

# Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele

Anna Flávia Magnoni Vieira <sup>a</sup>  
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina/PR, Brasil.

*Recebido para publicação 30 abr. 2022. Aceito após revisão 13 dez. 2022  
Editora designada: Maria Célia Leme da Silva*

## RESUMO

**Contexto:** O estudo do pensamento geométrico na formação inicial de professores de Matemática é um tema emergente que pode reverberar no ensino de geometria na Educação Básica. **Objetivos:** Analisar reflexões manifestadas por futuros professores de Matemática (FPM), no trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele para desenvolver o pensamento geométrico. **Design:** A natureza do presente estudo é qualitativa, de cunho interpretativo. **Ambiente e participantes:** Foram investigados 24 FPM integrantes de uma disciplina de ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná - Brasil. **Coleta e análise de dados:** Os dados dessa investigação referem-se às sessões de formação registradas em vídeo, à produção escrita dos FPM promovidas pelas tarefas e aos registros em diário de campo. A análise incidiu sobre as reflexões manifestadas pelos FPM a respeito do trabalho com tarefas envolvendo pensamento geométrico, considerando os níveis de reflexão propostos por Muir e Beswick (2007). **Resultados:** Os resultados evidenciam reflexões descritivas, deliberadas e críticas, com diferentes níveis de incidência, associadas: (I) aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele; (II) ao papel do professor na prática em sala de aula; e (III) a conceitos geométricos e a propriedades de figuras planas. **Conclusões:** A promoção de ações formativas que privilegiam discussões e reflexões a respeito do pensamento geométrico pode oportunizar aos FPM a busca de conexões entre conhecimentos de geometria, de pensamento geométrico e de sua futura prática docente.

**Palavras-chave:** Formação inicial de professores de matemática; Geometria; Pensamento geométrico; van Hiele.

---

Autora correspondente: Anna Flávia Magnoni Vieira. Email:  
[anna\\_flavia\\_magnoni@hotmail.com](mailto:anna_flavia_magnoni@hotmail.com)

## Geometric Thinking: Reflections Manifested by Prospective Mathematics Teachers in van Hiele Model Studies

### ABSTRACT

**Background:** The study of geometric thinking in the initial education of mathematics teachers is an emerging theme that can reverberate in the teaching of geometry in basic education. **Objectives:** To analyse reflections manifested by prospective mathematics teachers (PMTs), working with tasks supported by van Hiele theoretical model to develop geometric thinking. **Design:** The nature of this study is qualitative and interpretative. **Setting and participants:** Twenty-four PMTs members of a geometry teaching subject were investigated in a mathematics degree course at a public university in Paraná - Brazil. **Data collection and analysis:** The data was collected from the video-recorded training sessions, the written production of the PMTs promoted by the tasks and the registers kept on the field diary. The analysis focused on the reflections expressed by PMTs regarding the work with tasks involving geometric thinking, considering the levels of reflection proposed by Muir and Beswick (2007). **Results:** The results show descriptive, deliberate, and critical reflections, with different levels of incidence, associated with (I) the levels of thought proposed in the van Hiele model; (II) the teacher's role in classroom practice; and (III) the geometric concepts and properties of flat figures. **Conclusions:** The promotion of formative actions that privilege discussions and reflections on geometric thinking can allow PMTs to seek connections between knowledge of geometry, geometric thinking, and their future teaching practice.

**Keywords:** Preservice mathematics teachers' education; Geometry; Geometric thinking; van Hiele.

### INTRODUÇÃO

Vários estudos sugerem que, na formação inicial de professores que ensinam Matemática, sejam desenvolvidas tarefas que envolvam o pensamento geométrico, de modo que os futuros professores possam refletir e projetar o trabalho com essa temática em sua futura prática profissional (Brunheira & Ponte, 2019; Erdogan, 2020; Livy & Downton, 2018).

A geometria é um sistema de representação usado para visualizar conceitos, formas de raciocínio e ambientes espaciais (Battista, 2007). Espera-se que o seu ensino contribua para desenvolver habilidades de visualização; de pensamento crítico; de capacidades de raciocinar, argumentar, demonstrar, fazer suposições e inferências lógicas, reduzir objetos tridimensionais a duas dimensões, de perceber que as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas (Battista, 2007; NCTM, 2000).

Apesar da sua relevância, no Brasil a Geometria é, por vezes, pouco trabalhada ou abordada sem significados com estudantes da Educação Básica. Muitos professores que atuam nesse nível de ensino não se sentem preparados para ensinar a Geometria devido à precariedade de sua formação em relação a esse conteúdo (Lorenzato, 1995; Nunes & Onuchic, 2019). De acordo com Almouloud et al. (2004), em alguns casos, a formação inicial pouco contribui para que os futuros professores reflitam a respeito de questões específicas do ensino e da aprendizagem de Geometria, e sinalizam para a necessidade de que esse espaço de formação possa promover a compreensão do quê, como, porquê e quando lecioná-la.

Professores relatam que, durante sua formação, o trabalho com a Geometria foi reduzido ao reconhecimento de figuras geométricas, ao uso de fórmulas e procedimentos sem significados, à Geometria Métrica, sem, por exemplo, distinguir aspectos figurais de conceitos geométricos; enfim sem terem vivenciado um ensino de Geometria que permitisse pensar geometricamente (Nacarato & Passos, 2003).

Livy e Downton (2018) defendem que, na formação inicial de professores de Matemática, sejam vivenciadas situações nas quais o futuro professor, além de desenvolver o seu pensamento geométrico, possa discutir abordagens pedagógicas que apoiem o desenvolvimento do pensamento geométrico de seus alunos. Nesse sentido, alguns pesquisadores (Brunheira & Ponte, 2019; Ferreira & Barbosa, 2013) destacam a importância de criar espaços formativos capazes de promover interações entre formador e futuros professores de Matemática (FPM), de modo que estes possam verbalizar seu raciocínio, debater ideias divergentes, construir argumentos, se engajar ativamente na construção de conhecimentos geométricos.

Um dos modelos teóricos mais utilizados nas pesquisas acerca do pensamento geométrico, em contextos de formação inicial de professores que ensinam Matemática, é o de van Hiele (Cybulski, 2022). Nesse modelo, considera-se que a aprendizagem de Geometria ocorre por meio da evolução do conhecimento do estudante, perpassando por cinco níveis hierárquicos de pensamento, sendo que cada deles descreve os processos de pensamento utilizados em contextos geométricos (van de Walle, 2009).

Assim, ressaltamos a necessidade de analisar reflexões manifestadas por FPM no trabalho com tarefas envolvendo pensamento geométrico, apoiadas no modelo teórico de van Hiele, em uma disciplina de ensino de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática. É de especial relevância que a formação inicial de professores dê atenção à promoção do pensamento geométrico dos FPM, no caso do modelo teórico de van Hiele, na determinação de habilidade de

pensamento. Sustentam esse modelo teórico três aspectos principais: há níveis de compreensão, cada nível tem suas próprias características, e os níveis anteriores devem ser totalmente compreendidos para atingir um próximo (Knight, 2006). O estudo desse modelo orientou parte do trabalho de uma disciplina de Geometria na formação de FPM, a partir do qual se concretiza a presente investigação.

## O MODELO DE VAN HIELE

O modelo teórico proposto pelo casal de educadores matemáticos holandeses van Hiele<sup>1</sup> tem fornecido *insights* quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas (van de Walle, 2009). A ontogênese do pensamento geométrico dos indivíduos consiste em cinco níveis hierárquicos e consecutivos, nomeadamente: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor (Alex & Mammen, 2018). Esses cinco níveis de pensamento se caracterizam pela hierarquia estabelecida entre eles e descrevem:

*como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são os objetos de pensamento – sobre os quais somos capazes de pensar [operar] geometricamente [ênfases no original].* (van de Walle, 2009, p. 439)

No primeiro nível, o da visualização, os objetos de pensamento são as formas e “o que elas parecem” (van de Walle, 2009). Nele, as figuras são julgadas por sua aparência, e o seu reconhecimento passa a ser feito pela distinção das formas e não por suas propriedades. Por exemplo, uma criança é capaz de reproduzir diferentes formas, caso alguém já tenha lhe mostrado tais figuras, no entanto, não consegue estabelecer relações referentes às propriedades dessas formas (van Hiele, 1984). Assim o professor poderá explorar as semelhanças e as diferenças entre elas, com o objetivo de usar essas ideias para criar classes de formas (Van de Walle, 2009). Propriedades presentes nessas classes, como lados paralelos, ângulos retos e simetrias, podem ser incluídas neste nível, porém, de forma informal e observacional. Então, o produto de pensamento, isto é, as ideias criadas em um nível se tornam

---

<sup>1</sup>Pierre van Hiele foi um renomado pesquisador do ensino de geometria que, juntamente com sua esposa, Dina van Hiele-Geldof, investigaram o desenvolvimento do pensamento geométrico, cujos primeiros resultados começaram a ser publicados em 1959.

o foco ou o objeto de pensamento do nível seguinte, sendo nesse nível as classes ou o agrupamento de formas parecidas (van de Walle, 2009).

No segundo nível, o da análise, os objetos de pensamento são as classes de formas, mais do que as formas individuais (van de Walle, 2009). As figuras são reconhecidas por suas propriedades, contudo, tais propriedades ainda não estão ordenadas, de modo que, por exemplo, “um quadrado não é necessariamente identificado como sendo um retângulo” (van Hiele, 1984, p. 245). Assim, o professor poderá propor tarefas nas quais o estudante é convidado a pensar sobre, por exemplo, o que leva um objeto geométrico a ser classificado como um retângulo e que outras formas podem ser agrupadas com esse objeto, a fim de que tenham as mesmas propriedades dentro de determinada classe. Desta maneira, as ideias a respeito de uma forma individual podem ser generalizadas para todas as formas que se alinhem em uma mesma classe. Os produtos de pensamento, nesse nível, são as propriedades das formas (van de Walle, 2009).

No terceiro nível, o da dedução formal, os objetos de pensamento são as propriedades das formas (van de Walle, 2009), que podem ser ordenadas e deduzidas umas das outras. Apesar de o significado intrínseco da dedução ainda não ser compreendido pelos estudantes (van Hiele, 1984), eles já são capazes de acompanhar e apreciar um argumento lógico sob um caráter intuitivo. No entanto, não compreendem uma apreciação da estrutura axiomática num sistema dedutivo formal (van de Walle, 2009). Os produtos de pensamento nesse nível são relações entre as propriedades de objetos geométricos (van de Walle, 2009).

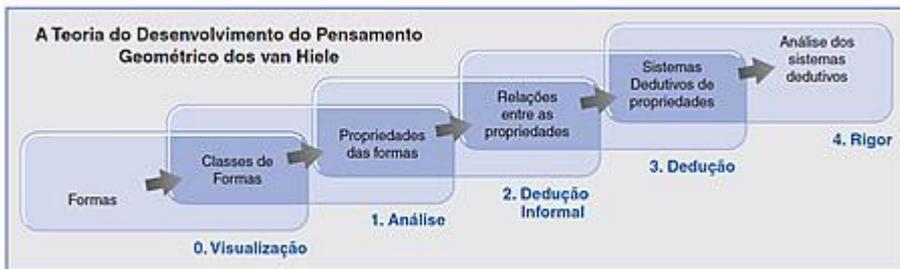
No quarto nível, o da dedução, os objetos de pensamento são relações entre as propriedades dos objetos geométricos (van de Walle, 2009). O pensamento está centrado no significado da dedução (van Hiele, 1984). Nesse nível, os estudantes “são capazes de trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas e estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição” (p. 443). Os produtos de pensamento desse nível são sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria (van de Walle, 2009).

Por fim, no último nível, o do rigor, os objetos de pensamento são os sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria (van de Walle, 2009). Neste nível, “as figuras são definidas apenas por símbolos ligados por relações” (pp. 248-249), e o estudante – geralmente um especialista em Matemática no Ensino Superior – faz uma apreciação das distinções e das relações entre diferentes sistemas axiomáticos (van de Walle, 2009). Assim, os produtos de pensamento nesse nível são comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da geometria.

Os produtos de pensamento em cada nível se tornam os objetos de pensamento do nível seguinte, ou seja, as ideias criadas em um nível se tornam o foco ou objeto de pensamento do subsequente (van de Walle, 2009). Essa relação objeto-produto entre os níveis é ilustrada na Figura 1.

**Figura 1**

*Níveis de pensamento - Relação objeto-produto (van de Walle, 2009)*



Para van Hiele (1999), o desenvolvimento do pensamento do estudante depende mais dos tipos de experiências que lhe são oferecidas do que da idade ou do amadurecimento biológico. O autor afirma que a instrução para promover a transição de um nível a outro perpassa cinco fases<sup>2</sup>, incluindo sequências de tarefas, que começam pela fase exploratória e permitem a construção gradual de conceitos. Também expõe que o professor deve estar consciente dessa transição, a qual ocorre de forma contínua, pois suas instruções são decisivas para que o estudante obtenha sucesso nesse processo (van Hiele, 1984).

O modelo proposto por van Hiele identifica uma aprendizagem progressiva, isso porque a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica avançam de forma gradativa e global. Também entende que o conhecimento geométrico implica em experiências anteriores, uma vez que propicia ao estudante, à medida que vivencia experiências diferentes, construir ideias matemáticas de aprendizagem (Mattos & Serrazina, 1996).

Desse modo, é relevante criar espaços formativos nos quais FPM possam refletir a respeito do trabalho com tarefas apoiadas no modelo teórico de van Hiele.

<sup>2</sup> As fases descritas por van Hiele (1984, 1999) são: investigação, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração.

## CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação<sup>3</sup>, de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), tem como contexto uma disciplina de ensino de Geometria<sup>4</sup>, ofertada para o segundo ano de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná, Brasil. Participaram dessa disciplina 24 FPM, a professora formadora (PF) da disciplina e a primeira autora deste artigo. A disciplina foi organizada em um ambiente virtual de aprendizagem, o *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment* (MOODLE), e as aulas ocorreram semanalmente, de forma síncrona, via *Google Meet*, em horário regular no período noturno e com duração média de 90 minutos<sup>5</sup> ao longo de 2021.

A primeira autora deste artigo, além de observar e analisar as ações desenvolvidas na disciplina, assumiu um papel ativo nas discussões junto com os participantes da pesquisa. Tais fatores caracterizam esta investigação como uma pesquisa-ação. Nesse tipo de investigação, o pesquisador, inserido no ambiente de pesquisa, pode “observá-lo, compreendê-lo, mas, sobretudo mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ações e de aprendizagem dos participantes” (Fiorentini & Lorenzato, 2012, p. 112).

### Tabela 1

*Descrição das tarefas propostas pela PF*

| Tarefas                                                       | Descrição                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tarefa 1:<br/>Proposição do<br/>teste de van<br/>Hiele</b> | A PF propôs aos FPM a realização de um teste de van Hiele <sup>6</sup> , constituído por 15 questões de geometria plana, antes de qualquer estudo dessa Teoria. Com o objetivo de verificar os conhecimentos geométricos dos FPM, ela solicitou que eles apresentassem justificativas para suas respostas. |
| <b>Tarefa 2:<br/>Estudo teórico</b>                           | O texto “O Pensamento e os Conceitos Geométricos” (Van de Walle, 2009) foi estudado antecipadamente pelos                                                                                                                                                                                                  |

<sup>3</sup> Aprovada pelo Comitê de Ética (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

<sup>4</sup> A carga horária total prevista para a disciplina era de 120 horas.

<sup>5</sup> Foi estabelecida uma carga horária menor no ano letivo de 2021, que permaneceu na modalidade de Ensino Remoto Emergencial, em razão da pandemia da COVID-19.

<sup>6</sup> Nasser & Santanna (1997, p. 85-87).

FPM, discutido durante a aula em pequenos grupos (quatro grupos com cinco FPM cada e um grupo com quatro, aqui representados por G1, G2, G3, G4 e G5) e, na sequência, com todos os participantes da disciplina.

**Tarefa 3:  
Proposição de  
um  
questionário  
referente ao  
texto estudado**

A PF solicitou que os FPM, nos mesmos grupos da Tarefa 2, respondessem a um questionário sobre as características e os níveis de pensamento; a importância de o professor compreender como esses níveis de pensamento influenciam no processo de aprendizagem em Geometria; e a avaliação em termos do desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante.

**Tarefa 4:  
Apresentação e  
discussão da  
Tarefa 3**

Cada grupo apresentou suas considerações a respeito das respostas dadas ao questionário (Tarefa 3), as quais foram seguidas de discussões com todos os participantes da disciplina.

**Tarefa 5:  
Apresentação e  
discussão dos  
resultados do  
teste de van  
Hiele**

Os resultados dos testes dos FPM foram apresentados pela PF que discutiu com eles conceitos geométricos de figuras planas envolvidos em suas respostas, assim como respostas dadas por estudantes da Educação Básica para esse mesmo teste e possíveis práticas pedagógicas para o ensino desses conceitos.

---

No plano de ensino da disciplina, elaborado pela PF, apresenta-se como objetivo geral: promover reflexões, discussões e ações na formação dos FPM sobre o Ensino da Geometria no contexto da Educação Básica. E como objetivo específico: fomentar situações promotoras do desenvolvimento do pensamento geométrico. Em assim sendo, a PF propôs tarefas (Tabela 1) com a intencionalidade de desencadear reflexões nos FPM, tendo em conta perseguir tais objetivos.

Participaram da presente investigação 24 FPM, no entanto, vale ressaltar que apenas 18 realizaram a Tarefa 1, mas participaram das outras tarefas. Os dados dessa investigação referem-se às sessões de formação registradas em vídeo (*Google Meet*), à produção escrita dos FPM na resolução das tarefas (Tabela 1) e aos registros em diário de campo. Com a intenção de preservar o anonimato dos participantes, na apresentação dos resultados utilizamos as siglas: FPM1, FPM2 [...] FPM24, para representar cada um deles.

Na análise das informações, identificamos padrões na produção escrita dos FPM e nas discussões ocorridas nas aulas. A seguir, fizemos um exame detalhado destes dados, para identificar aspectos do pensamento geométrico constantes nas reflexões manifestadas pelos FPM durante o desenvolvimento das tarefas.

Assumimos os níveis de reflexão, propostos por Muir e Beswick (2007), como a lente das análises das reflexões emergentes dos dados nesta investigação, por concordarmos que a reflexão constitui um dos suportes para a aprendizagem de (futuros) professores (Muir & Beswick, 2007). Para as autoras, os níveis de reflexão são: a descrição técnica, a reflexão deliberada e a reflexão crítica. No nível de descrição técnica, o participante descreve relatos gerais da prática em sala de aula, muitas vezes com foco em aspectos técnicos, sem ponderar o valor das experiências. No nível de reflexão deliberada, o participante identifica incidentes críticos<sup>7</sup> e justifica ou explica a ação ou o comportamento. Por fim, no nível de reflexão crítica, o participante vai além da identificação de incidentes críticos, ele fornece explicações para considerar as perspectivas dos outros e oferecer alternativas. Tendo em conta esse referencial, os resultados evidenciam reflexões descritivas, deliberadas e críticas, com diferentes níveis de incidência, associadas: (I) aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico; (II) ao papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico; e (III) a conceitos geométricos relacionados a propriedades de figuras planas.

## **REFLEXÕES MANIFESTADAS POR FPM NO TRABALHO COM TAREFAS APOIADAS NOS APORTES TEÓRICOS DE VAN HIELE**

Nesta seção, apresentamos as reflexões manifestadas pelos FPM no trabalho com tarefas apoiadas nos aportes teóricos de van Hiele, associadas aos níveis de reflexão propostos por Muir e Beswick (2007).

---

<sup>7</sup> Para Muir e Beswick (2007), incidentes críticos são eventos particulares, envolvendo comentários específicos do professor ou do estudante, que parecem fornecer exemplos claros de algum aspecto da prática ou característica do pensamento do estudante.

## **I Reflexões relacionadas aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico**

Nesta subseção, discutimos as reflexões manifestadas pelos FPM (Tabela 2) na discussão do texto (Tarefa 2) sobre os níveis de pensamento para desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo teórico proposto por van Hiele.

**Tabela 2**

*Reflexões dos FPM manifestadas a respeito dos níveis de pensamento geométrico*

| <b>Níveis de pensamento</b> | <b>Evidências de reflexões manifestadas pelos FPM</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Nível 0<sup>8</sup></b>  | <i>O nível 0 está relacionado com a parte da observação. A percepção do estudante que a figura é um quadrado, um triângulo. Depende muito da observação do estudante, <b>dele analisar a diferença de uma figura para outra por meio da observação (G1).</b></i>                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Nível 1</b>              | <i>No nível 1, o estudante continua utilizando a visualização das propriedades, mas, neste nível, <b>ele vai criando um senso de começar a classificar as propriedades. Por exemplo, ele já é capaz de analisar que um cubo tem seis faces, e essas faces são congruentes (G2).</b></i>                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Nível 2</b>              | <i>No nível 2, o da dedução informal, o estudante começa a desenvolver o pensamento de modo quase que formal. <b>Os estudantes começam a pensar nas propriedades dos objetos geométricos sem as restrições de um objeto em particular, começando a desenvolver as relações entre as propriedades. Por exemplo, se os quatro ângulos de uma figura são retos, isso implica que a forma é um retângulo. Nesse segundo nível os estudantes já são capazes de fazer essas deduções de modo informal em relação às propriedades (G3).</b></i> |

<sup>8</sup> A numeração, utilizada para ordenar os níveis de pensamento propostos por van Hiele, foi sugerida por van de Walle (2009).

- Nível 3** *No nível 3, os estudantes entendem a geometria como um sistema dedutivo. Eles são capazes de examinar mais do que as propriedades das formas. O pensamento, desenvolvido anteriormente, permitiu estabelecer relações entre as propriedades. Nesse nível de pensamento, os estudantes são capazes de pensamentos mais lógicos do que intuitivos (G4).*
- Nível 4** *O nível 4, do rigor, é o mais elevado dessa hierarquia. O objetivo de atenção são os próprios sistemas axiomáticos e não apenas as deduções como nos níveis anteriores, e geralmente é um nível de especialistas em matemática. **Eu acredito que esse nível seja o nível da pesquisadora, porque ela está estudando Geometria no doutorado (G5).***

---

Nota: Na discussão, a PF solicitou que cada grupo apresentasse suas reflexões a respeito de um dos níveis (p.e., G1 sobre Nível 0; G2 sobre o Nível 1, etc.). Os trechos em negrito acentuam os tipos de ideias geométricas as quais os estudantes são capazes de pensar (operar) geometricamente em cada nível.

Os FPM denotaram reflexões de natureza deliberativa, ao identificarem elementos centrais referentes aos níveis de pensamento, e explicaram os tipos de ideias geométricas as quais os estudantes são capazes de pensar (operar) geometricamente em cada nível (van de Walle, 2009). A ênfase dada pelos FPM do que se deve “esperar” do estudante em cada nível pode ter ocorrido por estarem inseridos em um contexto de formação inicial de professores.

Discussões sobre os objetos e os produtos de pensamento de cada nível foram promovidas por meio das tarefas. Por exemplo, foi solicitado aos FPM que: descrevessem os primeiros três níveis do pensamento geométrico da teoria dos van Hiele (Níveis 0, 1 e 2); indicassem em suas descrições o objeto e o produto de pensamento de cada nível; e percebessem como essas ideias estabelecem uma progressão de um nível para o seguinte. A seguir, apresentamos as respostas do G1, representativas dos outros grupos, para a Tarefa 3 (questionário).

*Nível 0 – o objeto é a visualização.*

*Os produtos de pensamento do Nível 0 são classes ou agrupamentos de formas que são “parecidas”. As propriedades estão inclusas de forma informal e observacional. **Os alunos precisam analisar se casos***

***particulares podem ser generalizados, são propostas atividades de agrupamento de formas, preparando os alunos para o Nível 1.***

*Nível 1 – o objeto é a análise.*

*Os produtos do pensamento são as propriedades das formas. Os alunos terão contato com as propriedades das figuras, conseguirão aplicar as ideias a uma classe inteira de figuras. Nesse nível, estarão em desenvolvimento o pensamento crítico e o raciocínio, através desse desenvolvimento, eles estarão sendo preparados para o Nível.*

*Nível 2 – o objeto é a dedução informal.*

*Os produtos de pensamento são as relações entre as propriedades de objetos geométricos. Os alunos são encorajados a elaborar e testar hipóteses, argumentos lógicos, e usam a linguagem informal. Através dessas experiências serão preparados para o próximo Nível.*

Os FPM identificaram e descreveram o objeto e os produtos de pensamento associados em cada nível, fornecendo indícios de reflexões de natureza descritiva. Porém, ao indicarem alternativas para o trabalho com estudantes (negrito), quais sejam ações capazes de promover a transição de um nível de pensamento para o seguinte, evidenciaram reflexões de dimensão crítica. Esse nível reflexivo é considerado o nível mais elevado de reflexão (Muir & Beswick, 2007), podendo desencadear um processo reflexivo por parte dos FPM, que, ancorados na teoria, podem expressar aspectos que revelam uma percepção holística do processo de ensino e aprendizagem da Geometria, nomeadamente do pensamento geométrico.

Durante as discussões da Tarefa 4, os FPM também destacaram a relação existente entre objeto-produto dos níveis, presente na teoria de van Hiele. Esse reconhecimento é importante para eles perceberem que os “objetos devem ser criados em um nível de modo que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do nível seguinte” (van de Walle, 2009, p. 443). Reconhecer essa relação se torna essencial, visto que, para que ocorra o desenvolvimento do pensamento geométrico, de acordo com este modelo teórico, cabe ao professor ter consciência de que suas orientações são decisivas para que o estudante obtenha sucesso nesse processo (van Hiele, 1984).

Ainda na Tarefa 3 foi solicitado ao FPM que descrevessem as quatro características dos níveis de pensamento de van Hiele. Para ilustrar, elegemos a resposta do G4, uma vez que, de modo geral, os outros grupos apontaram para as mesmas características.

*Os níveis são sequenciais (...) Os níveis não são dependentes da idade no sentido dos estágios de desenvolvimento de Piaget (...) A experiência geométrica é o fator simples de maior influência sobre o avanço ou desenvolvimento através dos níveis (...). Quando o ensino ou a linguagem está em um nível superior ao do estudante, haverá uma falta de comunicação.*

Os FPM denotaram reflexões essencialmente descritivas associadas a aspectos gerais e aos níveis de pensamento, como o fato de o movimento de um nível para o outro ser sequencial, gradativo e contínuo. Segundo van Hiele (1984), para desenvolver o pensamento geométrico, a transição de um nível para o seguinte só acontece se forem acumulados símbolos suficientes que levem a este novo nível, ou seja, após tantos conceitos terem sido condensados nos símbolos, esses podem ser usados como guia para o nível seguinte.

## **II Reflexões relacionadas ao papel do professor na prática em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento geométrico**

Nesta subseção, apresentamos as reflexões manifestadas pelos FPM relacionadas ao papel do professor na prática em sala de aula, sobretudo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento geométrico. Essas reflexões foram evidenciadas em diferentes momentos no desenvolvimento das tarefas. Por exemplo, na Tarefa 3, os FPM foram questionados sobre o que eles podem fazer quando os estudantes estiverem em diferentes níveis de pensamento geométrico. O G3 apresentou a seguinte resposta ao questionário:

*Em primeiro momento, temos que descobrir em qual nível está cada estudante, por meio de atividades deve-se examinar as falas dos estudantes e através delas e da constante observação, podemos caracterizar o seu nível de pensamento. Após, deve-se aplicar atividades adequadas a cada nível; podemos apresentar até mesmo atividades que contemplem dois níveis de pensamento; o trabalho em equipe também tem grande importância, pela troca de conhecimentos e diálogo entre os estudantes. Assim, buscamos que o estudante alcance um nível*

*superior de pensamento geométrico e também poder desenvolver a turma de forma integral (G3).*

No momento em que discutiram as respostas dadas ao questionário (Tarefa 4), o G5 desvelou a seguinte reflexão:

*é importante que o professor compreenda o nível no qual os estudantes se encontram com a finalidade de poder intervir de maneira positiva no processo de aprendizagem do estudante, levando em consideração os conhecimentos já adquiridos para que posteriormente possa prosseguir para o próximo nível compreendendo as **progressões das ideias e como elas se constituem por meio da observação e classificação das mesmas** (G5).*

Os FPM sublinharam aspectos significativos acerca de suas ideias sobre o papel do professor e das práticas de ensino que favorecem o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Além disso, dão indícios de reflexões de natureza deliberada, ao identificarem incidentes críticos como: o nível de pensamento mobilizado por eles; a oportunidade de todos progredirem em termos de desenvolvimento de pensamento em níveis hierárquicos; a organização dos conteúdos de modo a contemplar as necessidades dos estudantes; os conhecimentos prévios dos estudantes; a utilização de um vocabulário adequado ao contexto em cada nível; e a aprendizagem por meio de tarefas que promovam a evolução do estudante de um nível para outro. Todavia, ao sinalizarem a importância destas práticas de ensino como alternativa para o trabalho com o pensamento geométrico em sala de aula, sugerem reflexões de dimensão crítica, corroborando a questão proposta pela PF, que potencializou esse tipo de reflexão.

Em contrapartida, surgiram também discussões voltadas às práticas de ensino que desfavorecem a aprendizagem progressiva em relação aos níveis de pensamento, proposto por van Hiele. Durante a discussão do texto (Tarefa 2), os FPM mobilizaram reflexões, como:

*Se o professor utilizar linguagens ou compreensões que estão acima do nível do estudante, ou que ainda não foram desenvolvidas com os mesmos, isso apenas **estimula um aprendizado de forma mecânica**. (...) se o professor escolher um estudante que está no nível 0 ou 1 e perguntar a ele sobre axiomas, coisas que ele ainda não conhece, ao invés de ele*

*desenvolver seu pensamento ele vai só **decorar e reproduzir aquilo que ele ouviu** (FPM9).*

Reflexões em torno dessas práticas de ensino também apareceram nas respostas dadas ao questionário (Tarefa 3). Por exemplo:

*Como, de acordo com van Hiele, a aprendizagem da geometria ocorre em níveis hierárquicos então se lhes forem passados ensinamentos que vão além dos já aprendidos o estudante **não irá conseguir fixar corretamente o conceito** (...). Os níveis são sequenciais (...) quando o ensino ou a linguagem está em um nível superior ao do estudante, haverá uma **falta de comunicação** (G4).*

Os FPM ressaltaram a questão do trabalho com tarefas não condizentes ao nível de pensamento apresentado pelo estudante e como isso pode afetar o desenvolvimento do pensamento geométrico, gerando a falta de comunicação entre o professor e os estudantes e, conseqüentemente, uma aprendizagem sem atribuição de significados para conceitos geométricos. Isso denota reflexões de natureza deliberada, que justificam as ações do professor e as relacionam às atividades dos estudantes, no contexto do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo de van Hiele.

As práticas avaliativas foram, ainda, alvo de discussões no decorrer da disciplina. Foi perguntado aos FPM como um professor pode avaliar os estudantes em termos de seu desenvolvimento geométrico geral ou de seu senso espacial. A seguir, vemos as respostas ao questionário (Tarefa 3), fornecidas pelo G1 e G4, representativas dos outros grupos.

*Para que o professor possa avaliar o desenvolvimento dos estudantes, ele deve analisar a maneira como eles pensam as formas geométricas, como eles compreendem e associam as propriedades e conceitos, a maneira de **aplicar os conhecimentos adquiridos nas resoluções de problemas** (G4).*

*Assumindo que a teoria de van Hiele esteja correta, nota-se que dentro de uma única turma pode existir estudantes em diferentes níveis. Sendo assim, é preciso avaliá-los de maneira que seja possível distinguir cada nível de cada estudante. Nesse caso, pode-se **usar materiais concretos, desenhos e modelos computacionais**, assim enquanto o professor aplica a atividade ele precisa estar atento e escutar os tipos de observações de seus estudantes. É de extrema importância*

*saber em que nível cada estudante está, porque só assim será possível ajudá-lo a avançar para o nível seguinte (G1).*

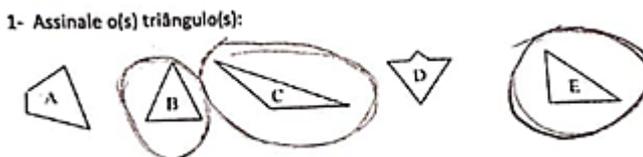
Os FPM apontaram que, ao avaliar o estudante em termos do desenvolvimento do pensamento geométrico, o professor deve observar a forma como ele compreende os conceitos matemáticos construídos no decorrer das aulas e, para que isso ocorra, é importante escutá-lo. Ressaltaram a importância de utilizar um material manipulável e visual como ferramenta para o ensino de Geometria. Essas reflexões têm natureza crítica, pois, além de identificarem como avaliar em termos do desenvolvimento do pensamento geométrico, eles propuseram alternativas para que a ação de avaliar sirva como instrumento para o professor entender em qual nível cada estudante se encontra, possibilitando, assim, sua tomada de decisões. Como bem afirma van de Walle (2009), todo professor, ao avaliar, deve ser capaz de perceber, ao longo do ano trabalhado, algum indício de desenvolvimento no pensamento geométrico do estudante.

### **III Reflexões relacionadas a conceitos geométricos quanto às propriedades geométricas de figuras planas**

As discussões ocorridas durante o desenvolvimento da Tarefa 5 proporcionaram aos FPM reflexão de conceitos geométricos associados a propriedades de figuras planas (triângulos e quadriláteros). Ilustramos algumas respostas e justificativas dadas às questões presentes na Tarefa 1, as quais foram selecionadas pela PF para discutir a Tarefa 5 (Figura 2).

#### **Figura 2**

*Respostas e justificativas fornecidas à questão 1 do teste*



Frequência das respostas: 17 FPM marcaram B, C e E e um marcou B, C, D e E.

Algumas justificativas dos FPM:

Propriedades:

- tem três vértices;
- tem três mediana;
- a soma dos ângulos internos  $\hat{=}$   $180^\circ$ ;
- a soma dos ângulos externos  $\hat{=}$   $360^\circ$ !

① São triângulos - B, C, E (possuem 3 lados)

④: B, C e E são triângulos, pois possuem três vértices que se encontram, duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos.

Além das justificativas apresentadas na Figura 2, a PF ressaltou em sua fala aquelas que foram mais recorrentes: i) *B, C, E são triângulos, pois possuem três vértices*; ii) *são triângulos pois possuem três ângulos*; e iii) *são polígonos formados por 3 lados*. Comentou também que o FPM que assinalou a alternativa D registrou que ficou com dúvida e escreveu, de modo incorreto, que “se dividir a figura, temos dois triângulos”. No entanto, tal “divisão” não poderia ser considerada, pois teriam que analisar a figura como um todo.

Destacamos também a seguinte justificativa: *B, C, E são triângulos, pois possuem três faces (Discussão do questionário-FPM12)*. A partir dessa justificativa, um diálogo foi estabelecido entre a PF e a turma.

PF: *O triângulo tem faces?*

FPM7: *Não.*

PF: *Por que não?*

FPM7: *Porque não é uma figura espacial.*

(Discussão do teste – Tarefa 5)

Ao responder à questão levantada pela PF, a princípio o FPM7 não justificou sua resposta, no entanto, provocado pela PF, forneceu uma explicação, denotando, desta forma, uma reflexão de natureza deliberativa.

Para a discussão da questão 2 (Tarefa 1), a PF selecionou as seguintes respostas e justificativas (Figura 3):

### Figura 3

Respostas e justificativas fornecidas à questão 2

2- Assinale o(s) quadrado(s):



Frequência das respostas: Sete FPM marcaram C; cinco marcaram B, C e E; cinco marcaram C e E; e um marcou B e C.

Algumas justificativas dos FPM

2) B, C, E. O quadrado possui os lados iguais e congruentes.

Propriedades:  
→ quatro ângulos retos;  
→ quatro lados congruentes.

2- C e E são quadrados, pois as diagonais e os lados são congruentes.

2- B, C, E; todo quadrado é um retângulo  
todo quadrado é um losângulo

Para provocar a discussão, PF convidou os FPM a interpretarem as repostas (Figura 3) dizendo que tinham sido apresentadas por estudantes da Educação Básica, para não submeter os que erraram a uma situação de vulnerabilidade.

PF: O que vocês entendem quando os estudantes da Educação Básica assinalaram as formas B, C e E?

FPM8: Entendo que os estudantes sabem pouco sobre a definição de quadrado. Acham que para ser

**um quadrado bata ter quatro lados. Então qualquer figura que tem quatro lados é um quadrado.**

PF: *E o estudante que marcou só a C, o que ele pode saber?*

FPM8: *Aí ele já sabe que os lados opostos têm que ser iguais (mesma medida) e que todos os lados tem que ser iguais.*

PF: *E os estudantes que assinalaram a C e E?*

FPM8: *Eles têm uma noção melhor de quadrado.*

FPM7: *Professora, eu penso que os estudantes que assinalaram B, C e E, não, necessariamente, sabem a definição de quadrado. **Eles podem ter pensado que é um retângulo, se a gente “cortar” ao meio ele vira dois quadrados.***

PF: *Mas veja o enunciado, ele é bem consistente, pede para assinalar os quadrados, ele não pede para fazer uma secção. E qualquer retângulo que dividir ao meio, ele se tornar dois um quadrado?*

FPM7: *Não.*

FPM8: ***A figura E parece um losango, mas não podemos afirmar que os quatro lados são iguais olhando só na figura, pois todo quadrado é um losango, mas nem tem todo losango é um quadrado. Então quem assinalou essa figura pressupôs que o losango é um quadrado.***

PF: *É realmente não dá para afirmar, pois aquela figura está meio suspeita, pode ter acontecido alguma deformação ao recortar na hora de montar o teste. Mas é como você falou, o losango é uma figura que tem quatro lados com a mesma medida. Então se o estudante conhece essa definição, pode ser que ele tenha pensado nisso, mas ele pode ter olhado só pela aparência da figura. Isso é bom, pois às vezes os estudantes só pensam em quadrado quando são apresentados como o da letra C, mas se girarmos a figura ele*

*não perde as propriedades. E geralmente nas salas de aulas e nos livros didáticos os quadrados são apresentados como na letra C, dificilmente eles apresentam como na letra E.*

*(Discussão do teste – Tarefa 5)*

As reflexões manifestadas pelos FPM decorrem da tentativa de compreender ideias e raciocínios manifestados pelos estudantes da Educação Básica, o que funcionou como estímulo e aprofundamento de seus próprios conhecimentos geométricos relacionados às propriedades de figuras planas, considerando que FPM, ao assinarem a figura B (retângulo) como um quadrado, evidenciaram dificuldades em relação ao reconhecimento de propriedades de figuras planas.

O FPM8 manifestou reflexões de natureza deliberativa, ao afirmar que, como os estudantes podem saber pouco a respeito da definição de quadrado, consideram que toda figura que tem quatro lados é um quadrado.

Por outro lado, o FPM7 dá uma possível justificativa para a resposta dos estudantes que assinalaram C e E, o que evidencia uma reflexão crítica. No entanto, a justificativa dele demonstra sua fragilidade em relação a esse conteúdo de Geometria. Esse tipo de experiência pode propiciar aos FPM aprendizagens a respeito de Geometria e de como ensinar Geometria.

Com vista a explorar as propriedades de figuras planas, a PF provocou uma discussão para sistematizar as propriedades dos quadriláteros e agrupá-los em classes.

*PF: O quadrado tem lados opostos e congruentes? E os retângulos? E os losangos?*

*FPM8: Nem sempre. Pensando na definição do quadrado, ele também é considerado um paralelogramo.*

*PF: E os paralelogramos apresentam lados opostos paralelos e congruentes. Então eles são trapézios?*

*(Discussão do teste – Tarefa 5)*

A provocação da PF conduziu os FPM a reflexões críticas sobre a sistematização de propriedades de quadriláteros, o que pode favorecer o aprofundamento de compreensões e esclarecer equívocos acerca da inclusão de classes de quadriláteros. Cumpre observar que, quando a PF problematiza a respeito do trapézio, os FPM não responderam ao questionamento, o que a

levou a apresentar propriedades do trapézio para que eles concluíssem que todos os paralelogramos são trapézios (Figura 4).

**Figura 4**

*Classes dos quadriláteros apresentado pela PF*



***Paralelogramos:***

- *Possuem lados opostos congruentes.*
- *Possuem ângulos opostos congruentes.*
- *Possuem ângulos adjacentes suplementares.*
- *A diagonal de um paralelogramo cruza-se em seus pontos médios.*

A partir da sistematização realizada no desenvolvimento da Tarefa 5, evidenciamos que as reflexões oriundas dessa discussão forneceram evidências de construção de conceitos geométricos relacionados a figuras planas, como: definição e propriedades de triângulos, definição e propriedades de quadriláteros, e a inclusão de classes dos quadriláteros notáveis.

**DISCUSSÃO DOS RESULTADOS**

As reflexões emergentes no desenvolvimento das tarefas a respeito do pensamento geométrico foram identificadas, em sua maioria, como deliberadas e críticas, o que revela que espaços formativos, como o promovido nesta disciplina, podem ser promissores para que futuros professores reflitam *sobre* a prática (Muir & Beswick, 2007) no ensino de Geometria. Os FPM, ao vivenciarem situações da prática pedagógica promovidas no trabalho com as

tarefas, puderam refletir a respeito do quê, como, porquê e quando ensinar Geometria.

Considerando que a geometria promove o pensamento lógico e a compreensão matemática, os professores de Matemática têm um papel crucial no processo de ensino e de aprendizagem dessa temática (van Hiele, 1999). Portanto, o conhecimento de uma perspectiva teórica, para desenvolver o pensamento geométrico – como a de van Hiele, por exemplo – na formação inicial, pode oportunizar aos FPM não só a ampliação do seu próprio pensamento geométrico, como também, a busca de meios de apoiar esse tipo de pensamento de seus futuros estudantes (Livy & Downton, 2018; Nacarato & Passos, 2003).

As reflexões manifestadas a respeito dos níveis de pensamento sugerem o reconhecimento dos objetos e dos produtos de pensamento propostos de cada nível e a identificação de características gerais do modelo teórico estudado. Tais reflexões foram, em sua maior parte, deliberadas. Apoiados nos estudos teóricos (Tarefa 2), os FPM identificaram elementos centrais de cada nível proposto no modelo de van Hiele e explicaram de que maneira um estudante poderia pensar/operar em cada um destes níveis.

As reflexões geradas, a partir da discussão a respeito do papel do professor na prática em sala de aula foram, em sua maioria, deliberadas e críticas. A experiência prática de analisar equívocos, ideias, registros e estratégias dos estudantes, bem como as suas próprias, como proposto na Tarefa 5, facultaram aos FPM compreenderem possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no desenvolvimento do pensamento geométrico. Ao analisarem as respostas apresentadas, da perspectiva de um professor, puderam observar diferentes abordagens e estratégias, concebendo diferentes maneiras de fornecer instruções apropriadas para desencadear a transição entre níveis de pensamento de seus estudantes (Lee & Lee, 2020). As discussões promovidas sobre conhecimentos pedagógicos do conteúdo, nesse caso de conhecimentos do conteúdo de geometria, corroboram a ideia de que o modelo de van Hiele é um importante recurso, ao fornecer uma rica base, para a compreensão do (futuro) professor sobre geometria e como os estudantes aprendem geometria (Alex & Mammen, 2018; Erdogan, 2020).

Nesse sentido, os FPM destacaram aspectos relevantes, como práticas de ensino que favorecem ou desfavorecem o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes e de como avaliar essa forma de pensar. Assim, ao identificarem a relevância e implicações destas práticas de ensino no trabalho com a geometria em sala de aula e ao oferecerem alternativas para

apoiar o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes, em uma futura prática profissional, os FPM evidenciaram reflexões de dimensão crítica. Advogamos que o desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante depende dos tipos de experiências que lhe são oferecidas, cabendo ao professor reconhecer o nível de pensamento no qual o estudante se encontra para, então, propor tarefas adequadas e oportunizar a construção gradual de conceitos geométricos (van Hiele, 1999).

No que tange à construção de conceitos geométricos relacionados a figuras planas, identificamos, em sua maioria, reflexões de natureza deliberativas, que demonstraram que os FPM mobilizaram conhecimentos geométricos referentes às definições e às propriedades de triângulos, de quadriláteros, e a inclusão de classes de quadriláteros notáveis. Assim, privilegiar intencionalmente conhecimentos específicos da geometria, como dos quadriláteros, propiciou aos FPM um conhecimento mais amplo deste conteúdo. Muitas vezes, a ausência ou pouca frequência do ensino da geometria na Educação Básica está relacionada com as fragilidades de professores de Matemática em relação, por exemplo, ao raciocínio dedutivo, à incompreensão do processo de classificação dos quadriláteros (Brunheira & Ponte, 2019; Costa & Santos; 2016, Fujita, 2012). Tais fragilidades sinalizam para a importância de processos formativos e de pesquisas que desenvolvam estratégias para mitigá-las, apoiando FPM no desenvolvimento do seu próprio pensamento geométrico (Brunheira & Ponte, 2019).

A execução das tarefas e a dinâmica estabelecida pela PF no processo formativo oportunizaram aos FPM reconhecerem e atribuírem significados para conceitos e propriedades geométricas, além de outras ações que dão indícios de desenvolvimento do pensamento geométrico. A Tabela 3 ilustra uma síntese dos aspectos de pensamento geométrico identificados, tendo por base as reflexões manifestadas pelos FPM nesse processo formativo associadas: (I) aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele; (II) ao papel do professor na prática em sala de aula; e (III) a conceitos geométricos e propriedades de figuras planas.

**Tabela 3**

*Aspectos do pensamento geométrico identificados a partir das reflexões*

| <b>Reflexões associadas:</b>                                    | <b>Aspectos do pensamento geométrico</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Aos níveis de pensamento proposto no modelo de van Hiele</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Analisar diferenças de uma forma geométrica para outra por meio da visualização.</li><li>• Classificar propriedades de formas geométricas, de modo particular.</li><li>• Estabelecer relações entre diferentes objetos geométricos, de modo a deduzir propriedades informalmente.</li><li>• Realizar generalizações, construção de classes de objetos geométricos com características em comum.</li><li>• Trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas.</li><li>• Entender a complexidade dos fenômenos e realizar inferências sobre eles.</li><li>• Reconhecer os objetos geométricos por meio de processos dedutivos, mobilizando propriedades desses objetos que passam agora a compor o mundo abstrato.</li></ul> |
| <b>Ao papel do professor na prática em sala de aula</b>         | <ul style="list-style-type: none"><li>• Fornecer indícios de que a reprodução mecânica não potencializa o desenvolvimento do pensamento geométrico.</li><li>• Observar se os estudantes atribuem significados aos conceitos geométricos, de modo a mobilizá-los, de forma coerente, na resolução de problemas.</li></ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

### **A conceitos geométricos relacionados a propriedades de figuras planas**

- Reconhecer elementos constituintes de formas geométricas e propriedades
  - Estabelecer diferenças entre elementos de figuras planas e espaciais
  - Definir um objeto geométrico, para além de apenas observar suas características.
  - Incluir quadriláteros em classes de acordo com suas propriedades.
- 

Tais aspectos podem constituir um modo de compreender a Geometria e seu ensino. Os conhecimentos manifestados pelos FPM na resolução de problemas podem ser úteis para entender fenômenos do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, desde a exploração sensorial de objetos presentes ao seu redor até o reconhecimento da Geometria como óculos para a compreensão de objetos que compõem o mundo teórico (Costa, 2020).

## **A CONCLUIR**

As análises e as discussões manifestadas pelos FPM permitem-nos concluir que os momentos de socialização nas aulas – mesmo diante das dificuldades encontradas em razão do contexto pandêmico vivenciado – foram enriquecidos por experiências proporcionadas pelas tarefas e pela dinâmica estabelecida pela PF. Essas tarefas e as discussões viabilizaram reflexões para uma formação docente mais crítica e ampla sobre conhecimentos teóricos a respeito do pensamento geométrico, de práticas de sala de aula e da construção de conceitos geométricos.

Os diferentes níveis de reflexão em que se alicerçou o quadro analítico mostraram-se promissores para esclarecer diferentes modos – numa estrutura hierárquica e inter-relacionada – pelos quais a reflexão, assentada no trabalho com tarefas bem delineadas, influencia e oferece condições para fomentar aprendizagens de FPM acerca do pensamento geométrico.

As reflexões emergentes demonstraram que, ao operar no nível mais elevado de reflexão, nível crítico, o FPM pode ser capaz de vislumbrar possibilidades de práticas futuras para o ensino de Geometria, de modo a associar teoria à prática. Durante o processo de formação inicial, por vezes, são poucos os momentos em que isso é contemplado. Assim sendo, ações formativas, como as desencadeadas nesse processo de formação, podem

contribuir para minimizar a dicotomia entre as dificuldades que o futuro professor tem em aprender conteúdos geométricos e aprender a ensinar Geometria.

A PF, ao estabelecer a comunicação a partir das interações com os FPM e a promoção da interação entre eles, proporcionou a verbalização de seus raciocínios, o debate de ideias divergentes, a investigação de propriedades e a construção/sistematização de conceitos geométricos com significados.

Ações formativas que oportunizam ao futuro professor perpassar por diferentes níveis reflexivos podem resultar num processo de aprendizagem capaz de permitir a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico necessários para a sua futura prática profissional. Investigações futuras, incidentes na observação e na promoção dessas ações formativas, apoiadas em outros modelos teóricos, podem oferecer elementos necessários para esclarecer outros aspectos do pensamento geométrico.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos aos FPM e a PF pelo engajamento neste estudo e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/Brasil) pela bolsa de produtividade em pesquisa concedida a Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

## **DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES**

A.F.M.V. e M.C.C.T.C. conceberam a ideia apresentada, desenvolveram a teoria e adaptaram a metodologia. A.F.M.V. coletou os dados. As autoras analisaram os dados, discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

## **DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS**

Os dados que apoiam este artigo encontram-se sob a guarda de A.F.M.V. e podem ser disponibilizados sob solicitação de demais interessados pelo período de cinco anos.

## REFERÊNCIAS

- Alex, J. K. & Mammen, K. J. (2018). Students' understanding of geometry terminology through the lens of van Hiele theory. *Pythagoras*, 39(1), 1-8. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v39i1.376>
- Almouloud, S. A., Manrique, A. L., Silva, M. J. F. D., & Campos, T. M. M. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, 27, 94-108. <https://doi.org/10.1590/S1413-24782004000300007>
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM/Information Age Publishing.
- Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução às teorias e aos métodos*. Porto.
- Brunheira, L. & da Ponte, J. P. (2019). From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 65-80. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.004>
- Costa, A. P. da. (2020). O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. *Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar*, 6(16). <https://doi.org/10.36556/eol.v0i22.253> .
- Costa, A. P. da & dos Santos, M. C. (2016). O pensamento geométrico de professores de matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. *Educação Online*, 1(22), 1-19. <http://doi.org/10.21920/recei720206167794> .
- Cybulski, F. C. (2022). *Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática: indicativos de dissertações e teses brasileiras*. [Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática]. Universidade Estadual de Londrina.
- Erdogan, F. (2020). Prospective middle school mathematics teachers' problem posing abilities in context of Van Hiele Levels of Geometric Thinking. *International Online Journal of Educational Sciences*, 12(2). <https://doi.org/10.15345/iojes.2020.02.009> .

- Ferreira, A. C., & Barbosa, C. P. (2013). Saberes profissionais e pensamento geométrico: o caso de uma professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Acta Scientiae*, 15(1), 93-112.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2012). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos* (3. ed., Coleção formação de professores). Autores Associados.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>
- Knight, K. C. (2006). *An investigation into the change in the Van Hiele levels of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Maine, Orono.
- Lee, M. Y., & Lee, J. E. (2020). Spotlight on area models: Pre-service teachers' ability to link fractions and geometric measurement. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(5), 1079-1102. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10098-2>.
- Livy, S., & Downton, A. (2018). Exploring experiences for assisting primary pre-service teachers to extend their knowledge of student strategies and reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 150-160.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.004>.
- Lorenzato, S. (1995). Porque não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, III(4), 3-13.
- Mattos, J. M., & Serrazina, M. D. L. (1996). Didática da matemática. *Universidade Aberta*, 191-212.
- Muir, T., & Beswick, K. (2007). Stimulating reflection on practice: Using the supportive classroom reflection process. *Mathematics Teacher Education and Development*, 8, 74-93.
- Nacarato, A. M., & Passos, C. L. B. (2003). *A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. EdUFSCar.
- Nasser, L., & Santanna, N. P. (1997). *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. UFRJ, Projeto Fundação.

- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Nunes C. B., & Onuchic L. R. (2019). O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática. *Interfaces da Educ.*, 10(30), 30-56.  
<https://doi.org/10.26514/inter.v10i30.3565> .
- van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula*. Penso.
- van Hiele, P. M. A. (1984). child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn College.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, 5(6), 310-316.  
<https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0310>