque algunas de ellas, podrían haberse considerado enteras si se hubieran construido las recíprocas. Sin embargo, su uso en esta investigación no ha sido muy elevado en comparación con estudios donde se han usado problemas de valor perdido (Fernández & Llinares, 2012). En cuanto a la subcategoría "ignorar datos", los estudiantes han prestado únicamente atención a una de las cantidades dadas, relacionando cantidades de una misma magnitud en parejas de exposiciones o de distinta magnitud en parejas de composiciones. Ben-Chaim et al. (1998) señalaban que el hecho de que los estudiantes se centren sólo en una de las cantidades de las razones (antecedente o consecuente) cuando éstas son comparadas sucede debido al desafío que supone el razonamiento proporcional, ya que requiere "una comparación de dos números como una única entidad y operar simultáneamente con dos o más comparaciones" (p. 262).

La caracterización de las actuaciones de los estudiantes obtenida en este estudio podría constituir una herramienta que ayude a entender el pensamiento matemático de los estudiantes y, por tanto, aporte información para el diseño de propuestas de aula que pudiera ayudar a los estudiantes a superar las dificultades. Además, nuestros resultados tienen implicaciones también en la formación del profesorado de secundaria. Burgos, Beltrán-Pellicer et al. (2018), en un estudio sobre proporcionalidad con estudiantes del máster de profesorado de secundaria, reconocían que, incluso aquellos provenientes del grado de matemáticas tienen carencias en el conocimiento del contenido de proporcionalidad, confundiendo el significado de razón o traduciendo mal sus términos. Esto podría implicar que los futuros profesores de secundaria tengan dificultades a la hora de interpretar las respuestas de sus estudiantes cuando se trabaja el razonamiento proporcional, tal y como han señalado estudios previos con futuros maestros de primaria (Buforn et al., 2020; Burgos, Godino & Rivas, 2019). Por tanto, es importante que los profesores de matemáticas de educación secundaria conozcan los diferentes tipos de actuaciones de los estudiantes de secundaria al enfrentarse a los problemas de comparación de razones, ya que les permitirá identificar las dificultades con las que se encuentran sus estudiantes, y de este modo diseñar tareas que les ayuden a progresar en su aprendizaje.

Los resultados sobre los porcentajes de cada actuación a lo largo de los cursos indican que, aunque hay una evolución en cuanto al nivel de éxito, los estudiantes al final de la educación secundaria tienen dificultades para comprender las cantidades relativas ya que un 32.8% (media de los dos problemas) de los estudiantes de 4.º curso proporcionaron respuestas de tendencia relativa o de comparación no relativa. Por tanto, las dificultades asociadas a las cantidades intensivas parece que persisten durante la educación secundaria. Howe et al. (2010) y Nunes et al. (2003) mostraron que los estudiantes de primaria presentan dificultades en los problemas de comparación de razones. Nuestros resultados extienden estas investigaciones mostrando que, aunque parece existir una evolución positiva a lo largo de los cursos de educación secundaria, las dificultades parecen persistir en los últimos cursos.

Además, los resultados muestran que los estudiantes proporcionaron un mayor número de respuestas de comparación relativa en el problema 2 (mezclas) que en el problema 1 (ofertas). Esto contradice algunas investigaciones previas que afirman que los problemas de mezclas presentan mayor dificultad (Alatorre & Figueras, 2005; Fernández, 2009; Tourniaire & Pulos, 1985), mientras que otras investigaciones no han encontrado diferencias en las actuaciones de los estudiantes (en este caso, con estudiantes de primaria) al enfrentarse a problemas de ambos tipos (Nunes et al., 2003). Este resultado podría interpretarse desde las características de los problemas. En ambos problemas una de las cantidades se les proporcionaba unificada. En el problema 1, aunque no se hacía explícito, la cantidad regalada era la misma para ambas fruterías (1 kg). En el problema 2, se hacía explícito en el enunciado que la cantidad de chocolate era la misma en ambos batidos. Proporcionar las cantidades unificadas explícitamente en el enunciado parece permitir que los estudiantes puedan responder sin realizar cálculos, lo que podría haber facilitado el éxito en el problema 2, al dar esta cantidad de manera explícita. Investigaciones futuras podrían centrarse en examinar si el nivel de éxito de los estudiantes varía al preguntar explícitamente o no por las cantidades unificadas, además de si varía si las cantidades no se proporcionan unificadas.

Por otro lado, coincidiendo con estudios previos (Alatorre & Figueras, 2005; Fernández, 2009), el problema 1 (ofertas) se ha resuelto, preferentemente, por parejas de exposiciones mientras que el problema 2 (mezclas) se ha resuelto por parejas de composiciones. En los problemas de mezcla las dos cantidades proporcionadas son las partes de un todo (leche y chocolate son las partes del batido), lo que podría condicionar a que se resuelva por parejas de composiciones. Sin embargo, en el problema de ofertas, se debía interpretar que la cantidad llevada estaba formada por la cantidad pagada y la cantidad regalada para interpretarse como pareja de composiciones. Por otro lado, también es posible que la forma en la que se han presentado las cantidades en los problemas haya influido. En el problema de ofertas, las cantidades presentadas explícitamente son pagada y llevada, lo que puede haber condicionado a los estudiantes a formar razones cantidad pagada/cantidad llevada, correspondiente a parejas de exposiciones. En el segundo problema, las cantidades explícitas son leche y batido, pero al preguntar por el sabor a chocolate, los estudiantes tenían que prestar atención a la cantidad de chocolate. Futuros trabajos podrían examinar si estas variables influyen en las diferentes actuaciones de los estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto EDU2017-87411-R financiado por el MINECO, España y de la beca pre-doctoral de este mismo proyecto (PRE2018-083765).

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Ambos autores, SC y CF, han contribuido en el diseño y desarrollo de este estudio y en la redacción de este manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio se encuentran en los archivos de los autores. Los datos estarán disponibles por el primer autor, SC, encargado de su custodia, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Alatorre, S., & Figueras, O. (2003). Interview design for ratio comparison tasks. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Ed.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of the IGPME (PME27) and PMENA (PMENA25)* (vol. *2*, pp. 17-24). PME.

Alatorre, S., & Figueras, O. (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. In H. Chick, & J. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. *2*, pp. 25-32). PME.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36*(3), 247–273. https://doi.org/10.1023/A:1003235712092

Buforn, A., & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema*, *28*(48), 21-41. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. & Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013

Burgos, M., Godino, J. D., & Rivas, M. (2019). Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Acta Scientiae*, *21*(4), 63-81. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss4id5094

Cramer, K., & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), p. 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la Escuela Primaria.* Universitat de València.

Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/252566/391074/

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, *27*(3), 421–438. https://doi.org/10.1007/s10212-011-0087-0.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Gómez, B., & García, A. (2015). What is a better buy? Rationale and empirical analysis of unequal ratios tasks in commercial offers contexts. In: K. Krainer, & N. Vondrová (Ed.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.266-275). CERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281843/

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. In: Castro, E.; Lupiáñez, J.; Ruiz, J.; Torralbo, M. (Ed.). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 165-174). Comares

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*. John Murray.

Howe, C., Nunes, T., Bryant, P., Bell, D., & Desli, D. (2010). Intensive quantities: Towards their recognition at primary school level. Understanding number development and difficulties. *British Journal of Educational Psychology Monograph Series II*, *7*, 101-118. https://doi.org/10.1348/026151009X410362

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*, 391-417. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9249-9

Jiang, R., Li, X., Fernández, C., & Fu, X. (2017). Students' performance on missing-value word problems: a cross-national developmental study. *European Journal of Psychology of Education*, *32*, 551-570. https://doi.org/10.1007/s10212-016-0322-9

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219-233.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Ed.). *Rational numbers: an integration of research* (pp. 131-156). Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second* *handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Information Age.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers, 3rd edition*. Taylor and Francis.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Ed.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp 93-118). Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Lobato, J., & Ellis, A. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* National Council of Teachers of Mathematics.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, *27*(1), 75-92. https://doi.org/10.1080/01443410601061462

Monje, J., & Gómez, B. (2019). Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(2), 151-172. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/356158/448103

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Differentiation of stages. *Educational studies in mathematics*, *11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II - Problem-structure at succesive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational studies in mathematics*, *11*(3), 331-363.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research*, *39*, 651-675. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2004.10.002

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. Routledge & Kegan Paul.

Rivas, M., Godino, J., & Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria.

Bolema, *26*(42B), 559-588. https://www.scielo.br/j/bolema/a/6y5WgBLJQcMgVcVtJZ5JbTq/?format=pdf&lang=es

Sanz, M.T., & Gómez, B. (2015). Problemas descriptivos de fracciones. Componentes críticas. *Ensayos, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *30*(1), 83-93. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5163590.pdf

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert, & M. Behr (Ed.). *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, M., & Placa, N. (2012). Reasoning About Intensive Quantities in Whole-Number Multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 35-41. https://www.jstor.org/stable/23391962

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Ed.), *2002 Yearbook of the NCTM* (pp. 3-17). National Council of Teachers of Mathematics.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. In N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Ed.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217–285). Sage.

Thompson, P. (1994). The Development of the Concept of Speed and its Relationship to Concepts of Rate. In G. Harel & J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). SUNY Press.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Valverde, A., & Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. *Sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 523-532). SEIEM.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360-381. https://doi.org/10.1080/07370008.2010.488306