ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6921

Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla nos anos finais do Ensino Fundamental

Anna Barbara Barros Leite Aragão [a]
Síntria Labres Lautert [a]
Analucia Dias Schliemann [b]

[a] Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Praduação em Psicologia Cognitiva, Recife, PE, Brasil
[b] Tufts University, Departament of Education, Medford, USA

Recebido para publicação 28 nov. 2021. Aceito após revisão 27 jul. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Muitos estudos analisaram soluções para problemas de proporcionalidade simples mas poucos consideraram proporcionalidade dupla e múltipla. **Objetivo**: Analisar como estudantes resolvem problemas de proporção dupla e múltipla. **Design**: Análise quantitativa e qualitativa de dados empíricos. **Ambiente e participantes**: Noventa estudantes do 7º ao 9º ano em Recife. **Coleta e análise de dados**: Participantes resolveram por escrito problemas de proporção dupla e múltipla e explicaram oralmente suas estratégias. A análise considera performance e estratégias. **Resultados**: O percentual de respostas corretas por problema e ano variou de 67 a 97%, sem diferenças significativas entre tipos de problemas ou anos. Participantes usaram estratégias escalares, funcionais e mistas, sendo estratégias escalares mais frequente nos problemas de proporção dupla e estratégias funcionais nos de proporção múltipla. **Conclusões**: Problemas de proporção dupla e múltipla foram igualmente acessíveis. Respostas corretas associada à estratégia mista sugere que os estudantes consideram as múltiplas relações no enunciado dos problemas.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Problemas Matemáticos; Relações escalares e funcionais; Proporção dupla; Proporção múltipla.

Solving double and multiple proportion problems in the final years of elementary school

ABSTRACT

Background: Many studies analyzed solutions to simple proportionality problems, but few focused on double and multiple proportionality. **Objectives**: Analysis of students' solutions to double and multiple proportionality problems. **Design**:

Autora correspondente: Anna Barbara Barros Leite Aragão. Email: anna.barbara.leite@hotmail.com

Quantitative and qualitative analyses of empirical data. **Setting and participants**: Ninety students in grades 7 to 9 in Recife, Brazil. **Data collection and analysis**: Participants solved, in writing, double and multiple proportionality problems and orally explained their solutions. The analysis considers performance and solution strategies. **Results**: Percentage of correct answers per problem and school grade ranged from 67 to 97%, with no significant differences between types of problems or grades. Partipants used scalar, functional and mixed strategies, with higher frequency of scalar strategies for double and of functional strategies for multiple proportionality problems. **Conclusions**: Double and multiple proportionality problems were equally accessible. Correct answers associated with the mixed strategy suggests that students considered multiple relationships in problems' statements.

Keywords: Proportionality; Mathematical problems; Scalar and functional relations; Double proportionality; Multiple proportionaly.

INTRODUÇÃO

Essa investigação insere-se em um campo interdisciplinar, denominado Psicologia da Educação Matemática, que busca compreender os obstáculos epistemológicos, psicológicos e didáticos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem da matemática (Carraher et al., 1988; Carrião et al., 2018; Da Rocha Falcão, 2003; Lautert et al., 2020; Spinillo et al., 2021; Utsumi, 2020). Entre os aportes teóricos utilizados nos estudos desse campo de conhecimento, volta-se atenção para a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud que busca compreender a dinâmica envolvida no processo de construção do conhecimento que leva inexoravelmente ao estudo de uma variedade de *situações* em estreita relação com os *invariantes operatórios* (as propriedades fundamentais que caracterizam os conceitos) e as *representações* (linguísticas e simbólicas) que permitem representar os conceitos e suas relações. De acordo, com Vergnaud (2017, p. 39), para "analisar o desenvolvimento das competências e das conceitualizações do sujeito nos diferentes registros da sua atividade, é indispensável fragmentar o objeto" de forma a "tomar como objeto de estudo um conjunto de situações e conceitos, ou seja, um campo conceitual."

Nessa investigação, explora-se o campo conceitual multiplicativo, o qual requer o uso das operações de multiplicação e divisão e engloba uma diversidade de conceitos tais como fração, razão, proporção, probabilidade, números racionais, dentre outros conceitos (Vergnaud, 1983, 1988, 1994). O conceito de proporcionalidade, objeto dessa investigação, envolve o sentido de co-variância e múltiplas comparações, bem como, se refere à capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informação.

Caracteriza-se, ainda, pela capacidade de entender a relação multiplicativa inerente em situações de comparação (Lesh et al., 1988). Portanto, "a compreensão de conceitos e procedimentos dentro das estruturas multiplicativas requer atenção à forma como as grandezas medidas estão inter-relacionadas" (Lautert & Schlieman, 2021, p. 1421).

Estudos realizados (Hart, 1984; Nunes et. al., 1993; Ricco, 1982; Schliemann & Carraher, 1992; Schliemann & Nunes, 1990; Tournaire & Pulos, 1985; Vergnaud, 1983, 1988, 1994) descrevem o uso de estratégias escalares e funcionais em problemas de proporcionalidade, podendo essas evidenciar uma apropriação conceitual e o entendimento das representações e procedimentos mais avançados no que se refere a proporcionalidade (Levain & Vergnaud, 1994-1995).

O conceito de proporção

Em matemática, o conceito de proporcionalidade refere-se à igualdade entre duas razões A/B= C/D, por exemplo, 2/3=4/6. Situações proporcionais variam de acordo com a relação entre as grandezas podendo ser (i) *diretamente proporcionais*, quando a mudança em uma variável é observada no mesmo sentido da outra variável, ou (ii) *inversamente proporcionais,* quando a mudança em uma variável é observada no sentido inverso na outra variável. Lesh et al. (1988) ressaltam que o conceito de proporcionalidade envolve tanto a compreensão da covariância e múltiplas comparações, como a capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informações com identificação da relação multiplicativa inerente à situação. A relação descrita num problema de proporcionalidade, pode envolver a ideia de uma correspondência de um para muitos ou a correspondência de muitos para muitos. Nos dois casos, a relação entre os dois conjuntos de valores constitui uma função linear, base para a compreensão do conceito de proporção. Como enfatizam Schliemann e Carraher (1992, 1993), situações envolvendo proporções podem ser vistas não como pares de números isolados, mas como parte de uma função linear onde uma variável y é diretamente proporcional a outra variável x, o que é expresso como: $y = f(x) = ax$.

O raciocínio proporcional requer ir além da constatação da equivalência entre situações distintas, pensar em termos relativos e não em termos absolutos e estabelecer relações entre relações, isto é, relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem (Inhelder & Piaget, 1976). Do ponto de vista psicológico, considera-se que o raciocínio proporcional promove o desenvolvimento de conhecimentos específicos, os quais favorecem a evolução de raciocínio de ordem superior; por estar relacionado a inferências e predições que envolvem tanto o pensamento qualitativo como o pensamento quantitativo, frequentemente baseados em situações da vida real (Lamon, 2007; Lesh et. al. 1988; Spinillo, 2002; Sousa et al., 2015).

Situações que envolvem proporcionalidade podem apresentar-se de três formas diferentes: (i) proporção simples, definida pela existência de uma relação constante entre os dois números ou duas grandezas; (ii) proporção dupla, situações que envolvem duas ou mais proporções independentes ligadas entre si por uma variável em comum; e (iii) proporção múltipla, caracterizada por situações que envolvem duas ou mais proporções simples concatenadas. Cada qual possui características e formas de resolução específicas, as quais mobilizam raciocínios diferentes a depender da sua configuração. (Gitirana et al., 2014; Levain, 1992; Lautert et al., 2017; Levain & Vergnaud, 1994/1995; Vergnaud, 1983; 1988; 2011).

Ao resolver problemas de proporção simples, a partir de um par de dados relacionando duas variáveis, x e y, determinamos o valor da variável y que corresponde a outro valor da variável x, mantendo constante a relação entre os dois valores, Por exemplo, se um carro tem quatro rodas, três carros terão 12 rodas; se numa receita de bolo, para cada copo de leite são adicionados dois ovos, para três copos de leite serão adicionados seis ovos.

Vergnaud (1983) descreve três estratégias principais para a resolução de problemas de proporção simples: a estratégia escalar, a estratégia funcional e o uso do algoritmo conhecido como regra de três ou cálculo da quarta proporcional. Considere-se por exemplo, o seguinte problema:

> *"Três bombons custam nove reais. Quanto devo pagar por 12 bombons?"*

Utilizando-se a estratégia escalar, a cada três bombons adicionados ao número de bombons adicionam-se nove reais ao preço, obtendo-se a resposta através de adições sucessivas do valor 3 ao número de bombons e do valor 9 ao preço. Esta mesma estratégia pode utilizar a multiplicação, considerando-se que, se 12 bombons equivalem a quatro vezes três bombons, o preço de três bombons (9 reais), deve ser multiplicado por quatro, obtendo-se 36 como resultado. A solução para o mesmo problema, utilizando-se a estratégia funcional, estabelece a relação entre as duas grandezas iniciais, isto é, a razão

1:3, entre número de bombons e preço, ou que cada bombom custa 3 reais, e multiplica-se 12 por 3 para encontrar o preço de 12 bombons.

O algoritmo da regra de três estabelece que 3/12=9/x (ou, 3 está para 12 assim como 9 está para x) e calcula-se o valor de x fazendo-se a multiplicação cruzada, *9*12=3x* e resolvendo a equação através dos passos seguintes: *x= (9*12)/3, x=108/3, x=36*.

A estratégia escalar tem sido considerada como mais acessível a estudantes jovens tendo em vista que razões entre grandezas da mesma natureza apareceram mais cedo que razões entre grandezas diferentes na História da Matemática (Freudenthal, 1983) e que, como sugere Vergnaud (1983), a estratégia funcional é mais abstrata que a estratégia escalar. No entanto, estudos empíricos têm demonstrado que crianças e vendedores de rua (Carraher et al., 1988; Ricco, 1982; Schliemann & Carraher, 1992; Schliemann & Nunes, 1990) resolvem problemas de proporcionalidade do tipo muitos para muitos calculando o preço de uma unidade antes de operar sobre os valores de cada variável utilizando a estratégia escalar. Ao calcular o preço de um item, a criança ou adulto está, implicitamente, considerando a relação funcional entre as duas variáveis. Assim, uma possível estratégia de resolução de problemas de proporcionalidade pode envolver tanto os aspectos da relação escalar como aspectos típicos da relação funcional. Schliemann e Carraher (1992, 1993) encontraram que, para o caso de problemas de proporção simples de muitos para muitos, o uso de estratégias escalar, funcional, ou mista entre crianças escolarizadas depende das relações entre as grandezas descritas no problema.

Os problemas de proporção dupla e de proporção múltipla, extensivamente descritos por Vergnaud (1983, 1988, 2011) e por Gitirana, et al. (2014), apresentam três ou mais pares de relações entre grandezas. Nos problemas de proporção dupla (também denominadas de função bilinear), os pares de grandezas envolvidos estabelecem entre si relações independentes, por exemplo:

> *"Na fábrica de automóveis FabriCar, a produção é acompanhada através da contagem dos carros produzidos. Observou-se que 2 operários trabalhando 8 dias seguidos conseguem montar 4 carros. Quantos carros serão produzidos por 6 operários que trabalham 16 dias?"* (Leite, 2016, p. 36)

Neste caso, a quantidade de carros produzidos é proporcional à quantidade de operários e à quantidade de dias trabalhados; estas duas quantidades (operários e dias) não mantêm entre si uma relação de dependência, ou seja, a quantidade de operários não influencia a quantidade de dias trabalhados, ou vice-versa.

Os problemas de proporção múltipla requerem, como o próprio termo indica, a concatenação de várias proporções, vejamos o exemplo:

> *"Para preparar uma calçada um pedreiro Seu José utiliza para cada 3 baldes de cimento 6 baldes de areia e para cada 2 baldes de areia são necessários 4 baldes de água. Quando recebeu o material percebeu que havia 6 baldes de cimento e 12 baldes de areia. Desta forma quantos baldes de água Seu José precisará para fazer a massa do mesmo jeito?"* (Leite, 2016, p.36).

Nesse caso, o cimento, areia e água, mantêm entre si relações de dependência, de forma que qualquer alteração em qualquer valor, mesmo mantendo-se constantes as taxas de proporcionalidade, produzirá mudança na situação final do problema. Ou seja, se a quantidade de cimento for alterada, a quantidade de areia e a quantidade água também se modificam.

Em síntese, nos problemas de proporção dupla as relações entre as grandezas aparecem em pares separadamente (dois a dois) enquanto que, nos problemas de proporção múltipla, todos os pares de grandezas relacionam-se entre si. Levain (1992) identificou várias características que afetam o desempenho de estudantes em problemas de proporção simples, proporção múltipla e proporção dupla. Seus resultados mostram que, para estudantes franceses no ano escolar que corresponde ao quinto ano do Ensino Fundamental no Brasil, os problemas de proporção dupla são os mais difíceis. Diferentemente desses resultados, em um estudo sobre a resolução de problemas de proporção múltipla e de proporção dupla, entre estudantes do 2º ao 9º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de São Paulo, Gitirana, et al. (2014) encontraram que, no caso da proporção dupla, os estudantes do 4º ano já apresentam em torno de 30% de respostas corretas, chegando a quase 70% no último ano do Ensino Fundamental (9º ano). Já os problemas de proporção múltipla se mostraram mais difíceis, com o percentual de acertos no 9º ano menor que 40%. Cabe ressaltar que nessas investigações não incluíram análises sobre os tipos de estratégias utilizadas pelos estudantes como é o caso do presente estudo.

Considerando-se a complexidade que envolve os problemas de proporção dupla e de proporção múltipla, os resultados divergentes de estudos anteriores (Levain 1992; Gitirana, et al. 2014), torna-se relevante investigar o desempenho e as estratégias mobilizadas por estudantes ao resolverem problemas envolvendo proporção dupla e proporção múltipla. Será que os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental têm uma compreensão adequada das relações multiplicativa envolvidas nos problemas de proporção dupla e múltipla? Será que esses dois tipos de problemas apresentam o mesmo grau de dificuldade? Que estratégias são mobilizadas pelos estudantes na resolução desses problemas? Este estudo busca responder estas questões.

MÉTODO

Participantes

Participaram do estudo 90 estudantes do 7º, 8º e 9º ano do Ensino Fundamental, de ambos os sexos, de uma escola pública da cidade de Recife, considerada uma escola de referência no Estado de Pernambuco. Estes estudantes foram aleatoriamente colocados em três grupos de 30 estudantes cada, matriculados no 7º ano (M = 12 anos e 5 meses, DP 5,13 meses), no 8º ano (M =13 anos e 3 meses, DP 4,83 meses) e no 9º ano (M= 14 anos e 6 meses, DP 4,03 meses). A escolha desses anos escolares foi norteada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática que pressupõem que ao final do Ensino Fundamental os estudantes serão capazes de resolver problemas de proporcionalidade (Brasil, 1998).[1]

Procedimentos e materiais

Os dados foram coletados em duas sessões[2]. Na primeira sessão, em uma aplicação coletiva durante o horário de aula de matemática, todos os estudantes foram solicitados a resolver, por escrito, quatro problemas, dois de proporção dupla e dois de proporção múltipla. Metade dos estudantes resolveu primeiro os problemas de proporção dupla e, em seguida, os de proporção múltipla. A outra metade resolveu os problemas na ordem inversa, sendo dada a instrução: *"Gostaríamos que vocês resolvessem individualmente o problema,*

---

[1] Em conformidade com a Resolução 466/12 Conselho Nacional de Saúde (CNS), após a aprovação pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFPE em 04/03/2015, Parecer de nº 1541330, obteve-se a assinatura dos pais ou responsáveis e dos estudantes do Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE).

[2] Essa pesquisa foi realizada antes da publicação da Base Nacional Curricular (BNCC). Na BNCC a proporcionalidade deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais, representação fracionária dos números racionais; áreas; funções e probabilidade (Brasil, 2017)

nesta ficha, utilizando apenas lápis, borracha ou caneta. Abaixo de cada pergunta há um espaço para a resolução, sendo possível utilizar outros espaços em branco deste material"

Os problemas, apresentados na Figura 1, foram construídos tomando por base Vergnaud (1983, 1988, 1994, 2011) e Gitirana, et al. (2014).

Figura 1

Problemas proporção dupla e proporção múltipla apresentados na investigação (Leite, 2016, p.36)

Proporção dupla (PD)	**Proporção múltipla** (PM)
PD1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?	**PM3:** Para preparar uma calçada o pedreiro Seu José utiliza para cada 3 baldes de cimento 6 baldes de areia e para cada 2 baldes de areia são necessárias 4 baldes de água. Quando recebeu o material Seu José percebeu que havia 6 baldes de cimento e 12 baldes de areia. Desta forma quantos baldes de água Seu José precisará para fazer a massa do mesmo jeito?
PD2: Na fábrica de automóveis FabriCar, a produção é acompanhada através da contagem dos carros produzidos. Observou-se que 2 operários trabalhando 8 dias seguidos conseguem montar 4 carros. Quantos carros serão produzidos por 6 operários que trabalham por 16 dias?	**PM4:** Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite?

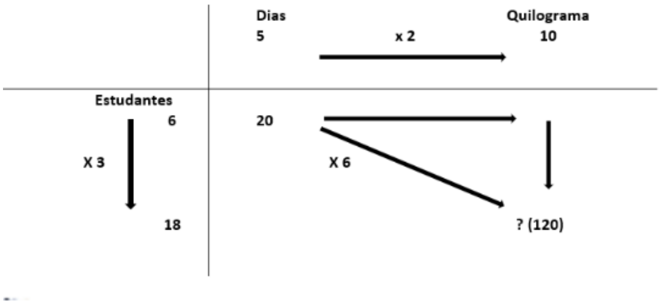
Na segunda sessão, realizada cinco a 15 dias após a primeira sessão, em uma aplicação individual durante o horário da aula de matemática, cada estudante foi solicitado a explicar como resolveu dois dos problemas propostos na primeira sessão. Eles iniciaram a explicação pelo problema PM4 e posteriormente explicaram o problema PD1, sendo suas respostas gravadas e transcritas integralmente para protocolos individuais. A Figura 2 ilustra as relações entre as grandezas em cada um dos problemas para os quais os estudantes explicaram suas estratégias de resolução. Como pode ser observado, no problema PD1 (Gincana

Escolar), para encontrar a quantidade de quilos arrecadados é necessário determinar o produto da quantidade de estudantes pela quantidade de dias em que houve arrecadação. No entanto, estas duas quantidades não mantêm entre si uma relação de dependência, ou seja, o número de estudantes participando da arrecadação não altera a quantidade de dias de trabalho. No problema PM4 (Receita Marina), para encontrar a quantidade de xícaras de trigo para fazer o mesmo bolo com três copos de leite, o estudante deverá coordenar a relação entre todas as quantidades envolvidas, copos de leite, ovos e xícaras de trigo. Isso porque, na proporção múltipla, todos os pares de grandezas mantêm entre si uma coordenação e qualquer alteração em um dos pares produz modificações em todo o conjunto.

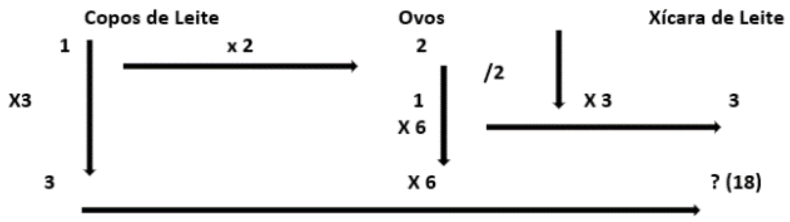
Figura 2

Problemas explicados pelos estudantes e suas representações. Conforme esquema de representação proposto/adaptado da obra Vergnaud (Lautert & Schlieman, 2021, p. 1427)

PD1 (proporção dupla): Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?



PM4 (proporção múltipla): Marina está preparando um bolo de chocolate. Na receita está escrito que para cada copo de leite é preciso usar 2 ovos. Para cada ovo, utiliza-se 3 xícaras de trigo. Quantas xícaras de trigo Marina precisará para fazer o mesmo bolo com 3 copos de leite?



Nota: As relações esclares são representadas por setas na vertical e as relações funcionais são representadas por setas na horizontal.

RESULTADOS

Inicialmente apresentaremos os resultados da análise quantitativa referente ao número de acertos por tipo de problema (proporção dupla *vs.* múltipla) e por cada um dos quatro problemas. Em seguida discutiremos as estratégias de resolução implementadas pelos estudantes, conforme reveladas pela análise do material escrito e as explicações verbais durante a entrevista individual.

Análise do desempenho

A Tabela 1 apresenta a proporção média de respostas corretas nos problemas de proporção dupla e múltipla, em função da escolaridade. Como pode ser observado, os estudantes em todos os anos escolares apresentam resultados semelhantes (com exceção do 7º ano em problemas de proporção dupla) e médias de acertos ligeiramente melhores nos problemas de proporção múltipla. Uma análise de variância (ANOVA) para medidas repetidas em um fator não revelou diferenças significativas entre os resultados através dos anos escolares (7º, 8º e 9º anos) [$F_{(2,84)} = 0,36$; p =0,69] nem entre os tipos de problema (proporção dupla e múltipla) [$F_{(1.84)} = 2,77$; $p = 0,099$]. A interação entre estes dois fatores também não foi significativa [$F_{(2,84)} = 0,44$; $p = 0,644$]. Tais resultados sugerem que, a partir do 7º ano escolar, a maioria dos estudantes desta escola são capazes de resolver problemas de proporção dupla e de proporção múltipla. O efeito de ordem de apresentação dos tipos de problema (dupla-múltipla vs. múltipla-dupla) também não revelou diferenças significativas.

Tabela 1

Média de respostas corretas e desvio padrão (entre parênteses) por tipo de problema e ano escolar.

Escolaridade	Proporção Dupla	Proporção Múltipla
7º ano	1,47 (0,78)	1,73 (0,52)
8º ano	1,63 (0,67)	1,77 (0,57)
9º ano	1,63 (0,67)	1,70 (0,60)
Total	1,58 (0,70)	1,73 (0,56)

Nota: Pontuação máxima em cada problema igual a 2.

A Tabela 2 apresenta a média de respostas corretas dos estudantes em cada um dos dois problemas de cada tipo. De modo geral, os estudantes apresentam melhores resultados no problema Receita, (média 0,90) e resultados mais baixos no problema Carro (média 0,77), com pequenas variações através dos anos escolares. Os resultados da ANOVA para medidas repetidas no fator problema não revelou diferenças significativas entre os quatro tipos de problemas [$F_{(1,87)} = 3{,}290$; $= 0{,}73$] nem entre os anos escolares [$F_{(2,87)} = 0{,}921$; $p = 0{,}402$].

Tabela 2.

Média de respostas corretas e desvio padrão (entre parênteses) por problema e por ano escolar.

Escolaridade	Proporção Dupla		Proporção Múltipla	
	Gincana	Carro	Calçada	Receita
7º ano	0,80 (0,41)	0,67 (0,48)	0,77 (0,43)	0,97 (0,18)
8º ano	0,77 (0,43)	0,87 (0,35)	0,87 (0,35)	0,90 (0,31)
9º ano	0,87 (0,35)	0,77 (0,43)	0,87 (0,35)	0,83 (0,38)
Total	0,81 (0,40)	0,77 (0,43)	0,83 (0,38)	0,90 (0,30)

Análise das estratégias de resolução

O material escrito e as respostas às entrevistas na qual os estudantes explicavam a forma como resolveram os problemas sobre a “Gincana” (proporção dupla) e sobre a “Receita” (proporção múltipla) foram analisados por um juiz, sendo 18 casos, para os quais a classificação era problemática, encaminhados para um segundo juiz independente. Foram detectados quatro casos de classificação discordante. Esses casos foram discutidos pelos dois juízes e atribuída uma classificação final por consenso. Nos poucos casos onde a explicação verbal não era clara, considerou-se o que o trabalho escrito sugeria. Apenas quatro estudantes afirmaram não lembrar como chegaram a uma resposta escrita e dois apresentaram uma explicação que não era clara.

Nos 172 problemas resolvidos por escrito e para os quais os estudantes explicaram suas estratégias de resolução durante a entrevista, foram identificadas três estratégias: (i) a estratégia escalar, quando os estudantes demonstram ou explicam a solução utilizando o fator escalar para cada dupla de valores de uma mesma grandeza; (ii) a estratégia funcional, quando os estudantes demonstram ou explicam a solução utilizando o fator funcional que relaciona os valores de duas grandezas diferentes e, (iii) a estratégia mista, quando os estudantes usam ou explicam a solução utilizando tanto as relações escalares como as relações funcionais. Embora o ensino da regra de três faça parte do livro texto adotado para o 7º ano, apenas um estudante, do 9º ano, utilizou a regra de três para calcular suas respostas. Este estudante explicou seu trabalho utilizando a estratégia escalar. Exemplos dessas estratégias, com base no material escrito e explicações verbais para os dois tipos de problemas serão apresentados após a análise quantitativa das respostas dos estudantes. A Tabela 3 mostra a distribuição dos participantes em cada ano escolar de acordo com o tipo de estratégia utilizada na resolução do problema de proporção dupla (Gincana) e no problema de proporção múltipla (Receita).

Tabela 3

Frequência e percentual dos tipos de estratégias adotadas pelos estudantes para resolver cada tipo de problema.

Escolaridade	**Proporção Dupla (Gincana)**				**Proporção Múltipla (Receita)**			
	Ausente	Escalar	Funcional	Mista	Ausente	Escalar	Funcional	Mista
7º ano	**3**	**18**	**1**	**8**	**0**	**6**	**19**	**5**
	(10,0)	(60,0)	(3,3)	(26,7)	(0)	(20,1)	(63,3)	(16,6)
8º ano	**2**	**24**	**0**	**4**	**0**	**11**	**11**	**8**
	(6,7)	(80,0)	(0)	(13,3)	(0)	(36,6)	(36,6)	(6,8)
9º ano	**1**	**22**	**1**	**6**	**0**	**10**	**19**	**1**
	(3,3)	(73,3)	(3,3)	(20,1)	(0)	(33,3)	(63,4)	(3,3)
Total	**6**	**64**	**2**	**18**	**0**	**27**	**49**	**14**

	(6,7)	(71,1)	(2,2)	(20,0)	(0)	(30,0)	(54,4)	(15,6)

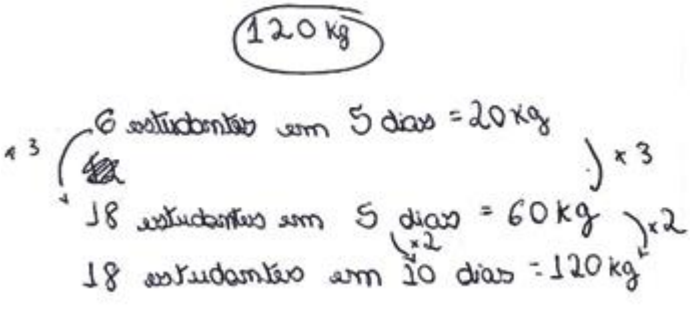
Nos problemas de proporção dupla a grande maioria dos estudantes adotou estratégias escalares, com pouco uso de estratégias funcionais e mistas. Nos problemas de proporção múltipla mais da metade dos estudantes adotou estratégias funcionais, seguido de uso de estratégias escalares e algumas estratégias mistas. Estas tendências aparecem nos três anos escolares, com exceção das respostas dos alunos do 8º ano para o problema de proporção múltipla: neste caso, percentagens iguais de estudantes adotaram a estratégia escalar e a funcional. A associação entre os tipos de problema (proporção múltipla e proporção dupla) e as estratégias de resolução (relações escalares, relações funcionais e mista), foi significativa ($\chi^2_{(2)} = 58,72$; $p <. 0001$).

Exemplos de soluções para o problema de proporção dupla

Como apresentado acima, a *estratégia escalar* for utilizada por 71,1% dos estudantes para resolver o problema de proporção dupla. A Figura 3 mostra o trabalho escrito de uma estudante que utilizou as relações escalares para resolver e explicar como resolveu o problema.

Figura 3

Protocolo 13, estudante do 8º ano, sexo feminino.



Examinador: [leitura do problema Gincana escolar] *Me explica como você resolveu esse problema.*

Participante: *Primeiro eu vi quantos quilos dezoito estudantes iam conseguir na mesma quantidade de dias; então eu vi que, em cinco dias, eles conseguiriam* *sessenta quilos porque é o triplo de vinte quilos. Daí, em dez dias, que é o dobro, eu conseguiria cento e vinte quilos.*

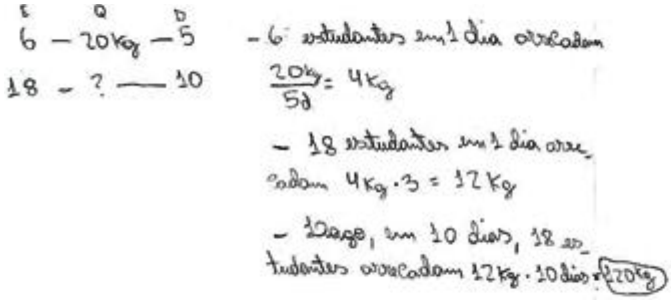
Como mostra o trabalho escrito, a estudante utiliza a relação escalar (vezes 3) entre o número inicial de estudantes (6) e o número final (18), bem como a aplicação deste fator escalar para o número de quilos (20), levando a um primeiro resultado de 60 kg produzidos por 18 estudantes. Para a segunda parte do problema, a estudante enfatiza a relação escalar entre números de dias (vezes 2) e aplica este fator escalar sobre o número anteriormente determinado de quilos (60) obtendo 120 kg como resultado.

Em apenas dois problemas de proporção dupla, observou-se que os estudantes tentaram utilizar as relações funcionais, em ambos os casos apresentando resultados errados.

A estratégia mista foi utilizada por 20% dos estudantes para resolver o problema de proporção dupla, considerando relações escalares e funcionais no trabalho escrito e na explicação, como mostra o exemplo na Figura 4.

Figura 4

Protocolo 17, estudante do 8º. ano, sexo masculino



Examinador: [leitura do problema Gincana escolar]. *Me explica como você resolveu esse problema.*

Participante: *Eu anotei as informações do problema. Ai, primeiramente eu fui ver em um dia quantos quilos seis estudantes arrecadam. Então eles arrecadam quatro quilos. Aí dezoito estudantes arrecadam quanto em um dia? Então multiplica por três a quantidade inicial de estudantes e, pelo princípio da constância, também é preciso multiplicar por três a quantidade de quilos* *arrecadados em um dia, que dá doze quilos em um dia. Mas a pergunta é em dez dias. Então só é multiplicar os doze quilos por dez dias, que dá cento e vinte quilos de alimentos arrecadados.*

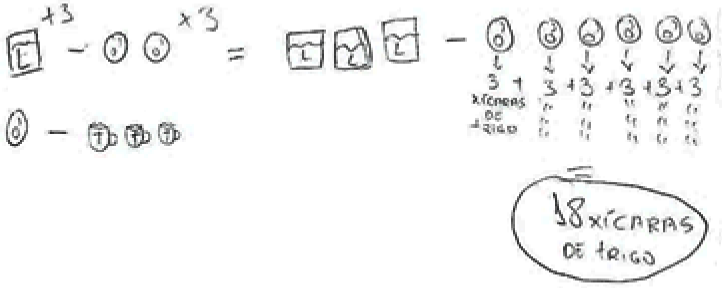
Neste exemplo de uso da estratégia mista, o estudante registra os dados do problema na primeira linha do trabalho escrito e determina que os estudantes arrecadaram 4 kg por dia (resultado da divisão de 20kg por 5 dias). Em sua explicação, ele descreve que "*primeiramente eu fui ver em um dia quantos quilos seis estudantes arrecadam, então eles arrecadam quatro quilos" (sic)* considerando, portanto, relação funcional entre quilos de alimento por um dia de trabalho. Posteriormente ele multiplica a quantidade de quilos arrecadadas em 1 dia por 3, o fator escalar relacionando 6 estudantes a 18 estudantes ressaltando que, "*pelo princípio da constância também é preciso multiplicar por três a quantidade de quilos arrecadados em um dia, que dá doze quilos em um dia"*(sic). Ao finalizar retoma a questão do problema, "mas a pergunta é em dez dias, então só é multiplicar os doze quilos por dez dias, que dá cento e vinte quilos de alimentos arrecadados", aplicando o fator funcional, 10 dias, à quantidade de quilos arrecadados, para encontrar a resposta correta, 120 kg.

Exemplos de soluções para o problema de proporção múltipla

Como apresentado na Tabela 3, a estratégia escalar foi utilizada por 30% dos estudantes para resolver o problema de proporção múltipla. A Figura 5 mostra como uma estudante do 8º ano resolveu o problema e explicou sua estratégia de resolução com base nas relações escalares.

Figura 5

Protocolo 15, estudante do 8º ano, sexo feminino



Examinador: [leitura do problema Receita Marina]. *Me explica como você resolveu esse problema.*

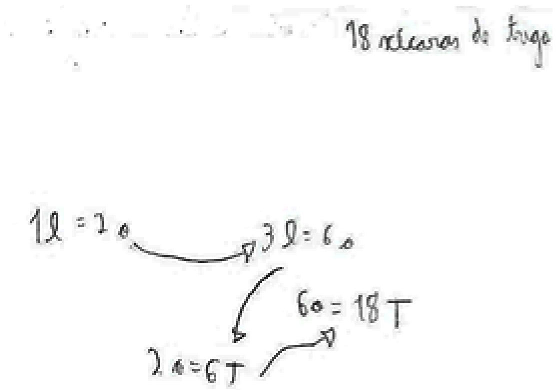
Participante: *Deixa eu ver aqui como é que eu posso começar. Eu vi primeiro que pra fazer um bolo ela precisaria de... é eu primeiro tentei reproduzir a questão em figura pra ficar mais fácil e aqui dizia que na receita está escrito para cada copo de leite eu preciso usar dois ovos. Então eu coloquei um copo de leite que preciso de dois ovos. E ele disse que para cada ovo iria ser duas xicaras de trigo. Então eu coloquei aqui que para cada ovo três xicaras de trigo ai... quando ele disse que Marina precisaria fazer o mesmo bolo com três copos de leite eu multipliquei por três, multipliquei por três, que deu três copos de leite e seis ovos. Então, se pra cada ovo é preciso três copos de trigo eu fiz aqui três xicaras de trigo, então eu somei cada um e deu dezoito.*

Com base na representação e no trecho transcrito da entrevista, é identificado que a estudante apresenta o fator escalar (vezes 3) aplicado ao número de copos de leite e ao número de ovos, levando ao resultado para a primeira parte do problema como desenhos de três copos de leite correspondendo a seis ovos. Abaixo do desenho de cada ovo escreve 3, seis vezes, com o sinal de adição entre eles. Assim, para a segunda parte, usa a relação escalar por adições sucessivas, somando 3 xícaras de trigo, seis vezes. Coerente com a solução escrita, na entrevista, a participante explica que *"o mesmo bolo com três copos de leite eu multipliquei por três, que deu três copos de leite e seis ovos, e, "eu fiz aqui três xicaras de trigo então eu somei cada um e deu dezoito."* (sic)

A Figura 6 apresenta um exemplo do uso da estratégia funcional, utilizada por 54,4% dos estudantes na resolução dos problemas de proporção múltipla. Nesta figura, o trabalho escrito mostra que o estudante estabelece relações funcionais entre copo de leite e ovos (1 para 2) e multiplica 3 copos de leite por 2 para obter 6 ovos. Posteriormente indica que 2 ovos correspondem a 6 xícaras de trigo, sem explicitar o cálculo, e que 6 ovos correspondem a 18 xícaras. Ao explicar o trabalho escrito, menciona "eu multipliquei três copos de leite por dois ovos, dá seis ovos", utilizando, portanto, o fator funcional, 2. Em seguida continua: "*aí eu multipliquei seis por três que são os números de xícaras utilizadas por cada ovo*" (sic) também explicitando o fator funcional, 3.

Figura 6

Protocolo 8, estudante do 7º. ano, sexo masculino



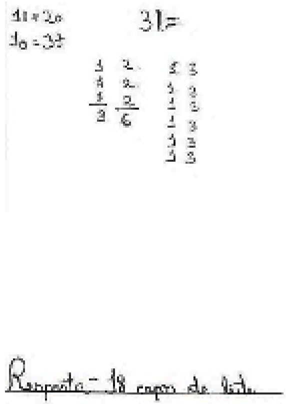
Examinador: [leitura do problema Receita Marina]. *Me explica como você resolveu esse problema.*

Participante: *Eu vi que para cada copo de leite precisa de dois ovos e três xícaras de trigo. Ai, primeiro eu multipliquei três copos de leite por dois ovos, dá seis ovos. Ai eu multipliquei seis por três que são os números de xícaras utilizadas por cada ovo.*

A estratégia mista (ver exemplo na Figura 7) foi utilizada por 15,6% dos estudantes para resolver o problema de proporção múltipla.

Figura 7

Protocolo 4, estudante do 7º. ano, sexo feminino



> **Examinador:** [leitura do problema Receita Marina]. *Me explica como você resolveu esse problema.*
>
> **Explicação verbal:** *Eu pensei assim: como são três copos de leite, para cada copo de leite são dois ovos. Então três vezes dois dá seis ovos, e pra cada ovo precisa de três xicaras de trigo. Então três vezes seis dá dezoito xícaras de trigo. Eita aqui [na resposta escrita] eu coloquei copos de leite mas eram xícaras de trigo.*

Neste caso de uso da estratégia mista, a estudante registra as relações funcionais descritas no enunciado do problema e, em seguida apresenta adições sucessivas dos valores nas relações funcionais 1 para 2 (1 copo de leite para 2 ovos) e 1 para 3 (1 ovo para 3 xícaras de trigo). Em seguida considera as relações escalares adicionando, no primeiro caso, 3 vezes (fator escalar) o valor 1 e o valor 2, obtendo três copos de leite e seis ovos. No segundo caso, adiciona 6 vezes (fator escalar) o valor 1 e o valor 3, obtendo 6 ovos e 18 xícaras de trigo. Na entrevista inicia a explicação descrevendo a relação funcional e multiplicando 3 copos por 2 ovos: "*como são três copos de leite para cada copo de leite são dois ovos, então três vezes dois dá seis ovos*". Na segunda parte explica que multiplicou 3 xícaras de trigo por 6 (o fator escalar), para obter 18 xícaras: "*então três vezes seis dá dezoito xícaras de trigo*" (sic). Conclui chamando atenção para o fato de ter se equivocado ao escrever a resposta ao problema: "*Eita aqui eu coloquei copos de leite, mas eram xícaras de trigo*" (sic).

Relação entre respostas (corretas e incorretas) e estratégias

Considerando que estudos anteriores que sugerem que as estratégias escalares seriam mais acessíveis que as funcionais, torna-se interessante examinar se existe relação entre a frequência de respostas corretas e o tipo de estratégia de resolução adotada pelo estudante (ver Tabela 4).

Tabela 4

Frequência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas e incorretas por estratégia de resolução.

Tipos	**Proporção Dupla** (Gincana)		**Proporção Múltipla** (Receita)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
Ausente	1 (0,5)	5 (2,8)	0 (0)	0 (0)
Escalar	58 (32,2)	6 (3,3)	23 (12,8)	4 (2,2)
Funcional	0 (0)	2 (1)	44 (24,4)	5 (2,8)
Mista	18 (10)	0 (0)	14 (8)	0 (0)

Como mostra a Tabela 4, as respostas incorretas são raras em ambos os tipos de problema tanto para o uso da estratégia escalar como para a funcional. É interessante notar que as estratégias mistas levaram sempre a respostas corretas em ambos os tipos de problema. A associação entre a estratégia mista e a resolução correta sugere que os estudantes, ao fazerem uso deste tipo de estratégia, teriam uma maior flexibilidade ao considerar as relações proporcionais entre as quantidades descritas nos problemas.

DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Os resultados deste estudo mostram que os estudantes dos 7º, 8º e 9º ano escolar apresentam de 67 a 97% de respostas corretas para problemas de proporção dupla e de proporção múltipla, não havendo diferenças significativas na média de respostas corretas entre os dois tipos de problemas. Diferentemente de resultados de estudos anteriores (ver Levain, 1992; Gitirana, et al., 2014), no presente estudo os problemas de proporção dupla e múltipla foram igualmente acessíveis para a amostra investigada. Uma possível explicação para esses resultados pode estar relacionada ao fato de que nessa escola, o ensino de algoritmos para a resolução de problemas de proporcionalidade sugerido pelos livros texto era iniciado com a discussão de relações entre quantidades, antes do estudante ser introduzido ao uso da regra de três. No entanto, essa questão precisa ser melhor investigada, com estudos onde a introdução do algoritmo da regra de três não seja precedida por instruções sobre as relações entre as quantidades.

Do ponto de vista educacional, os resultados dessa investigação apontam para o uso de estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade relacionadas ao tipo de experiências prévias do indivíduo (Schliemann & Carraher, 1992, 1993). Constatou-se uma frequência maior de uso de relações escalares nos problemas de proporção dupla e uso de relações funcionais para os de proporção múltipla, nos três anos escolares. Além disso, coerente com resultados de outros estudos (Levain, 1992; Schliemann; Carraher, 1992, 1993) estes resultados sugerem uma influência do tipo de relações numéricas apresentadas no enunciado do problema: no problema de proporção dupla analisado no presente estudo, a relação funcional entre número de estudantes (6) e o número de quilos de alimentos (20) era mais difícil de ser computada que as relações escalares.

A totalidade das respostas corretas associada à estratégia mista (procedimentos de resolução e explicações que salientam tanto o uso de relações escalares como de relações funcionais) merece destaque pois sugere que os estudantes, ao utilizarem esta estratégia, consideram as múltiplas relações presentes no enunciado dos problemas. Estes estudantes lançam mão de esquemas de ação que envolvem tanto operadores escalares como operadores funcionais, considerando as várias relações em problemas de proporção dupla e múltipla. (Lautert & Schliemann, 2021; Nunes & Bryant, 1997; Santos, 2015; Vergnaud, 2009).

Por fim, o uso de diferentes formas de representação escrita produzidas pelos estudantes, desenhos, adições sucessivas, ou setas acompanhadas do sinal da multiplicação, evidenciam que, mesmo sendo instruídos no contexto escolar em termos de passos para a resolução de algoritmos (por exemplo, a regra de três e procedimentos algébricos), os estudantes adotam notações não convencionais e estratégias que revelam a compreensão de relações escalares e funcionais para a resolução dos problemas de proporção dupla e múltipla. A ausência do uso da regra de três, apesar deste algoritmo fazer parte do livro didático do 7º ano, pode estar relacionada ao fato das relações numéricas nos problemas serem fáceis de serem determinadas mentalmente. Estudos futuros com números maiores poderão ilustrar melhor a importância e possibilidade do uso da regra de três para a resolução de problemas de proporção dupla e múltipla no contexto escolar. De qualquer forma, nossos resultados sugerem que a maioria dos estudantes que participaram deste estudo estão preparados para adotar o algoritmo da regra de três com compreensão.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, ao CNPq e à Universidade Federal de Pernambuco pelo apoio à pesquisa realizada no Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática da referida instituição.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

A. B. B. L. A. contribuiu na geração da ideia da pesquisa, na construção do instrumento, na coleta e tabulação dos dados, na análise dos dados, na revisão da literatura, na redação do artigo. S. L. L. contribuiu na geração da ideia da pesquisa, na construção do instrumento, na análise dos dados, na redação do artigo e na formalização do artigo para submissão. A. D. S. contribuiu para análise dos dados, na revisão da literatura e na redação do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS

Os dados produzidos na investigação serão disponibilizados pela primeira autora mediante solicitação considerada razoável pelas autoras.

REFERÊNCIAS

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica SEB. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica, SEB. http://basenacionalcomum.mec.gov.br

Carraher, T. N., Schliemann, A. D. & Carraher, D.W. (1988). *Na vida dez, na escola zero.* Cortez.

Carrião, A., Lautert, S. L., & Spinillo, A. G. (2018). Cognitive and Linguistic Processes in Brazilian Mathematics Education: Theoretical Considerations and Educational Implications. In A. J. Ribeiro, R. E. S. R. Borba, L. Healy, & S. H. A. Ali Fernandes. (Orgs.). *Mathematics Education in Brazil: Panorama of Current Research*. (pp.193-210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93455-6_10

Da Rocha Falcão, J. T. (2003). *Psicologia da Educação Matemática: Uma introdução*. Autêntica

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Riedel.

Gitirana, V., Campos, T. M. M., Magina, S. & Spinillo, A. G. (2014). *Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. Proem.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: children's strategies and errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics*. The NFER-NELSON Publishing.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1976). *Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente*. Editora Pioneira.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.

Lautert, S. L. & Schliemann, A. D. (2021).Using and Understanding Algorithms to Solve Double and Multiple Proportionality Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*, 1421–1440. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10123-4

Lautert, S. L., Schliemann, A. D. & Leite, A. B. B. (2017). Solving and understanding multiple proportionality problems. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology Mathematics Education*. (vol.2, p.47). PME.

Lautert, S. L., Santos, E. M. & Magina, S. M. P. (2020). Psicologia da Educação Matemática: a contribuição de um campo a partir da ANPEPP. In E. M. Santos & S. L. Lautert (Orgs.) *Diálogos sobre o ensino, a aprendizagem e a formação de professores: contribuições* *da Psicologia da Educação Matemática* (pp. 11-38). Editora Universidade de Pernambuco – Edupe.

Leite, A. B. B. (2016). *Resolução de Problemas de Proporção Dupla e Múltipla: um olhar para as situações diretamente proporcionais*. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/20233

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). NCTM.

Levain, J. P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(2), 139-161. https://doi.org/10.1007/BF00588053

Levain, J. P. & Vergnaud, G. (1994-1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Gran*, (56), 55-66. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/56n5_1562850226137-pdf

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças Fazendo Matemática*. Artes Médicas.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D.W. (1993). *Mathematics in the Streets and in schools*. Cambridge University Press.

Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics*, *13*(3), 289-327. https://www.jstor.org/stable/3482253

Santos, A. (2015). Formação de professores e as estruturas multiplicativas. Appris.

Schliemann, A. D. & Nunes, T. (1990). A situated schema of proportionality. *British Journal of Developmental Psychology*, *8*, 259-268. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1990.tb00841.x

Schliemann, A. D. & Carraher, D.W. (1992). Proportional reasoning in and out of school. In P. Light & G. Butterworth (Eds.). *Context and Cognition*. (pp. 47-73). Harvester-Wheatsheaf.

Sousa, F., Palhares, P. & Oliveira, M. L. (2015). Raciocínio Proporcional e Resolução de Problemas em Contextos Piscatórios Portugueses. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*, 76-104.

https://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/196

Spinillo, A. G. (2002). O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica, 15*(3), 475-487. https://doi.org/10.1590/S0102-79722002000300003

Spinillo, A. G., Lautert, S. L., & Borba, R. E. S. R. (2021). Mathematical Reasoning: The Learner, the Teacher, and the Teaching and Learning. In A. G. Spinillo, S. L Lautert, & R. E. S. R Borba. (Orgs.). *Mathematical Reasoning of Children and Adults. Teaching and Learning from an Interdisciplinary Perspective* (pp.1-15). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_1

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies* in *Mathematics, 16*(2)*,* 181–204. https://www.jstor.org/stable/3482345

Utsumi, M. C. (2020). *Pesquisas em Psicologia da Educação Mmatemática: avanços e atualidades.* Pedro & João.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. A. Lesh & Landau, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and procedures* (pp.127-174). Academic

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In H. Hiebert & M. Behr *Number concepts and operations in middle grades* (pp.141-161). Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In G. Harel & J. Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). University of New York Press.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Editora da UFPR.

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*. *Número Especial, 1*, 15-27. https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400002

Vergnaud, G. (2017). O que é aprender? Por que Teoria dos Campos Conceituais? In E. P. Grossi (Org). *O que é aprender? O Iceberg da Contextualização - Teoria dos Campos Conceituais.* GEEMPA. Coleção Teoria dos Campos Conceituais.