ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7021

Alguns Referenciais Teóricos Relacionados ao Pensamento Matemático Avançado

Osvaldo Inarejos [a]
Debora Cristiane Barbosa Kirnev [b]
Ana Carolina Coutinho Consani [a]
Angela Marta Pereira das Dores Savioli [c]

[a] Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, PR, Brasil.
[b] Dk Educacional, Londrina, PR, Brasil.
[c] Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Matemática, Londrina, PR, Brasil.

Recebido para publicação 3 mar. 2022. Aceito após revisão 4 abr. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Na Educação Matemática, o referencial teórico do Pensamento Matemático Avançado tem sido um aporte para algumas pesquisas. Contudo, outras optam por um referencial teórico diferente, mas de alguma forma relacionado. Identificar as similaridades e divergências entre esses referenciais pode elucidar as motivações do pesquisador ao adotar um ou outro referencial. **Objectivos**: sintetizar três pesquisas envolvendo, respectivamente, a Criatividade Matemática, a Atividade Matemática Avançando e o Conhecimento Matemático Avançado e ilustrar possíveis contribuições desses referenciais teóricos na análise de uma produção escrita. **Design**: a pesquisa é de natureza qualitativa e teórica e especulativa, de modo que relações teóricas foram realizadas e utilizadas posteriormente na análise da produção escrita. **Ambiente e Participantes**: a pesquisa envolve uma participante licenciada em Matemática com a qual os pesquisadores tiveram uma interação virtual para apresentação das questões. **Recolha de Dados e análise**: analisam-se os procedimentos realizados na resolução de questões elaboradas com base no banco de questões da OBMEP e discute-se, com o apoio desse exemplo de análise, possíveis contribuições de cada referencial na análise de uma produção escrita. **Resultados**: nenhum dos referenciais ilumina todo o pensamento mobilizado na atividade, mas cada um favorece o foco em determinados aspectos que foram verificados na produção escrita da participante da pesquisa, em conformidade às similaridades e divergências enfatizadas na apreciação teórica de cada referencial. **Conclusões**: o conhecimento de diferentes quadros teóricos possibilita ao professor fundamentações para exercer sua prática docente e ao pesquisador opções para uma escolha adequada à sua pesquisa.

Autor correspondente: Ana Carolina Coutinho Consani. Email: acconsani@gmail.com

Keywords: Educação Matemática; Pensamento Matemático Avançado; Criatividade Matemática; Atividade Matemática Avançando; Conhecimento Matemático Avançado.

Some Theoretical References Related to Advanced Mathematical Thinking

ABSTRACT

Background: In Mathematics Education, the theoretical reference of Advanced Mathematical Thinking has contributed to some research. However, others opt for a different but somehow related theoretical reference. Identifying the similarities and differences between those references can elucidate the researcher's motivations when adopting one or another reference. **Objective**: to synthesise three studies involving Mathematical Creativity, Advancing Mathematical Activity and Advanced Mathematical Knowledge, respectively, and to illustrate possible contributions of those theoretical references in the analysis of a written production. **Design**: the research is qualitative and theoretical and speculative so that theoretical relationships were carried out and used later in the analysis of the written production. **Setting and Participants**: the research involves a participant with a degree in mathematics with whom the researchers had a virtual interaction to present the questions. **Data collection and analysis**: the procedures performed in the resolution of questions prepared based on the OBMEP question bank are analysed and, with the support of this example of analysis, possible contributions of each reference in the analysis of a written production are discussed. **Results**: none of the references covers all the thinking mobilised in the activity, but each one favours the focus on specific aspects that were verified in the written production of the research participant, in line with the similarities and divergences emphasised in the theoretical appreciation of each reference. **Conclusions**: the knowledge of different theoretical frameworks provides the teacher with foundations to exercise their teaching practice and the researcher with options for an adequate choice for their research.

Keywords: Mathematics Education; Advanced Mathematical Thinking; Mathematical Creativity; Advanced Mathematical Activity; Advanced Mathematical Knowledge.

INTRODUÇÃO

O quadro teórico do Pensamento Matemático Avançado (PMA) desenvolvido por Tall (2002) e Dreyfus (2002) tem sido adotado em investigações. Contudo, outros autores se basearam em referenciais diferentes, mas de alguma forma relacionados.

O livro *Advanced Mathematical Thinking*, organizado por David Tall em 1991 e republicado em 2002, conta com capítulos escritos por Tall (2002), Dreyfus (2002), Ervynck (2002), dentre outros, ainda hoje adotados com frequência por pesquisadores. Alguns conceitos de pensamento matemático anteriores foram incorporados a esse referencial, como os de conceito imagem e conceito definição (Tall &Vinner, 1981), retomados por Tall (2002).

Embora Tall (2002) entenda o PMA como um pensamento matemático que se diferencia do elementar pela possibilidade de definição e dedução formal, pela prova de maneira lógica com base nessas definições, pela abstração formal e pela consequência da matemática avançada, em uma perspectiva que visa superar as dificuldades de estudantes na transição para o Ensino Superior, outros pesquisadores consideram que o PMA ocorre desde níveis escolares mais básicos. Essa perspectiva é coerente com a de Dreyfus (2002), que considera o PMA como um processo complexo que envolve um grande número de processos que interagem de formas intrincadas. Segundo Dreyfus (2002, p. 26, tradução nossa), “Não há uma distinção nítida entre muitos dos processos de pensamento matemático elementar e avançado”, mas “Uma característica distintiva entre o pensamento avançado e o elementar é a complexidade e como ela é gerenciada”. Processos que permitem gerenciar a complexidade de uma situação matemática, tais como generalização, síntese e tradução entre representações, podem ocorrer em diferentes níveis de escolaridade.

Bianchini e Machado (2015), Sousa e Almeida (2017), Vidotti e Kato (2018) e Mateus-Nieves e Jimenez (2020) são exemplos de pesquisas que utilizaram o referencial do PMA. A primeira trabalhou os processos de PMA, de acordo com Dreyfus (2002), com professores em formação continuada que revisaram suas reflexões a respeito das próprias resoluções após estudarem esses processos. A segunda analisou processos de PMA, segundo Tall (2002) e Dreyfus (2002), de um licenciando enquanto ele desenvolvia atividades de modelagem. A terceira analisou as dificuldades de estudantes da licenciatura em Matemática na aprendizagem de limite de funções de várias variáveis, baseando-se nos conceitos propostos por Tall e Vinner (1981). E a quarta articulou a Teoria dos Nós com o PMA, de acordo com pesquisas que se basearam em Tall, Dreyfus e outros, elaborando um seminário para estudantes da graduação em Matemática aprofundarem-se no processo de generalização matemática.

Conforme destacamos, essas pesquisas que utilizaram o PMA escolheram determinados teóricos como base, bem como as ideias desses teóricos e, em alguns casos, o articularam com outros estudos relacionados ao contexto de seus objetivos, por vezes criando uma interpretação própria desse quadro. Outras pesquisas basearam-se em um referencial teórico diferente do PMA para estudar o pensamento avançado em Matemática, tais como o Princípio da Articulação, o Conhecimento Matemático Avançado, a Criatividade Matemática e a Atividade Matemática Avançando.

Os diferentes referenciais teóricos adotados pelos pesquisadores nos levaram a questionar quais os motivos dessas escolhas, se poderiam ser os mesmos e em que situações um seria mais adequado que o outro. As similaridades entre teorias podem indicar uma mesma perspectiva e uma mesma lógica subjacente ao trabalho com cada uma. Por outro lado, suas divergências precisam ser esclarecidas para que pesquisadores em Educação Matemática escolham qual se adequa melhor à sua pesquisa.

Visando responder a esses questionamentos, estabelecemos o objetivo de sintetizar três pesquisas envolvendo, respectivamente, a Criatividade Matemática, a Atividade Matemática Avançando e o Conhecimento Matemático Avançado e ilustrar possíveis contribuições desses referenciais teóricos na análise de uma produção escrita.

Utilizando o PMA como base teórica (Tall, 2002; Dreyfus, 2002), discutimos os outros três referenciais teóricos vinculados ao corpus de artigos que definimos como escopo da pesquisa: o Conhecimento Matemático Avançado (Zazkis & Leikin, 2010), a Criatividade Matemática (Nadjafikhah, Yaftian, & Bakhshalizadeh, 2012) e a Atividade Matemática Avançando (Rasmussen, Zandieh, King, & Teppo, 2005).

Assim, discorremos na próxima seção a respeito das questões metodológicas. Posteriormente, sintetizamos os artigos do corpus, seus referenciais teóricos e relações com o PMA e entre si. Então, analisamos uma produção escrita à luz desses referenciais. Por fim, dissertamos algumas conclusões.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta pesquisa, de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e teórica e especulativa (Martineau, Simard, & Gauthier, 2001), utilizamos três referenciais teóricos para analisar os procedimentos realizados por uma professora de Matemática na resolução de questões elaboradas com base na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas [OBMEP] (2007). Para isso, esses três referenciais teóricos foram discutidos a partir de três pesquisas que sintetizamos e interpretamos em busca de relações, fundamentados no PMA. Estabelecemos, apoiados nessas discussões e no exemplo de análise, possíveis contribuições de cada referencial na análise de uma produção escrita.

A fim de embasar o método referente às relações que serão estabelecidas entre os referenciais teóricos em meio às sínteses, precisamos esclarecê-lo antes de iniciar a síntese do corpus de artigos. Por essa razão, descrevemos os procedimentos metodológicos nesta seção, anterior à descrição do quadro teórico.

Para comparar os referenciais teóricos e observar algumas similaridades, antes e depois de ilustrá-las na análise de uma produção escrita, realizamos uma pesquisa teórica e especulativa, isto é, promovemos declarações teóricas a partir de outras afirmações teóricas (Martineau, Simard, & Gauthier, 2001). A pesquisa teórica e especulativa envolve os eixos de interpretar, argumentar e contar. "O eixo de interpretar envolve a hermenêutica e a análise conceitual; o eixo de argumentar nos leva de volta à retórica e, por fim, o eixo de contar envolve a prática literária" (Martineau, Simard, & Gauthier, 2001, p. 9, tradução nossa).

A hermenêutica é a arte de interpretar, necessária para evitar desentendimentos à medida que a distância geográfica, temporal ou cultural separa um texto de seu leitor (Martineau, Simard, & Gauthier, 2001).

> Pesquisadores que realizam pesquisas teóricas e especulativas são confrontados com os textos (livros, artigos, comunicações) de outros pesquisadores que se dirigiram ao mesmo assunto. Assim, antes mesmo de produzir seu próprio texto, os pesquisadores devem, portanto, interpretar esses textos anteriores, a fim de ter uma visão do campo investigado, para especificar sua questão de pesquisa e para formular um problema original. Essa permanência na literatura especializada é um exercício de interpretação, um trabalho de hermenêutica e análise conceitual. (Martineau, Simard, & Gauthier, 2001, p. 12, tradução nossa).

Segundo Martineau, Simard e Gauthier (2001, p. 16, tradução nossa), "a partir da análise conceitual, ele [o pesquisador] manterá em memória a necessidade de definir corretamente os conceitos". A definição precisa dos conceitos presentes nos referenciais teóricos de pensamento matemático é importante para estabelecermos relações coerentes entre conceitos de referenciais diferentes. A argumentação recorre a apresentações ou afirmações que visam mostrar a validade de uma posição. Assim, a análise teórica do corpus e um exemplo de análise de uma produção escrita vêm a contribuir para a pluralidade da argumentação, recomendada por Martineau, Simard e Gauthier (2001). Finalmente, no eixo de contar, destacamos a produção de uma "problemática inédita, para propor uma nova análise com base em interpretação de textos anteriores e argumentação rigorosa" (Martineau, Simard, & Gauthier, 2001, p. 20, tradução nossa).

A análise de uma produção escrita nos permite ilustrar as diferenças entre análises realizadas com cada um dos referenciais teóricos, bem como exemplificar a utilização desses referenciais, visando contribuir com pesquisas futuras.

Em uma análise de produção escrita, bem como em uma pesquisa educacional em geral, não é possível isolar uma causa e manter as outras constantes para verificar os efeitos de sua variação. Não somente o referencial teórico adotado, mas os sujeitos pesquisados, as resoluções e até mesmo os pesquisadores influenciam a pesquisa. Dessa forma, a análise de uma produção escrita é subjetiva, o que é característico de uma pesquisa qualitativa, embora os métodos adotados auxiliem a diminuir enviesamentos (Bogdan & Biklen, 1994, p. 67-68).

Quanto aos procedimentos da análise de produção escrita, a escolha por uma participante graduada em um curso de licenciatura em Matemática se justifica pelas características dos referenciais teóricos adotados: para analisarmos o Conhecimento Matemático Avançado, é necessário que a participante da pesquisa tenha conhecimento matemático obtido em nível de graduação e pós-graduação (Zazkis & Leikin, 2010); a formação como professora de Matemática pode favorecer a articulação entre a Matemática avançada e escolar, de forma que as resoluções apresentadas nos permitam analisar a progressão do pensamento matemático, aspecto importante nas discussões quanto à Atividade Matemática Avançando (Rasmussen et al., 2005).

Assim, optamos por questões que possibilitam múltiplas soluções, para analisarmos a Criatividade Matemática (Nadjafikhah, Yaftian, & Bakhshalizadeh, 2012), e que possam ser resolvidas mobilizando-se tanto o conhecimento matemático escolar quanto o Conhecimento Matemático Avançado. Encontramos questões com essas características no banco de questões da OBMEP (2007), no qual selecionamos três e as modificamos de acordo com nossos objetivos.

As modificações foram realizadas após resoluções individuais e coletivas testadas por todos os autores e discutidas, em um processo repetido por algumas vezes visando criar condições favoráveis a múltiplas soluções, fomentar as análises à luz de cada um dos três referenciais teóricos, de acordo com as soluções previstas, e eliminar possibilidades de múltiplas interpretações do enunciado.

Além das resoluções, pedimos à participante que relatasse, por escrito, os procedimentos adotados na resolução das questões, desde as hipóteses até às conclusões, incluindo as eventuais soluções frustradas e consultas a materiais como livros, sites e vídeos. Para que o pensamento não fosse estorvado pela pressa, não impusemos limite de tempo para as resoluções, que foram entregues por iniciativa da participante após cerca de duas semanas da entrega das questões.

A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina por meio do parecer número 5.144.763.

Neste artigo, analisamos duas das três questões resolvidas pela participante. Considerando que nosso objetivo não foi examinar o desempenho da participante, mas sim discutir possíveis contribuições de três referenciais teóricos na análise de uma produção escrita, selecionamos as duas questões cujas resoluções possibilitam a discussão mais profícua no que diz respeito à Criatividade Matemática, Atividade Matemática Avançando e Conhecimento Matemático Avançado.

REFERENCIAIS TEÓRICOS

Conforme mencionamos na introdução, algumas pesquisas que utilizam o referencial teórico do PMA o articulam com outros estudos relacionados ao contexto de seus objetivos, por vezes criando uma interpretação própria desse quadro.

Por exemplo, Sousa e Almeida (2017) relacionam os processos cognitivos focados no desenvolvimento de atividades de modelagem com os processos de PMA. Essa relação justifica a coerência de utilizar o referencial do PMA para analisar o desenvolvimento dos processos de pensamento dos estudantes em atividades de modelagem.

Do mesmo modo, as justificativas de outros trabalhos para utilizar o PMA ligam-se com a interpretação que os autores fazem do referencial teórico e relações no contexto de sua pesquisa. Mateus-Nieves e Jimenez (2020) criaram um ‘esquema holístico’ para analisar habilidades de PMA integradas à Teoria dos Nós, visando fortalecer o processo de generalização. Essa articulação foi utilizada como justificativa:

> Articular alguns conceitos da Teoria dos Nós com o desenvolvimento de habilidades de Pensamento Matemático Avançado permite ampliar o processo de generalização matemática de forma a fortalecer a gama de estratégias didáticas que orientam o ensino e a aprendizagem da Matemática de uma maneira reflexiva e inovadora que possibilita a interação com vários cenários e níveis de formação. (Mateus-Nieves & Jimenes, 2020, p. 66, tradução nossa).

Analogamente, Bianchini e Machado (2015) justificaram a importância de professores de Matemática conhecerem os processos de PMA:

> Dessa forma, o conhecimento sobre os processos do PMA possibilita ao professor de matemática avaliar, tanto as dificuldades inerentes aos conceitos e ideias que deseja desenvolver com seus alunos, como também aquelas apresentadas pela falta de hábito dos alunos com a utilização dos processos do PMA requeridos na construção de tais conhecimentos. [...] o conhecimento explícito dos processos do PMA pode auxiliar o professor a elaborar atividades que visem à apropriação desses processos por seus alunos. (Bianchini & Machado, 2015, p. 29).

Vidotti e Kato (2018) justificaram a importância das análises de conceito imagem e conceito definição no diagnóstico de dificuldades:

> A necessidade de diagnosticar problemas no processo de ensino e aprendizagem, que vão além de variáveis como o professor, o currículo, o ambiente, hábitos de estudos, bem como problemas de ordem puramente matemática, levou pesquisadores a buscarem esclarecimentos sobre os processos cognitivos envolvidos no raciocínio matemático, cujas bases teóricas apoiam-se em estudos destinados a compreender como o cérebro humano funciona.

> Nesse sentido, Tall e Vinner (1981) desenvolveram as noções de conceito imagem e conceito definição [...]. (Vidotti & Kato, 2018, p. 931).

Esses são exemplos de pesquisas em que o PMA contribuiu adequadamente para a realização dos objetivos. E inspirados por esses referenciais, nesta seção, sintetizamos e relacionamos as pesquisas do corpus, vinculadas, respectivamente, à Criatividade Matemática, à Atividade Matemática Avançando e ao Conhecimento Matemático Avançado. Esses referenciais teóricos estão ligados ao PMA, conforme estabelecemos a seguir, bem como podem apoiar algumas pesquisas em que o PMA não se adeque como nas que citamos anteriormente. Nadjafikhah, Yaftian e Bakhshalizadeh (2012) realizaram um trabalho teórico que define a Criatividade Matemática a partir de diversos trabalhos que a abordaram. Rasmussen et al. (2005) elaboraram o quadro teórico da Atividade Matemática Avançando, visando oferecer uma caracterização alternativa do PMA. Zazkis e Leikin (2010) definiram o conceito de Conhecimento Matemático Avançado para investigar como professores utilizam seu conhecimento matemático no ensino.

Iniciamos nossa discussão pela Criatividade Matemática. A criatividade desempenha um papel fundamental no ciclo do PMA, pois contribui nos primeiros estágios de desenvolvimento de uma teoria, auxilia na formulação da Matemática como sistema de axiomas e provas e permite que novas ideias sejam reformuladas de modos até então desconhecidos (Ervynck, 2002).

Nadjafikhah, Yaftian e Bakhshalizadeh (2012) apresentam algumas das definições encontradas na literatura para a Criatividade Matemática. A capacidade de analisar um problema sob diferentes perspectivas, identificar padrões, similaridades e diferenças, além de produzir múltiplas ideias e escolher um método que seja adequado para lidar com uma situação matemática desconhecida é uma forma de descrever a Criatividade Matemática.

Nadjafikhah, Yaftian e Bakhshalizadeh (2012) sustentam, com base em outros estudos sobre o tema, a divisão da Criatividade Matemática em dois níveis: o profissional e o escolar. No nível profissional, a criatividade é caracterizada pela capacidade de produzir um trabalho original que amplie o corpo de conhecimento da Matemática e pelo potencial de propor novas questões para outros matemáticos. Já no nível escolar, a criatividade está associada à resolução de problemas e pode ser identificada no processo que resulta em soluções incomuns ou perspicazes para um problema e na formulação de questões ou possibilidades que permitam que um problema seja considerado por uma nova perspectiva.

Para Ervynck (2002), a resolução de problemas faz com que os estudantes lidem com as falhas e se habituem com a ideia de que não existe algoritmo capaz de fornecer todas as respostas. Em uma sociedade que muda constantemente, ser capaz de aplicar algoritmos não é suficiente. É preciso que o pensamento seja flexível e tarefas que demandam criatividade contribuem para o desenvolvimento dessa flexibilidade.

Entretanto, geralmente a Matemática é apresentada aos estudantes como um produto acabado ao invés de um processo, o que é alvo de críticas de Tall (2002) e Dreyfus (2002). Para os autores, apresentar a Matemática como uma sequência de definições, teoremas e provas mostra o encadeamento lógico da ciência, mas omite que o conhecimento resulta, muitas vezes, de sequências de tentativa e erro, formulações intuitivas e imprecisões.

Visando estimular a criatividade dos estudantes, Bezerra, Gontijo e Fonseca (2021) propõem a utilização de *feedbacks* criativos pelos professores:

> Os diferentes instrumentos utilizados para os estudantes expressarem o seu pensamento constituem um rico material de análise. É por meio deles que professores e estudantes podem estabelecer um processo comunicativo que favoreça o desenvolvimento da criatividade e das aprendizagens em matemática. Chamamos esse processo comunicativo, que faz parte da avaliação formativa, de *feedback*. (Bezerra, Gontijo, & Fonseca, 2021, p. 93).
>
> Definimos o *feedback* cuja intenção é o desenvolvimento do potencial criativo como *feedback* criativo. (Bezerra, Gontijo, & Fonseca, 2021, p. 94).

Ainda, Ervynck (2002) considera a importância da intuição para guiar a imaginação e a inspiração que formulam os resultados requeridos. O autor concorda com as considerações de Tall (2002), para o qual a intuição é produto do conceito imagem (Tall & Vinner, 1981) de um indivíduo, de forma que quanto mais educado no pensamento lógico, mais rigorosa torna-se a sua intuição.

A criatividade está no cerne do pensamento matemático, entendida como "uma atividade criativa que traz consigo a possibilidade de erro humano. Na verdade, a própria possibilidade de erro é o que torna os grandes avanços monumentos do sucesso humano." (Ervynck, 2002, p. 52, tradução nossa). Atividades que estimulam a criatividade têm, portanto, o poder de humanizar a Matemática à medida que expõem a sua falibilidade.

É imprescindível que os professores identifiquem, encorajem e aprimorem a habilidade criativa dos estudantes ao propor, por exemplo, tarefas de múltiplas soluções, que são tarefas que permitem diversas resoluções baseadas em diferentes representações de conceitos matemáticos. Outra forma de estimular a criatividade dos estudantes é propor experiências com problemas abertos, fornecendo a eles a oportunidade de revelar a compreensão de um conceito. Além disso, o exercício da criatividade requer um ambiente interativo, isto é, um ambiente em que os estudantes se sintam seguros para compartilhar suas percepções e ideias.

O segundo referencial teórico discutido nesta pesquisa é o desenvolvido por Rasmussen et al. (2005), que caracterizam o PMA como Atividade Matemática Avançando e não se limita a séries específicas ou níveis de conteúdo. Com essa denominação, os autores visam realçar o processo de atividade total dos estudantes, não focando no seu estágio final e sim na progressão no pensamento matemático considerando as diferentes atividades matemáticas derivadas de práticas sociais.

Essa progressão do pensamento dificilmente é analisada por professores, conforme observam Bianchini e Machado (2015, p. 29):

> [...] quando um professor de matemática é instado a analisar os conhecimentos mobilizados em sua resolução de uma situação-problema, ele enfoca e descreve principalmente os procedimentos matemáticos, muitas vezes já automatizados, e algumas vezes tacitamente aceitos. Tal fato dificulta sua percepção sobre os processos vivenciados, como a ocorrência de tentativa e erro, idas e vindas, visualizações, validações, generalizações etc., que fazem parte de seu saber sobre o fazer matemático [...].

Rasmussen et al. (2005) compreendem o fazer e pensar como sendo de natureza reflexiva, de modo que os estudantes se envolvam em atividades específicas, possam representar seu entendimento e ampliar seu pensamento e formas de raciocínio no processo. Para tanto, utilizam-se de construtos de matematização horizontal e vertical com exemplos de atividades de simbolização, algoritmização e definição para caracterizar a Atividade Matemática Avançando.

Os autores consideram que para que ocorra a aprendizagem matemática é preciso participar de diferentes tipos de práticas matemáticas. Dessa forma, as matematizações horizontal e vertical formam uma relação reflexiva na realização das atividades e estão intrinsecamente associadas, permitindo a elaboração de comparações a respeito da natureza da atividade dos estudantes e fornecendo uma linguagem para abordar o processo pelo qual eles desenvolvem novas visões e sensibilidades. Para esclarecer a Atividade Matemática Avançando, Rasmussen et al. (2005) apontam que a matematização horizontal é uma forma mais ampla para incluir campos de problemas ou situações que são, da perspectiva dos envolvidos, já matemáticos por natureza. Sendo assim, esses campos problemáticos ou situações problemáticas dependem dos antecedentes, experiências e objetivos daqueles envolvidos na atividade matemática.

Rasmussen et al. (2005) entendem a matematização horizontal como campo de problema relacionado à formulação de uma situação problema, de tal forma que seja amigável para análises matemáticas posteriores. Assim, a matematização horizontal pode incluir, mas não se limitar a, atividades como experimentar, explorar à procura de padrões, classificar, conjeturar e organizar. Enquanto a matematização vertical relaciona a atividade realizada pelos estudantes construída a partir das atividades horizontais envolvendo raciocínio de estruturas abstratas, generalização e formalização, com o propósito de criar novas atividades matemáticas para os estudantes, promovendo uma sequência de matematizações progressivas, com múltiplas camadas de tipos de atividades horizontais e verticais sendo inter-relacionadas.

As atividades de simbolização, algoritmização e definição possuem relações com alguns processos de PMA. A simbolização abrange processos de representação que, conforme Dreyfus (2002), incluem relações entre sinais e significados. A atividade de desenvolver um algoritmo envolve a generalização de um procedimento para solução de um problema. Na atividade de definição, os estudantes baseiam-se em seu conceito imagem (Tall & Vinner, 1981) para criar uma definição e verificam possíveis conflitos gerados para aprimorá-la.

Além disso, as atividades mais ligadas à matematização vertical são processos de PMA. De fato, o raciocínio de estruturas abstratas requer que o estudante realize processos de abstração que, em conjunto com a generalização, segundo Dreyfus (2002), são processos que permitem gerenciar a complexidade de uma situação. A formalização, conforme Tall (2002), é um fator distintivo do PMA em relação ao Pensamento Matemático Elementar.

Ressalvamos que as caracterizações de PMA propostas por Tall (2002) e Dreyfus (2002) valorizam o ciclo completo de pensamento matemático, e não só o produto do pensamento matemático como o termo PMA pode sugerir se comparado com o termo adotado por Rasmussen et al. (2005). Todavia, 'Atividade Matemática Avançando' é coerente com a proposta de Rasmussen et al. (2005) de oferecer uma caracterização alternativa do PMA que enfatize a progressão na atividade matemática dos estudantes, concentrando-se em práticas matemáticas e tipos qualitativamente diferentes de atividades dentro dessas práticas.

O terceiro referencial abordado nesta discussão é o elaborado por Zazkis e Leikin (2010), que adotaram o Conhecimento Matemático Avançado (CMA) como aporte teórico para investigar como professores utilizam seu conhecimento matemático no ensino. Os próprios autores definiram CMA como o conhecimento do assunto adquirido em cursos de graduação em Matemática, e fizeram uma associação com o PMA, que não possui uma definição precisa. Segundo os autores, a diferença de perspectivas com relação ao PMA mudou a descrição da área de pesquisa do PMA para 'matemática terciária', e a definição de CMA está de acordo com essa mudança.

Isso reflete uma noção de que o PMA pode referir-se ao que se ensina de Matemática Avançada, algo que identificamos principalmente em trabalhos e linhas de pesquisas precedentes que empregaram o termo 'Pensamento Matemático Avançado'. No entanto, entendemos o PMA como um pensamento que, conforme Dreyfus (2002), se dá por processos de pensamento complexos o suficiente para gerenciar a complexidade de uma situação matemática. Por outro lado, o CMA é um conhecimento de conteúdos. Como os processos de pensamento e conhecimento de conteúdos são objetos distintos, não há uma identidade entre PMA e CMA, embora percebamos uma colaboração entre eles, conforme discussão adiante.

Em seu trabalho, Zazkis e Leikin (2010) analisaram as percepções de professores do ensino secundário (correspondente aos Anos Finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio no Brasil) em relação ao uso do CMA em sua prática de ensino. Para isso, entrevistaram 52 professores que ensinam Matemática no ensino secundário, perguntando em que medida utilizam o CMA no ensino e solicitando exemplos de tópicos matemáticos, situações de ensino e problemas em que o CMA é essencial para os professores.

Como resultado, o estudo apontou uma variação no quanto os professores afirmaram utilizar o CMA em sua prática. Ainda, as afirmações de que o CMA é usado em todo momento não corresponderam, em geral, a exemplos específicos de tal uso. Alguns professores exemplificam a utilização do CMA com tópicos gerais, como cálculo e estatística, mas dificilmente conseguiram especificar situações ou problemas. Além disso, os autores destacaram exemplos não vinculados a conteúdos específicos nas respostas dos professores, como formas de pensar, 'boa percepção' para ensinar, fazer conexões entre os conteúdos dentro e além do currículo e responder às perguntas dos estudantes, ver uma 'imagem melhor' ou uma 'imagem completa' do assunto, sensação de terreno, confiança e 'temas transversais' ou 'questões metamatemáticas' como 'prova', 'linguagem' e 'precisão e estética', que podem aparecer em qualquer conteúdo matemático. Isso indica que muitos professores veem no CMA um benefício indireto à prática de ensino, e não necessariamente um benefício específico de cada assunto estudado na graduação. Zazkis e Leikin (2010) concluem que a dificuldade de muitos professores em articular exemplos específicos ao uso do CMA evidencia uma lacuna entre a matemática universitária e a matemática ensinada na escola secundária.

Percebemos uma relação entre alguns benefícios indiretos do CMA e os processos de PMA, especialmente quanto às questões que Zazkis e Leikin (2010) chamaram de 'metamatemáticas'. O processo de prova é visto por Tall (2002) como o estágio final do desenvolvimento do pensamento matemático, no qual as ideias ganham precisão. Nesse estágio, a linguagem necessita de precisão para que as ideias sejam organizadas em uma sequência lógica baseadas em definições, evitando inconsistências. A estética observada por Zazkis e Leikin (2010, p. 274) diz respeito a 'belas soluções', o que está relacionado à Criatividade Matemática, pois envolve a busca por soluções diferentes e valorização das mais criativas.

As conexões com contextos mais amplos estão relacionadas aos processos de generalização e síntese, que são característicos do PMA de acordo com Dreyfus (2002). De fato, a generalização envolve a expansão de um domínio de validade, enquanto que a síntese significa combinar partes de tal maneira que elas formam um todo. Quando o professor consegue ver o todo em uma única imagem, consegue criar conexões entre os elementos dentro e fora do currículo a que estão relacionados. Assim, o processo de síntese se relaciona à competência do professor para fazer conexões entre os conteúdos dentro e além do currículo, em ver uma 'imagem completa' do assunto e ter sensação de terreno, que são benefícios do CMA segundo os professores entrevistados por Zazkis e Leikin (2010).

Por esses e outros processos de pensamento desenvolvidos durante estudos de Matemática Avançada, podemos afirmar que o desenvolvimento do CMA implica num desenvolvimento do PMA. Por outro lado, Tall (2002) e Dreyfus (2002) argumentam que o estudo de processos avançados que ocorrem na mente dos matemáticos ao desenvolverem suas pesquisas é importante para compreendermos melhor os mesmos processos que ocorrem com os estudantes enquanto aprendem conceitos matemáticos avançados. Assim, o desenvolvimento do PMA também favorece a aprendizagem de Matemática no Ensino Superior, de forma que podemos afirmar que os desenvolvimentos do PMA e do CMA ocorrem simultaneamente, um contribuindo com o outro. Podemos complementar, com base em Rasmussen et al. (2005), que as experiências exercidas pela Atividade Matemática Avançando, tanto na matematização horizontal quanto na matematização vertical, fornecem formas de pensamentos que propiciam o PMA e o CMA.

A escolha do referencial teórico feita por Zazkis e Leikin (2010) foi coerente com sua intenção de investigar as percepções de professores quanto ao emprego de seus conhecimentos de Matemática Avançada. O CMA é o objeto cujas percepções de uso foram investigadas, enquanto que o PMA não possui uma relação tão direta com o objetivo da pesquisa. Ainda, como destacado pelos autores, o PMA possui diferentes concepções, algumas não relacionadas exclusivamente com a Matemática Avançada, mas também com a matemática escolar. Além disso, ressaltamos que a definição de CMA foi mostrada pelos pesquisadores aos professores entrevistados, servindo de base para a formulação de perguntas e respostas. Isso só foi possível por se ter uma definição precisa e simples o suficiente para ser entendida pelos professores após uma rápida leitura.

Há pontos de convergência entre os referenciais comentados. Por exemplo, a Matemática é vista como uma atividade humana na perspectiva do PMA, da Criatividade Matemática e da Atividade Matemática Avançando. Assim, esses referenciais consideram que a Matemática deve ser reconstruída em sala de aula, e não dada como algo pronto e acabado. Deste modo, esses referenciais teóricos convergem ao apoiarem a ideia de um ambiente favorável para a aprendizagem como um ambiente em que o estudante seja ativo no processo de construção do seu conhecimento e, para isso, são recomendadas questões abertas e com uma complexidade que ultrapassa a mera operacionalização dos conceitos.

A aplicação do conceito de Criatividade Matemática está, de certa forma, presente em todos esses referenciais. Rasmussen et al. (2005) relata uma ‘epifania’ descrita por um dos participantes de sua pesquisa ao ter uma ideia de um procedimento diferenciado para resolver uma questão:

> O uso da palavra epifania por Joaquin para descrever seu raciocínio indica que sua solução não foi resultado de um procedimento memorizado. Parece que Joaquin desenvolveu uma maneira altamente integrada e complexa de raciocinar sobre o espaço de funções de solução para equações diferenciais e desenvolveu simbolizações eficazes e dinâmicas para promover e aprofundar seu raciocínio. (Rasmussen et al., 2005, p. 62, tradução nossa).

Zazkis e Leikin (2010) descrevem a contribuição do CMA para a ‘estética’ matemática a partir da fala de uma professora participante, no sentido da apresentação de belas soluções: “Também estou ciente da estética que existe na matemática e tento trazer para minha sala de aula exemplos de belas soluções e incentivar os estudantes a encontrarem belas soluções. (Dina-2)” (Zazkis & Leikin, 2010, p. 274, tradução nossa).

Tanto o estudo dos processos de PMA quanto a Criatividade Matemática inspiram-se no pensamento de matemáticos ao desenvolverem suas pesquisas:

> O papel crítico desses matemáticos criativos, que foram capazes de criar novos *insights* e ideias matemáticas, é tão evidente que não há necessidade de ser enfatizado. No entanto, o estudo de processos de seu pensamento criativo é valioso. (Nadjafikhah, Yaftian, & Bakhshalizadeh, 2012, p. 285, tradução nossa).

Outro destaque dessa aproximação são os processos de PMA (Tall, 2002; Dreyfus, 2002), conforme comentamos a respeito dos processos de prova, representação, síntese e quanto à intuição e formalização.

Podemos, ainda, ressaltar divergências entre os referenciais teóricos analisados. A escolha dos termos designa algo a se enfatizar. Enquanto a Atividade Matemática Avançando evidencia a progressão do pensamento matemático, a Criatividade Matemática enfatiza o pensamento diferenciado e o CMA destaca os conteúdos de Matemática Avançada ao invés do pensamento avançado.

A seguir, discutimos uma produção escrita com base nos referenciais teóricos que apresentamos.

ANALISANDO UMA PRODUÇÃO ESCRITA

Analisamos questões solucionadas por uma participante licenciada em Matemática com base nos referenciais teóricos adotados, as quais permitem múltiplas soluções e podem ser resolvidas mobilizando tanto o conhecimento matemático escolar quanto o Conhecimento Matemático Avançado. As duas questões selecionadas para análise foram resolvidas sem consultas a quaisquer materiais, conforme relatado pela participante.

A primeira questão selecionada para análise possui enunciado conforme a Figura 1.

Figura 1

Primeira questão. Elaborada com base no banco de questões da OBMEP (2007)

1) Considere uma área limitada por um triângulo equilátero. a) Apresente desenhos indicando algumas formas de dividir essa área em cinco partes de mesma área. b) Que conhecimentos ou habilidades você mobilizou na resolução dessa questão? Esses tópicos foram aprendidos em que nível da sua escolarização? Ou foram aprendidos ao longo da sua atuação profissional?

Primeiramente, a participante buscou imaginar possíveis soluções, e assim organizou quatro possibilidades, que chamou de configurações e as desenhou sem proporções rigorosas, conforme a Figura 2.

Considerando que o triângulo original tem uma altura h e uma base b, a participante buscou construir rigorosamente cada configuração de forma geométrica e provando que a área de cada região é $b \cdot h/10$. A começar pela configuração 2, ela percebeu que a altura dos três triângulos de baixo é a mesma, e por isso a base do triângulo central precisaria ser $b/2$, o que levaria a uma divisão do triângulo original em quatro partes iguais, e não cinco conforme solicita o enunciado.

A configuração 1 foi construída com régua e compasso, de baixo para cima, procurando em cada região triangular a altura que dividisse a região restante na quantidade necessária de partes iguais.

Figura 2

Configurações Elaboradas pela Participante

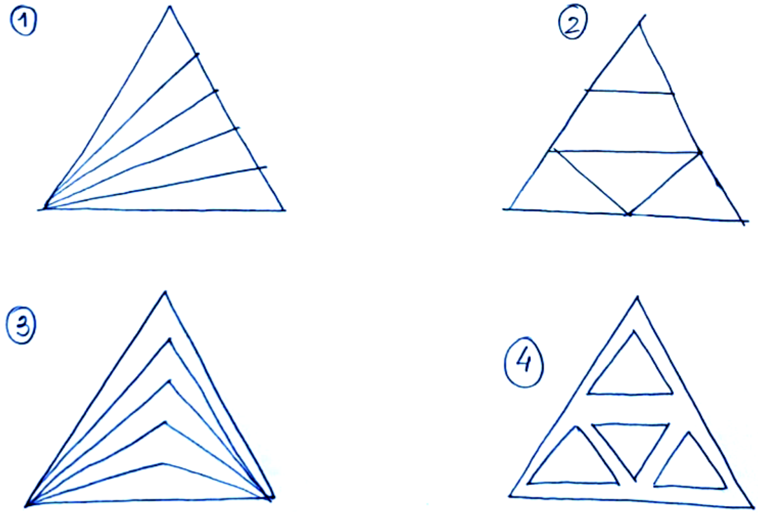


Figura 3

Argumentação da Participante na Configuração 3

Dessa forma, a região 1 tem área igual a

$$\frac{b.h}{2.5}.$$

A região 2 tem área igual a

$$\frac{b.2h/5}{2} - \frac{b.h/5}{2} = \frac{bh/5}{2} = \frac{bh}{2.5}$$

e assim por diante.

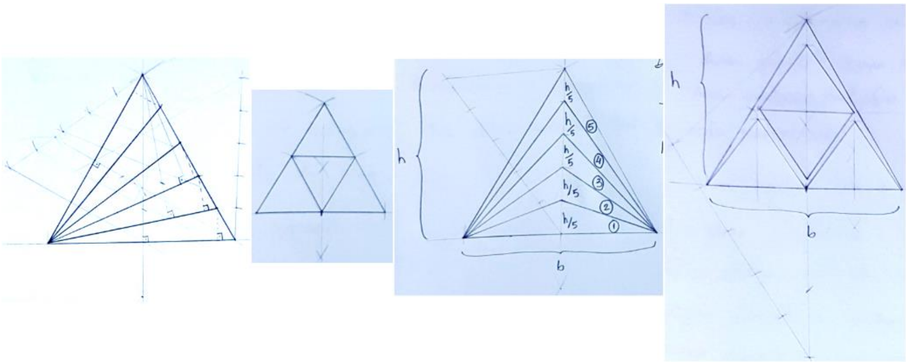
A configuração 4 foi desenhada com quatro triângulos de base $b/2$ e altura $h/2{,}5$. Assim, a participante aproveitou a base do triângulo original para dividi-la em duas bases para duas das regiões triangulares.

Por fim, a configuração 3 foi classificada pela participante como “mais simples de executar”, pois bastava dividir a altura do triângulo original em cinco partes iguais. A justificativa poderia levar em consideração a área de cada par de triângulos que formam as regiões, reduzindo-se a mostrar que esses triângulos possuem a mesma área. No entanto, a participante calculou a área das regiões, de baixo para cima, subtraindo a área de dois triângulos, conforme a Figura 3.

Reunimos, na Figura 4, as configurações da participante após esse tratamento rigoroso:

Figura 4

Configurações Desenhadas pela Participante com Régua e Compasso



Na perspectiva do PMA, podemos identificar processos de representação e generalização mobilizados pela participante. A representação geométrica foi utilizada ao longo das resoluções, enquanto a generalização de um padrão algébrico foi percebida pela participante ao expressar “e assim por diante” nos cálculos referentes à configuração 3, indicando que ela percebeu que a subtração das áreas de dois triângulos teria a forma $\frac{b\cdot(n+1)\cdot h/5}{2} - \frac{b\cdot n\cdot h/5}{2} = \frac{b\cdot h}{2\cdot 5}$, para $n = 1{,}2{,}3{,}4$.

Além disso, a participante mobilizou sua intuição na formulação das quatro configurações e utilizou de rigor ao desenvolver ou refutar cada possibilidade. Conforme Tall (2002), a intuição e o rigor não são necessariamente dicotômicos. Na verdade, podemos observar que a razoabilidade lógica do resultado da intuição da participante mostra o quanto sua intuição é refinada quanto à lógica, o que significa, de acordo com esse referencial teórico, que a participante possui imagens coerentes dos conceitos envolvidos.

Ainda, a participante colocou os argumentos em uma sequência lógica para provar que a configuração 2 não resolveria o problema, o que evidencia uma transição para o PMA, conforme Tall (2002).

Considerando o referencial teórico da Criatividade Matemática, podemos afirmar que a participante foi criativa em suas resoluções, pois ela testou várias configurações e concluiu que uma era mais simples de executar do que as outras. Trata-se da configuração 3, que é diferente de todas que havíamos imaginado e cujas divisões, embora possam ser obtidas por segmentos de reta, resultam em polígonos não necessariamente convexos.

Destaque ainda para a configuração 4, que fornece uma infinidade de soluções à medida que os triângulos menores se movimentam dentro do triângulo maior.

A configuração 1, apresentada pela participante, seria simples de executar se ela tivesse considerado como bases dos triângulos menores os segmentos obtidos no lado cortado em cinco ao invés de encontrar os triângulos pelas alturas relativas à base do triângulo original. É possível que a razão para a participante não ter olhado a configuração nessa outra perspectiva tenha sido o fato de ela ter conseguido provar a possibilidade da configuração em sua primeira tentativa.

Além disso, podemos perceber um pensamento predominantemente geométrico na forma como ela investigou a questão. Construiu todas as soluções geometricamente e, apenas para justificar a igualdade das áreas, utilizou que a área de cada região deveria ser de $b \cdot h/10$. Em determinada solução, a participante chegou a observar que "também poderia ter usado somente uma régua milimetrada", mas preferiu recorrer a construções com régua e compasso, mostrando sua habilidade para utilizar métodos distintos.

Com relação à Atividade Matemática Avançando, identificamos matematizações horizontais, especialmente na formulação das configurações, e matematizações verticais, principalmente na elaboração das justificativas.

Inicialmente, percebemos uma matematização horizontal na exploração geral do problema com formulação de conjecturas, representadas por quatro configurações. Em seguida, a participante focou em cada uma das configurações e buscou construir geometricamente a divisão em cinco partes iguais, num processo em que ela precisou pensar matematicamente as implicações geométricas e o cálculo de áreas para tentar construir as soluções, caracterizando uma matematização vertical. As construções possíveis foram realizadas com régua e compasso, mobilizando os conhecimentos em geometria euclidiana que a participante possui.

Embora a configuração 2 possa parecer uma tentativa falha de solução, ela gerou uma maneira de dividir a área em quatro partes iguais. Essa maneira não responde ao problema, mas é parte da mobilização do pensamento da participante enquanto investiga soluções para o problema.

Figura 5

Segunda Questão. Elaborada a partir do banco de questões da OBMEP (2007)

2) Uma fábrica produziu uma calculadora original que efetua duas operações:
- A adição usual $+$
- A operação $\circledast$

Sabemos que, para todo número natural a, tem-se:

i) $a \circledast a = a$

ii) $a \circledast 0 = 2a$

e, para quaisquer quatro naturais $a,\ b,\ c$ e d

iii) $(a \circledast b) + (c \circledast d) = (a + c) \circledast (b + d)$.

a) Quais são os resultados das operações $(2 + 3) \circledast (0 + 3)$ e $1024 \circledast 48$?

b) É possível determinar o resultado de $48 \circledast 1024$? Justifique.

c) Verifique para quais valores de $a,\ b$ e n as seguintes igualdades são satisfeitas:

iv) $b \circledast a = 2b - a$

v) $na \circledast a = (2n - 1)a$.

d) Que conhecimentos ou habilidades você mobilizou na resolução dessa questão? Esses tópicos foram aprendidos em que nível da sua escolarização? Ou foram aprendidos ao longo da sua atuação profissional?

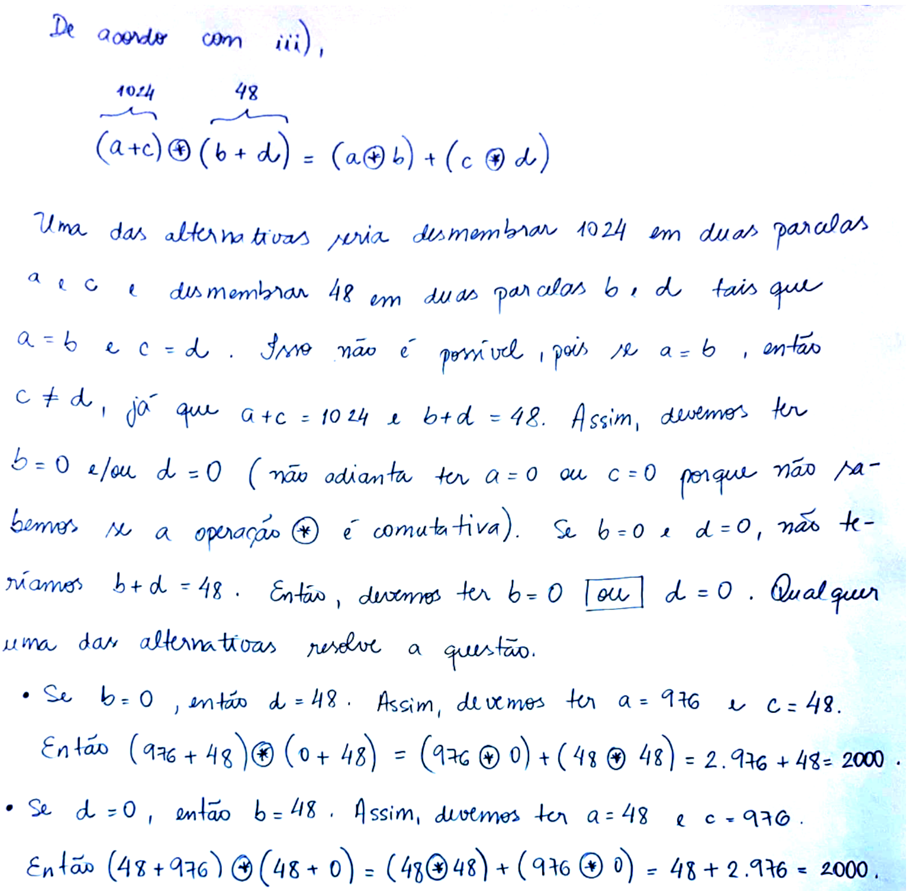
Quanto ao Conhecimento Matemático Avançado, a reflexão compartilhada pela participante na resposta à questão “b” confirma que ela mobilizou conhecimentos geométricos revistos na graduação e construções geométricas com régua e compasso, que foram utilizadas como principal estratégia de resolução e consistem em habilidades adquiridas no Ensino Superior.

A segunda questão selecionada para análise possui enunciado conforme a Figura 5.

Nesta questão, a participante da pesquisa detalhou passo a passo a resolução dos itens solicitados; destacaremos os trechos mais relevantes para as análises.

Figura 6

Resolução Parcial da Operação $\mathbf{1024} \circledast \mathbf{48}$



De acordo com iii),

$$\overbrace{(a+c)}^{1024} \circledast \overbrace{(b+d)}^{48} = (a \circledast b) + (c \circledast d)$$

Uma das alternativas seria desmembrar 1024 em duas parcelas a e c e desmembrar 48 em duas parcelas b e d tais que $a = b$ e $c = d$. Isso não é possível, pois se $a = b$, então $c \neq d$, já que $a + c = 1024$ e $b + d = 48$. Assim, devemos ter $b = 0$ e/ou $d = 0$ (não adianta ter $a = 0$ ou $c = 0$ porque não sabemos se a operação $\circledast$ é comutativa). Se $b = 0$ e $d = 0$, não teríamos $b + d = 48$. Então, devemos ter $b = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $d = 0$. Qualquer uma das alternativas resolve a questão.

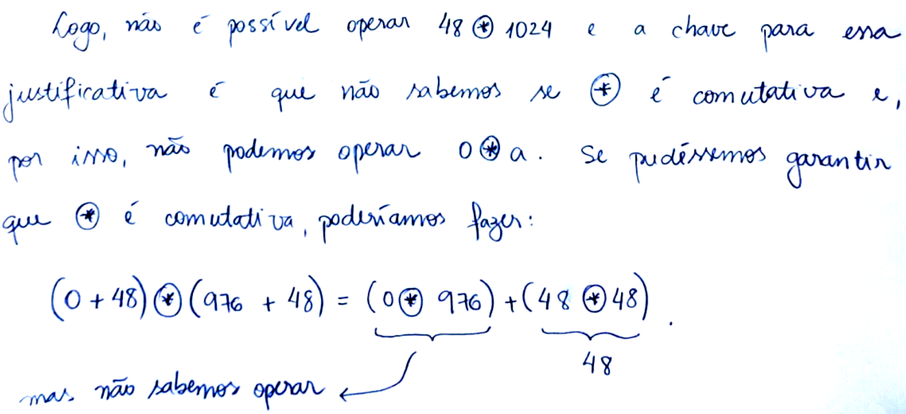
- Se $b = 0$, então $d = 48$. Assim, devemos ter $a = 976$ e $c = 48$.
  Então $(976 + 48) \circledast (0 + 48) = (976 \circledast 0) + (48 \circledast 48) = 2.976 + 48 = 2000$.
- Se $d = 0$, então $b = 48$. Assim, devemos ter $a = 48$ e $c = 976$.
  Então $(48 + 976) \circledast (48 + 0) = (48 \circledast 48) + (976 \circledast 0) = 48 + 2.976 = 2000$.

Na resolução do primeiro item, foi utilizada a propriedade iii) combinada com i) e ii). A primeira operação foi verificada com facilidade, apenas aplicando as propriedades; já a segunda operação, dada por $1024 \circledast 48$, demandou um processo de Criatividade Matemática e Atividade Matemática Avançando para a resolução apresentada, conforme ilustrado na Figura 6.

Nesta parte da resolução, verificamos que há um processo de Criatividade Matemática com base em Nadjafikhah, Yaftian e Bakhshalizadeh (2012), pois a participante busca por possibilidades que possam validar a propriedade dada, de modo que não é evidente a resposta a ser obtida. São necessários processos mentais interagindo de modo que seja de forma flexível e criativa por meio de formulação de conjecturas e testes de hipóteses. As capacidades de analisar um problema sob diferentes perspectivas, identificar padrões, produzir múltiplas ideias e escolher um método que seja adequado para lidar com uma situação matemática desconhecida são indícios de Criatividade Matemática.

Figura 7

Justificativa da Operação $\mathbf{48 \circledast 1024}$



Logo, não é possível operar $48 \circledast 1024$ e a chave para essa justificativa é que não sabemos se $\circledast$ é comutativa e, por isso, não podemos operar $0 \circledast a$. Se pudéssemos garantir que $\circledast$ é comutativa, poderíamos fazer:

$$(0+48)\circledast(976+48) = \underbrace{(0 \circledast 976)} + \underbrace{(48 \circledast 48)}_{48}.$$

mas não sabemos operar

Além disso, há um processo de formalização na resolução apresentada. Houve, em um primeiro momento, uma matematização horizontal e, a partir de processos mentais interagindo, ocorreu a matematização vertical e a exposição da resolução da questão, que representam seu entendimento da solução apresentada por meio de uma relação reflexiva, na qual verificamos relações abstratas e formalização do pensamento de acordo com a Atividade Matemática Avançando, conforme Rasmussen et al. (2005). Na sequência, a Figura 7 mostra a continuação da resolução do item b.

Deste modo, verificamos que a participante expôs suas ideias em uma sequência lógica para provar as argumentações e apresentar as soluções e generalizou algebricamente os valores para investigar as possibilidades. Mostrou conhecimento matemático de estruturas algébricas ao inferir que a operação $0 \circledast a$ não é definida e, logo, não seria possível operar $48 \circledast 1024$. Por meio disso, entendemos que foi empregado o processo mental de síntese para ordenar as conjecturas formuladas no processo de resolução.

Ao apresentar essa justificativa, a participante evidencia conhecimentos a respeito da validade das propriedades relacionadas com as Estruturas Algébricas, que compete ao CMA de acordo com Zazkis e Leikin (2010). Esse fato é reforçado nas justificativas dadas no item d), no qual a participante destaca que recorreu a "noções de operações e suas propriedades", ressaltando que talvez não seria possível resolvê-las sem esse conhecimento, especialmente quanto à comutatividade. No item c), a participante apresenta uma prova formal para as propriedades iv) e v), de modo que reforça a utilização da Criatividade Matemática, Atividade Matemática Avançando e Conhecimento Matemático Avançado.

Podemos perceber que os indícios de pensamento matemático da estudante, analisados com cada referencial teórico, são diferentes em cada questão ou estratégia de resolução por ela adotada. Esse resultado vai ao encontro da observação feita por Sousa e Almeida (2017) ao analisar uma atividade de modelagem matemática, de que os tipos de pensamento aparecem quando requisitados:

> [...] há interações entre os processos cognitivos que parecem revelar nuances do pensamento matemático elementar, por um lado, e por outro, nuances de pensamento matemático avançado. Nem um nem outro prevalece, uma vez que esses tipos de pensamentos ocorrem quando requisitados, seja pela estrutura cognitiva do estudante, seja pela atividade desenvolvida. (Sousa & Almeida, 2017, p. 721, tradução nossa).

Na sequência, tecemos considerações a respeito da produção escrita analisada e dos referenciais teóricos discutidos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio desta pesquisa, buscamos apresentar contribuições para pesquisadores da área, tanto na forma de divulgação dos referenciais teóricos relacionados ao PMA e mais recentes quanto nas decisões relativas à fundamentação de uma pesquisa. Nosso objetivo foi de sintetizar três pesquisas envolvendo, respectivamente, a Criatividade Matemática, a Atividade Matemática Avançando e o Conhecimento Matemático Avançado e ilustrar possíveis contribuições desses referenciais teóricos na análise de uma produção escrita.

Apesar dos muitos testes e resoluções compartilhadas entre os autores deste artigo, nos surpreendemos com as resoluções apresentadas pela participante, que continham estratégias diferentes das previstas por nós. Isso confirma que fizemos uma escolha adequada das questões, que permitiram múltiplas soluções e favoreceram indícios de pensamento próprios da participante.

Após realizarmos a análise das resoluções das questões a partir das diferentes perspectivas teóricas e das relações estabelecidas entre elas, percebemos que esses referenciais nos ajudam a enxergar alguns dos aspectos nas resoluções apresentadas pela participante. Nenhum deles ilumina todo o pensamento mobilizado na atividade, mas cada um foca em determinados aspectos. O PMA destaca processos de pensamento desenvolvidos pela estudante, mas não evidencia as tentativas “falhas”, a diversidade de resoluções exploradas, a evolução do pensamento durante a realização da atividade ou os conhecimentos avançados mobilizados.

A Criatividade Matemática, por sua vez, salienta as várias tentativas de solução e o pensamento matemático envolvido na comparação entre elas e procura por uma mais simples, além do pensamento envolvido em soluções que se destacam por serem mais diferentes do usual. A Atividade Matemática Avançando ressalta as etapas percorridas e a forma como a resolução foi organizada e pensada, além da evolução do pensamento durante a resolução, incluindo a formulação e investigação de conjecturas. O Conhecimento Matemático Avançado é interessante para se discutir elementos do currículo da graduação que foram mobilizados.

Com as sínteses das pesquisas e relações estabelecidas, pudemos verificar os motivos que levaram os pesquisadores a adotar determinado referencial teórico. As análises de uma produção escrita permitiram que confirmássemos as diferenças na perspectiva destacada em cada referencial, nos levando a situações em que cada referencial pode ser mais adequado.

Essas conclusões nos incentivam a sermos mais cuidadosos ao nos depararmos com referenciais teóricos similares. Antes de inferir que um autor está dizendo o mesmo que outro com palavras diferentes, precisamos analisar as consequências em se adotar um ou outro referencial teórico em uma pesquisa, desde as raízes epistemológicas até uma ênfase ou mudança de perspectiva causada pela escolha cuidadosa dos termos e definições.

Para além da fundamentação de pesquisas em Educação Matemática, podemos destacar as implicações da utilização de quadros teóricos para a análise da produção dos estudantes na prática dos professores. Conforme ilustrado na análise apresentada, o domínio de quadros teóricos referentes à aprendizagem pode contribuir para o professor avaliar seus estudantes, uma vez que permite observar diferentes processos de pensamento e saberes movimentados pelos estudantes. Além da avaliação, Bianchini e Machado (2015) nos lembram que o conhecimento explícito de processos de PMA, ao embasar a reflexão sobre o próprio saber, colabora com o planejamento do ensino.

Além disso, na prática docente, os professores não costumam adotar um único referencial teórico para analisar as produções dos estudantes, como fazemos nas pesquisas. Ao invés disso, os conhecimentos e saberes docentes interagem para fundamentar a perspectiva de análise do professor, de forma que diferentes bases teóricas estudadas em sua formação podem lhe apoiar. Sendo assim, consideramos que estabelecer relações entre referenciais teóricos é importante para dar subsídios ao emprego desses referenciais na formação de professores.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com contribuições do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMat) da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e à Fundação Araucária pelo apoio.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

OI, DCBK e ACCC organizaram e analisaram os dados. AMPDS supervisionou e liderou o planejamento e execução da pesquisa. Todos os autores participaram ativamente da conceitualização da pesquisa, do financiamento, da investigação, da provisão dos recursos, do desenvolvimento dos procedimentos metodológicos, da administração do projeto, da apresentação, da escrita e da revisão do trabalho.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pela autora correspondente, ACCC, mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Bezerra, W. W. V., Gontijo, C. H., & Fonseca, M. G. (2021). Promovendo a Criatividade em Matemática em Sala de Aula por Meio de *Feedbacks*. *Acta Scientiae*, *23*(1), 1-17.

Bianchini, B. L., & Machado, S. D. A. (2015). Em busca de elementos que propiciem ao professor de Matemática a reflexão sobre seu saber. *Acta Scientiae*, *17*(1), 28-39.

Bogdan, R. C., Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto

Dreyfus, D. (2002). Advanced Mathematical Thinking Process. In D. Tall. *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Kluwer.

Ervynck G. (2002) Mathematical Creativity. In D. Tall. *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 42-53). Kluwer.

Mateus-Nieves, E., & Jimenez, C. A. R. (2020). Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Scientiae*, *22*(3), 65-82.

Nadjafikhah, M., Yaftian, N., & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *31*, 285-291.

Martineau, S., Simard, D., & Gauthier, C. (2001) Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. *Recherches qualitatives*, *22*(3), 3-32.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. (2007). *Banco de Questões*. http://www.obmep.org.br/banco.htm

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. & Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 51-73.

Sousa, B. N. P. A., & Almeida, L. M. W. (2017). Mathematical thinking in mathematical modelling activities. *Acta Scientiae*, *19*(5), 709-724.

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 3-21). Kluwer Ac.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Vidotti, D. B., & Kato, L. A. (2018). Um Estudo sobre Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis. *Acta Scientiae*, *20*(5), 930-949.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical thinking and learning*, *12*(4), 263-281.