

A natureza individual ou colaborativa de estratégias metacognitivas e seus desdobramentos para a modelagem matemática

Élida Maiara Velozo de Castro ^a
Lourdes Maria Werle de Almeida ^a

^a Universidade Estadual de Londrina (UEL), Programa de pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, PR, Brasil.

Recebido para publicação 31 jan. 2023. Aceito após revisão 18 mar. 2023
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: A modelagem matemática vem sendo apontada como meio para o ensino e a aprendizagem da matemática na sala de aula. **Objetivo:** Investigar desdobramentos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática decorrentes de estratégias metacognitivas dos estudantes. **Design:** A pesquisa segue orientações da abordagem qualitativa. **Ambiente e participantes:** As atividades de modelagem foram desenvolvidas por estudantes do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. **Coleta e análise de dados:** Em aulas da disciplina de Perspectivas da Modelagem Matemática, os dados foram coletados por meio de gravações das aulas realizadas no Google Meet. Também compõem material de análise os registros escritos produzidos pelos estudantes e os relatórios por eles entregues. **Resultados:** Os desdobramentos evidenciados para as atividades podem ser alocados a quatro grupos: a identificação da interação entre matemática e realidade; o uso de conceitos matemáticos e a construção de modelos; a validação de modelos e de resultados; movimentos de ida e vinda em atividades de modelagem matemática. **Conclusões:** Embora o principal agente de metacognição seja o indivíduo, em atividades de modelagem, as estratégias metacognitivas não se limitam à natureza individual, havendo também evidências de metacognição colaborativa no grupo. Alguns desdobramentos decorrem mais de uma estratégia metacognitiva do que de outra. Isso sinaliza que não é uma estratégia isolada, mas um conjunto delas que viabiliza as ações em atividades de modelagem matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Estratégias Metacognitivas; Metacognição Individual; Metacognição Colaborativa.

Autor correspondente: Élida Maiara Velozo de Castro. Email:
elidamaiaravc@gmail.com

The individual or collaborative nature of metacognitive strategies and their consequences for mathematical modelling

ABSTRACT

Background: Mathematical modelling has been pointed out as a means for teaching and learning mathematics in the classroom. **Objective:** To investigate consequences for the development of mathematical modelling activities arising from students' metacognitive strategies. **Design:** The research follows the guidelines of the qualitative approach. **Environment and participants:** The modelling activities were developed by students in the fourth year of a Mathematics degree course. **Data collection and analysis:** In classes of the discipline Perspectives on Mathematical Modelling, data were collected through recordings of classes held on Google Meet. The written records produced by the students and the reports delivered by them also make up the material for analysis. **Results:** The unfolding evidenced for the activities can be allocated into four groups: identification of the interaction between mathematics and reality; use of mathematical concepts and construction of models; validation of models and results; back-and-forth movements in mathematical modelling activities. **Conclusions:** Although the main agent of metacognition is the individual, in modelling activities, metacognitive strategies are not limited to the individual nature, there is also evidence of collaborative metacognition in the group. Some developments result from more of one metacognitive strategy than another. This signals that it is not an isolated strategy, but a set of them that enables actions in mathematical modelling activities.

Keywords: Mathematical Modelling; Metacognitive Strategies; Individual metacognition; Collaborative Metacognition.

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática vem sendo apontada como meio para o ensino e a aprendizagem da matemática na sala de aula. Esse apontamento fundamenta-se, de maneira geral, em aspectos que sinalizam que ela pode contribuir para que estudantes entendam o mundo real¹, potencializem sua aprendizagem (motivação, formação de conceitos, compreensão, retenção) e desenvolvam competências (Blum & Ferri, 2009; Castro e Almeida, 2023).

Não obstante essa importância da modelagem na sala de aula, estudos revelam que as demandas cognitivas que ela requer podem, em alguns casos, atuar como barreira, seja para o sucesso dos estudantes nessas atividades no

¹ Por *mundo real* entendemos, assim como Galbraith e Holton (2018), tudo o que está relacionado com a natureza, com a sociedade ou a cultura, incluindo a vida cotidiana, bem como disciplinas escolares ou universitárias, não necessariamente matemáticas.

que se refere aos procedimentos que ela requer, seja na sua repercussão sobre a aprendizagem (Galbraith & Stillman, 2006; Almeida, 2022; Blum, 2015).

Esta talvez seja uma razão pela qual tem havido interesse crescente em investigações que se direcionam aos processos psicológicos dos estudantes enquanto se envolvem com atividades dessa natureza. Em particular, a metacognição é considerada um aspecto que merece atenção no desenvolvimento de atividades de modelagem, havendo indicações de possíveis interlocuções entre as ações dos estudantes nessas atividades e as estratégias metacognitivas (Yildirim, 2010; Stillman, 2004; Vorhölter, 2018; Vorhölter, 2019; Vertuan & Almeida, 2016; Vorhölter & Krüger, 2021).

Segundo Jou e Sperb (2006), a metacognição como objeto de pesquisa abre um novo campo de investigação, provocando inclusive uma mudança de paradigma no qual se percebe a necessidade de diferenciar *cognição* de *metacognição* e passando a considerar o sentimento de conhecer como produto da função metacognitiva.

Precursor das pesquisas sobre metacognição no campo educacional, Flavell (1976) caracteriza a metacognição como conhecimento que o sujeito tem de seus eventos cognitivos e sugere que a atividade metacognitiva inclui variáveis da pessoa, da tarefa e das estratégias usadas.

Variáveis pessoais dizem respeito ao conhecimento do sujeito sobre sua cognição, suas habilidades e motivações. As variáveis da tarefa referem-se ao conhecimento que o sujeito tem sobre como lidar com as informações. “Por exemplo, as pessoas sabem que informações familiares exigem menos esforço atencional do que informações totalmente novas, assim como sabem que é mais fácil lembrar a ideia central de uma história do que as palavras exatas utilizadas” (Jou & Sperb, 2006 p.179). Já com relação às variáveis de estratégia, Flavell (1987) aponta que, enquanto as estratégias cognitivas se referem ao resultado, as estratégias metacognitivas dizem respeito à avaliação da eficiência desse resultado. “Por exemplo, para resolver uma adição soma-se um número a outro. Essa é uma estratégia cognitiva. Repetir a operação várias vezes para ter confiança de que a estratégia cognitiva utilizada levou ao sucesso é uma estratégia metacognitiva” (Jou & Sperb, 2006 p.179).

Estudos sobre metacognição em modelagem matemática, ainda que incipientes, reconhecem que o uso de estratégias metacognitivas é fundamental para o desenvolvimento de atividades de modelagem bem-sucedidas (Blum, 2011, Stillman, 2011, Vorhölter, 2019). Tais estudos apontam que um aspecto peculiar é o fato de que atividades de modelagem são, geralmente,

desenvolvidas em grupos e a metacognição tem sido referida como uma atitude individual.

Ao reconhecer que uma característica essencial de atividades de modelagem é seu desenvolvimento em grupos, o conjunto de estratégias metacognitivas, desde a interação com a situação até a validação da resposta, não se limita à natureza individual. Ao invés disso, a metacognição colaborativa passa a ter relevância. Assim, investigações que explorem essa característica são relevantes para que o papel da metacognição e os alcances de estratégias metacognitivas em atividades de modelagem possam ser identificados.

Em uma outra direção, Schukajlow e Leiss, (2011) e Vorhölter, (2019) sugerem que atividades de modelagem podem tanto ser influenciadas por estratégias metacognitivas, quanto exercer um efeito sobre a metacognição dos estudantes. Considerando essa possibilidade, em Castro e Almeida (2022), a investigação se dirige ao potencial da modelagem matemática para promover estratégias metacognitivas. Na presente pesquisa, em sentido oposto, interessamos investigar desdobramentos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática decorrentes de estratégias metacognitivas mobilizadas pelos estudantes.

Com essa finalidade direcionamos a atenção para ações de um grupo de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática ao desenvolverem duas atividades de modelagem.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Embora diferentes entendimentos relativos à modelagem no campo da Educação Matemática sejam compartilhados, parece haver um consenso em torno da assertiva de Pollak (2015) de que a ideia central sempre é identificar uma situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na formulação de um modelo matemático, fazer uso de matemática na situação idealizada a partir de uma situação da realidade e então decidir se os resultados são adequados para o problema.

Alinhado com essas argumentações, o presente artigo pauta-se em um entendimento compartilhado em Almeida (2018), de que uma atividade de modelagem matemática tem início em uma situação inicial (situação-problema) e pode se dizer concluída em uma situação final (resposta para o problema identificado na situação inicial). O caminho entre estes dois pontos é revestido

de ações que, previamente definidas ou que emergem na caminhada, são relevantes para o sucesso no desenvolvimento da atividade.

A ideia de um caminho a que nos referimos no presente artigo traz para reflexão estratégias e possibilidades de ação, especialmente quando a modelagem é incorporada em aulas de Matemática em que os fazeres dos estudantes, para além de produzir uma solução para o problema, também são associados às suas aprendizagens ao percorrer esse caminho.

De forma geral, o que esse caminho deve incluir vem sendo incorporado nos chamados ciclos de modelagem matemática que tem a intenção de explicitar prováveis, ou talvez desejáveis, ações dos estudantes quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática.

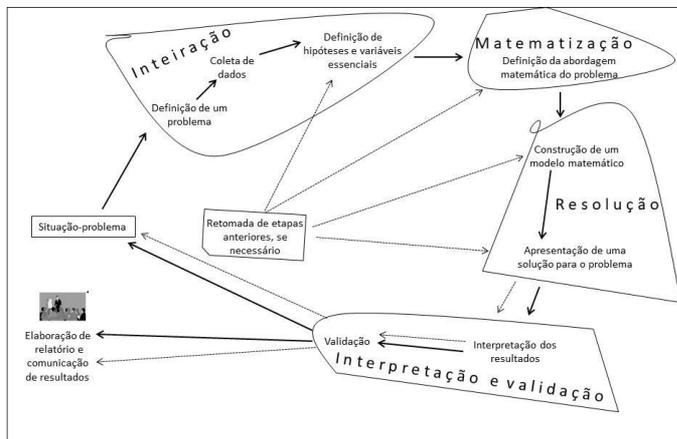
Almeida et al. (2021) caracterizam seis fases em uma atividade de modelagem desenvolvida na sala de aula: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação; elaboração de um relatório e comunicação de resultados (Figura 1).

A inteiração, segundo esses autores, refere-se ao ato ou efeito de inteirar-se, de informar-se sobre a situação a ser estudada; a matematização consiste na tradução do problema real em um problema matemático e implica o uso de uma linguagem matemática; na resolução o corpo estudantil resolve o problema matemático; na interpretação de resultados e validação, dá-se a interpretação dos resultados e a validação da resposta obtida para o problema real; finalmente, na sala de aula, este corpo estudantil compartilha seus resultados, defendem seus procedimentos e respostas e produzem um relatório.

As linhas pontilhadas no ciclo são usadas para indicar o movimento de idas e vindas (o duplo sentido) que as ações dos modeladores podem requerer, inferindo à modelagem uma dinâmica ao invés de uma linearidade entre as diferentes fases. Ou seja, essas setas visam apontar para o refinamento iterativo do modelo e da solução em atividades de modelagem matemática de uma situação da realidade.

Figura 1

Fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.
(Almeida et al., 2021, p. 386)



As ações dos estudantes no decorrer de um ciclo de modelagem requerem demandas cognitivas para o enfrentamento da associação de uma situação da realidade e conceitos ou procedimentos matemáticos. Neste contexto, Stillman (1998) bem como Yildirim (2011), já indicam a emergência de uma atividade metacognitiva para permear as ações dos estudantes nas diferentes etapas da atividade de modelagem.

ESTRATÉGIAS METACOGNITIVAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A metacognição tem seus princípios estruturados por John Flavell, que em meados da década de 1970, a conceitua como *o conhecimento da própria cognição o que também pode ser dito como pensar sobre o próprio pensamento*. Psicólogos como John Dewey, Edmund Huey e Edward Thorndike, vêm se dedicando ao estudo da metacognição, inclusive em meios educacionais, colocando-a como referência para o estudo de como o estudante aprende. Em sintonia com a ideia de que a atividade metacognitiva inclui variáveis da pessoa, da tarefa e das estratégias usadas, conforme já apontamos em seção anterior, a metacognição vem sendo abordada a partir de dois componentes: o

conhecimento da cognição e a regulação da cognição (Schraw & Moshman, 1995).

O conhecimento da cognição ocorre quando se entende os processos-chave envolvidos na própria aprendizagem, ou seja, caracteriza-se pelo conhecimento e consciência dos processos cognitivos, podendo ser controlável, estável e, algumas vezes, falível e tardio. Evidencia-se a partir de três estratégias de conhecimento: declarativo, processual e condicional.

O conhecimento declarativo refere-se ao saber sobre *o que se sabe das coisas*. O conhecimento processual associa-se a *saber como* empregar procedimentos, estratégias ou ações. O conhecimento condicional implica em *saber por que* aplicar procedimentos, manifestar habilidades ou usar estratégias.

A regulação da cognição acontece quando se regula o próprio aprendizado, ou seja, está relacionada ao controle do processo da própria aprendizagem, à tomada de decisão sobre como aprender, à organização do processo e avaliação do desempenho, podendo desencadear três estratégias principais: planejamento, monitoramento e avaliação.

O planejamento implica na definição de metas, objetivos e passos a seguir, seleção de estratégias adequadas, realização de previsões, processamento de informações e alocação de recursos. O monitoramento refere-se à consciência da aprendizagem e do desempenho em determinadas tarefas, a identificação e a correção de erros. A avaliação relaciona-se a análise dos resultados e da aprendizagem, por meio da reflexão e reavaliação das ações e da verificação se os objetivos foram alcançados.

Estudos sobre metacognição em modelagem matemática, reconhecem a relevância de estratégias metacognitivas para o desenvolvimento bem sucedido de atividades de modelagem (Blum, 2011, Stillman, 2011, Vorhölter, 2019; 2020; 2021). Entretanto, é preciso atenção à natureza dessas estratégias considerando a possibilidade de que elas podem também emergir de forma colaborativa entre os estudantes de um mesmo grupo

Neste sentido, buscamos identificar manifestações de estratégias metacognição e classificá-las quanto à sua natureza individual ou colaborativa bem como observar desdobramentos que elas inferem para a atividade. Assim, evidenciamos o protagonismo e a autonomia de cada estudante bem como a resolução colaborativa dos problemas e a comunicação dialógica dos estudantes do grupo que suscita o uso de estratégias metacognitivas no processo de modelagem.

Entendemos como estratégia de natureza colaborativa aquela em que os processos de raciocínio são distribuídos entre os indivíduos, juntamente com suas ferramentas, artefatos e representações. Em outras palavras, a natureza colaborativa é aquela que fomenta a cognição por vários vieses (Hollan et al., 2000) uma vez que o estudante precisa pensar tanto sobre sua própria cognição, quanto sobre a de seus colegas, o que evidencia que a manifestação de metacognição pode ocorrer em diversos momentos da atividade. Lai (2011) aponta que há recomendações para o uso de estruturas de aprendizagem colaborativas ou cooperativas para estimular o desenvolvimento de estratégias metacognitivas.

Magiera e Zawojewski (2019) sugerem que a organização dos estudantes para o trabalho colaborativo, para a resolução de problemas complexos, como é o caso da modelagem matemática, que requerem discussão e trabalho em grupos, pode otimizar a observação da atividade metacognitiva nas práticas no contexto escolar. Ou seja, as situações abertas de investigação, as resoluções de problemas complexos nos quais o sujeito é levado a escolher entre várias alternativas e a antecipar as consequências destas escolhas e a condução do trabalho colaborativo, são exemplos de aspectos que podem estimular a metacognição em atividades de modelagem. Um mecanismo apontado por esses autores é o fato de que as interações entre os indivíduos que trabalham juntos requerem o uso de ferramentas verbais que possibilitem regular ou acompanhar o comportamento e o pensamento do outro.

Isso sugere, a partir de uma perspectiva vygotskiana, que, ao buscar monitorar e avaliar a atividade metacognitiva inicialmente direcionada ao pensamento alheio, em contextos sociais, o indivíduo torna-se propenso a internalizar esses comportamentos sociais e auto-monitorar, auto-avaliar e auto-ajustar seus próprios esforços de desempenho. De fato,

A consideração do funcionamento metacognitivo de indivíduos em contextos sociais é reconceituada como um produto de interações entre um indivíduo ou um grupo de indivíduos e um contexto circundante. Quando os objetivos e soluções são construídos coletivamente e o produto desejado é a cognição socialmente compartilhada, os membros do grupo regulam, não apenas o seu próprio pensamento, mas também o dos outros e sua atividade coletiva de resolução de problemas (Magiera & Zawojewski, 2019, p. 54).

Kim *et al.* (2013) e Vorhölter (2018) destacam que a atuação de todos os integrantes do grupo em direção a um objetivo consensual é relevante para

desencadear estratégias individuais. Assim, pode-se ponderar que a interação com o grupo e com o professor encoraja e aciona gatilhos que possibilitam detectar erros e adaptar pensamentos ou resolver obstáculos e progredir na resolução de um problema.

Ao encontro dessa compreensão, Iiskala *et al.* (2011) afirmam que em contextos de trabalhos em grupos colaborativos, a metacognição do grupo parece ter mais potencial para provocar ações do que a metacognição individual. Vorhölter (2019) compartilha desse entendimento, enquanto defende que na metacognição de natureza social o indivíduo deve tanto disponibilizar seus próprios pensamentos para os outros quanto discutir suas suposições, justificativas e conclusões.

METODOLOGIA

A investigação segue orientações de uma pesquisa qualitativa. Conforme sugere Garnica (1977), pesquisas de natureza qualitativa são frequentemente indicadas por constituírem um saudável exercício, particularmente no âmbito da Educação Matemática, para possibilitar o entendimento do fenômeno em estudo considerando suas nuances diversas.

A abordagem qualitativa para a pesquisa, segundo Bogdan e Biklen (1982), Lüdke e André (2013) e Godoy (1995b), envolve a obtenção de dados descritivos (pessoas, lugares, processos interativos), obtidos mediante contato direto do pesquisador com a situação objeto de estudo, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em compreender e retratar o fenômeno segundo a perspectiva dos participantes.

Consoante com essas especificidades, no presente artigo a pesquisa empírica² em que foram obtidos os dados ocorreu com estudantes do 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Trazemos para a discussão duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por um

² Os dados da presente pesquisa não fazem parte de projeto submetido ao comitê de ética. Os estudantes participantes da pesquisa assinaram termo de consentimento livre e esclarecido. A apresentação dos dados é de responsabilidade dos autores, ficando a revista *Acta Scientiae* eximida de quaisquer responsabilidades, de acordo com a Resolução nº510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil. A plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa é atribuição dos autores.

grupo de três estudantes (J_3 , K_3 e L_3). O grupo foi acompanhado pela professora da turma (Prof) e pela pesquisadora (Pesq). As atividades foram desenvolvidas em aulas síncronas, gravadas com o recurso do *Google Meet*, as quais foram transcritas e organizadas em episódios e, junto com o relatório da atividade e os questionários respondidos pelos estudantes, forneceram os dados em que se baseia nossa análise.

Em uma atividade a temática *Jogo de Poker* (AJ) foi sugerida aos estudantes pela pesquisadora. Para essa atividade foram utilizadas três aulas síncronas e atendimentos extraclasse solicitados pelo grupo. Esse tema surgiu a partir da situação em que um jovem brasileiro morador da cidade de Londrina (Luis Garla) participou da final do principal torneio mundial de Poker no ano de 2020, enfrentando o jogador grego Alexandros Theologis. O problema consiste em determinar, se a partir do par de cartas iniciais de cada jogador, é mais provável que Garla ou que Theologis vença a partida. A resolução apresentada pelo grupo está sintetizada na Figura 2.

Figura 2

Atividade de modelagem Jogo de Poker

Poker

Situação da realidade
Aos 28 anos, o londrinense Luis Eduardo Garla competiu pelo bracelet de ouro do WSOP (World Series of Poker), o principal circuito competitivo de poker do mundo. No dia 09 de agosto de 2020, ocorreu a final do Asia Championship, a partida que valia o bracelet de ouro foi disputada entre o brasileiro Luis Garla e o grego Alexandros Theologis. Na última jogada do torneio, Theologis saiu com $2\heartsuit 2\clubsuit$ e o brasileiro segurava $Q\heartsuit 7\heartsuit$.

Hipóteses

Hipótese 1 (H1): Cada uma das combinações de cartas é equiprovável.
Hipótese 2 (H2): Cada jogador tem mais chance de ganhar com as 3 mãos que tiverem maior chance de ocorrência a partir do par inicial recebido.

Simplificações

S1: As decisões devem ser tomadas excluindo-se a ação de blefe.
S2: Não serão considerados os valores das apostas.
S3: Ambos os jogadores permanecerão até o final, ou seja, não poderão dar *fold* antes do *river*.

Problema

A partir do par de cartas iniciais é mais provável que Garla ou que Theologis melhore a mão e vença a partida?

Matematização e resolução

Calculando a probabilidade de ganhar com as mãos com mais chance de acontecer (H3):

Um par	Trinca
Dois pares	Quadra
Flush	Full House
71,70%	19,93%
7,51%	8,00%
79,21%	27,93%

Chances de vitória:

Garla	Theologis
$P(G) = P(G) - P(T)$ $P(G) = 79,21 - 27,93$ $P(G) = 51,28\%$	$P(T) = P(T) + P(G)$ $P(T) = 27,93 + 20,79$ $P(T) = 48,72\%$

Validação do resultado

A mão vencedora foi a de Garla. Theologis também formou dois pares, que era a composição que ele tinha maior probabilidade, mas não venceu. O modelo é satisfatório para a situação estudada. O site que simula as chances de vitória apresentam um resultado próximo ao obtido para a mesma jogada.



Informação



Generalização do modelo

Depois de calcular a probabilidade de vitória de cada mão, para cada jogador, os valores foram inseridos no Curve Expert que gerou funções por partes, que permitem calcular a probabilidade de cada jogador ganhar com qualquer uma das mãos.

$$G(x) = \begin{cases} -0,018 + 292,55 \cdot x - 337,76 \cdot x^2 + 201,93 \cdot x^3 - 68,86 \cdot x^4 + 13,84 \cdot x^5 - 1,62 \cdot x^6 + 0,102 \cdot x^7 - 0,003 \cdot x^8, & \text{se } x = 1 \text{ ou } 7 \leq x \leq 9 \\ 6,41 \cdot 10^{-12} + 127,002 \cdot x - 44,88 \cdot x^2 - 4,47 \cdot x^3 + 5,99 \cdot x^4 - 1,245 \cdot x^5 + 0,082 \cdot x^6, & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = 6 \\ -1,07 \cdot 10^{-8} + 153,108 \cdot x - 100,49 \cdot x^2 + 38,49 \cdot x^3 - 9,414 \cdot x^4 + 1,418 \cdot x^5 - 0,116 \cdot x^6 + 0,004 \cdot x^7, & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \text{ ou } 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Na atividade de modelagem com o tema *Desvalorização de um veículo* (AV) o interesse pelo tema partiu do próprio grupo de estudantes e o problema definido é: *Como estimar o valor de um veículo depois de alguns anos de uso?* sendo o desenvolvimento da atividade realizado no decorrer de seis aulas síncronas e alguns encontros assíncronos. A Figura 3 apresenta uma síntese do desenvolvimento apresentado pelo grupo.

Figura 3

Atividade de modelagem Desvalorização de veículo

Desvalorização de veículo

Situação da realidade

Um veículo desvaloriza a partir de sua compra. Como estimar o valor do veículo depois de algum tempo de uso?
A tabela FIPE (Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas) para carro é a referência mais usada para esse valor.

Problema

Como estimar o valor de um veículo depois de alguns anos de uso?

Informação

O carro escolhido para análise será um Volkswagen Gol 1.0 modelo 2021 cujo valor, em junho de 2021, é de R\$ 63.600,00.

Simplificações

S1: Desconsideraremos outros fatores econômicos, com inflação, deflação etc. para a desvalorização do carro anualmente;

S2: Vamos considerar o aumento nos valores dos carros durante a pandemia.

Hipóteses

H1: Desvalorização após um ano da retirada do veículo da concessionária = 10% no valor total do veículo.

H2: Desvalorização nos anos consecuentes até o decimo anos de uso = 5% ao ano.

Matematização e resolução

Variáveis:
t: tempo em anos (variável independente)
V(t): Valor do veículo no ano t (variável dependente).

Considerar o tempo discreto e obter o valor do carro no final do ano t.

Processo recursivo a partir de V(0)=63600, conduz ao modelo matemático, e como o valor do carro, de modo geral, não varia durante os meses de um mesmo ano.

É mais adequado considerar a função maior inteiro em que [t] é o maior inteiro menor ou igual a t, dado pelo modelo:

Modelo Matemático

$$V(t) = \begin{cases} 57.240 & , \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 57.240 \cdot 0,95^{[t]-1} & , \text{se } 1 < t \leq 10 \end{cases}$$

Interpretação do resultado e validação

Como validar o modelo matemático uma vez que ele fornece resultados futuros sobre os quais não se tem nenhuma informação?
A estratégia que usamos é recorrer à tabela FIPE!

Vamos usar o mesmo modelo matemático para determinar o valor de um Gol ano 2009, que tem em 2020, dez anos de uso. Dados da tabela FIPE:

Mês de referência	Junho de 2009
Marca	VW - Volkswagen
Modelo	Gol 1.0 Mi Total Flex 8V
Ano Modelo	Zero KM a gasolina
Data da consulta	09/06/2021
Preço médio	R\$ 30.950,00

Usando o modelo obtém-se V(10) e comparam-se o valor obtido pela tabela Fioe em 2019.

$$V(t) = \begin{cases} 30950 & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 30950 \cdot 0,935^{t-1} & \text{se } 1 < t \leq 10 \end{cases}$$

V(10)=16903, ou seja, o modelo matemático indica que um Gol de 10 anos de uso custava em 2019 cerca de 16903,00. A tabela FIPE indica um valor de R\$17132,00. O valor é apenas cerca de 1,5% acima do que o obtido pelo modelo. O que leva a considerar o modelo matemático apropriado para as estimativas de preços de veículos usados.

Reconhecendo o modelo válido, e usando o software CurveExpert para ajustar o modelo usando os valores da tabela Fipe, obteve-se, portanto, que o Gol 1.0 modelo 2021 em 10 anos valerá R\$ 36.075,47 .

Para identificar estratégias metacognitivas dos estudantes usamos instrumento proposto em Castro (2022), visando capturar as peculiaridades das estratégias de natureza individual (I) e de natureza colaborativa (C) em

11

Acta Sci. (Canoas), 25(3), 1-25, May/June. 2023

atividades de modelagem, bem como identificar quais desdobramentos³ ocorrem para o desenvolvimento da atividade a partir dessas estratégias.

RESULTADOS

A análise empreendida sobre os dados indica elementos sinalizadores de estratégias metacognitivas e seus desdobramentos para as atividades de modelagem matemática. O processo analítico se dirige ao grupo em cada uma das duas atividades desenvolvidas.

As estratégias de natureza individual (I) são aquelas que se manifestam mediante falas ou ações de um estudante sem interferência explícita de outros, seja no momento que está *pensando alto*, seja quando expõe seus argumentos ou quando repassa os passos do grupo para elucidar os procedimentos assumidos e/ou executados. Já as estratégias de natureza colaborativa (C) se referem àquelas em que o grupo atua sobre a manifestação metacognitiva de um participante específico. De modo particular, as estratégias com essa natureza são decorrentes de fontes externas ao indivíduo, seja dos colegas do grupo ou do professor e soam, algumas vezes, como alertas para possíveis equívocos ou omissões relativas aos procedimentos requeridos pela atividade e, outras vezes, como *feedback* para o pensamento de outra pessoa, confirmando ou validando suas afirmações.

Na Tabela 1 são identificadas estratégias metacognitivas dos estudantes na atividade *Jogo de Poker* e na Tabela 2 aquelas relativas à atividade *Desvalorização de veículos*. Em ambas as figuras, as estratégias são caracterizadas em cada um dos elementos da metacognição (conhecimento da cognição e regulação da cognição) bem como são indicados desdobramentos dessas estratégias para o *fazer* dos estudantes na atividade de modelagem.

³ O termo *desdobramentos* refere-se aqui a possíveis consequências para o desenvolvimento da atividade de modelagem, decorrentes das estratégias metacognitivas dos estudantes.

Tabela 1

Desdobramentos das estratégias metacognitivas dos estudantes para a atividade Jogo de Poker

Estratégias de conhecimento da cognição	I	C	Desdobramento
Conhecimento declarativo		X	Promove a relação entre aspectos matemáticos e especificidades da situação da realidade.
Conhecimento processual	X		Fomenta a construção de um modelo matemático para cada jogador de Poker.
		X	Leva à análise do modelo construído.
Conhecimento condicional	X		Viabiliza a generalização do modelo para ambos jogadores
		X	Favorece a utilização de recursos tecnológicos (Excel, CurveExpert) para validação do modelo
	X		Leva à identificação de procedimentos matemáticos potencialmente úteis na construção dos modelos matemáticos
Planejamento		X	Viabiliza a generalização do modelo para ambos jogadores
		X	Favorece a utilização de recursos tecnológicos (Excel, CurveExpert) para validação do modelo.
	X		Confirma a identificação de procedimentos matemáticos potencialmente úteis na construção dos modelos matemáticos
Monitoramento		X	Favorece a construção de um modelo matemático para cada jogador de Poker
		X	Favorece a utilização de recursos tecnológicos (Excel, CurveExpert) para validação do modelo.
		X	Leva a maneiras de verificação do modelo matemático.
Avaliação		X	Viabiliza a generalização do modelo matemático

Das estratégias metacognitivas dos estudantes nas duas atividades, é possível caracterizar quatro grupos de desdobramentos para a atividade: um mesmo desdobramento decorrente de diferentes estratégias e sob naturezas distintas (individual e colaborativa); um mesmo desdobramento decorrente de estratégia apenas de natureza individual; um mesmo desdobramento decorrente de estratégia apenas de natureza colaborativa; diferentes desdobramentos

decorrentes de uma mesma estratégia de mesma natureza (individual ou colaborativa).

Tabela 2

Desdobramentos das estratégias metacognitivas dos estudantes na atividade da Desvalorização de veículos

Estratégias de conhecimento da cognição	I	C	Desdobramento
Conhecimento declarativo		X	Estimula os estudantes na escolha do tema
	X		Promove o planejamento dos encaminhamentos a serem usados
Conhecimento processual		X	Indica os procedimentos matemáticos.
		X	Indica os procedimentos matemáticos.
		X	Promove a definição de variáveis e do conteúdo matemático
Conhecimento condicional		X	Leva ao uso de técnicas e procedimentos matemáticos para obtenção da resposta
		X	Leva ao uso de recurso tecnológico (software)
	X		Conduz à verificação do modelo
		X	Orienta a coleta de informações sobre a situação da realidade
Planejamento		X	Oferece mecanismos para o planejamento da construção do modelo matemático
		X	Leva à simplificação nos dados coletados
	X		Leva à simplificação da situação
Monitoramento		X	Fornece elementos para a delimitação do problema
	X		Leva à construção do modelo matemático
	X		Orienta a formulação de hipóteses
	X		Leva à complementação da resolução, construindo um novo modelo matemático.
Avaliação		X	Favorece a verificação do modelo matemático e dos resultados
		X	Conduz identificação de meios para a validação da resposta obtida

1º) Um mesmo desdobramento decorrente de diferentes estratégias e sob naturezas distintas (individual e colaborativa).

Na atividade *Jogo de Poker* a construção de um modelo matemático para cada jogador parece decorrente da estratégia de conhecimento processual de natureza individual e de estratégia de monitoramento sob natureza colaborativa. Na Tabela 3 é possível observar como isso acontece na atividade.

Tabela 3

Estratégias metacognitivas de diferentes naturezas na mesma atividade

Excertos	Estratégia	Desdobramento
J ₃ : Eu também falei com o A ₁ [grupo 1], ele me falou que eles calcularam a probabilidade de cada mão usando o Excel. K ₃ : É essa probabilidade de vitória que estamos tentando encontrar usando o modelo? J ₃ : Sim, mas aí nós teremos que fazer cada mão e a probabilidade, calcular <i>na raça</i> mesmo, sem fórmula nenhuma e depois buscar uma fórmula que explique todas elas. Eu estou pensando se conseguimos usar o <i>Curve</i> .	Monitoramento (C): Expõe estratégias para construir o modelo, estabelecendo comparações com os que seus colegas ou o professor sugeriram.	Construção de um modelo matemático para cada jogador de Poker
K ₃ : Porque se garantirmos que tal jogador faz uma determinada jogada, temos que garantir que das 5 cartas da mesa, algumas sejam cartas específicas, e aí diminui ou anula a probabilidade do outro jogador fazer determinada jogada.	Conhecimento processual (I): Declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados e nos encaminhamentos definidos na matematização da situação	

Na atividade *Desvalorização de Veículo* a interação entre as estratégias de conhecimento declarativo (natureza individual) e de conhecimento

processual (natureza colaborativa) desencadeia a resolução matemática da situação, conforme ilustra o diálogo apresentado na Tabela 4.

Tabela 4

Estratégias metacognitivas de diferentes naturezas na mesma atividade

Excertos	Estratégia	Desdobramento
L ₃ : Para conseguir dados referentes ao tema pesquisamos em sites da internet artigos e ligamos para algumas concessionárias. Eles nos informaram o preço atual de alguns carros, mas eles disseram que não seria possível informar sobre a desvalorização, por fatores como pandemia, crises, entre outros.	Conhecimento declarativo (I): lembra, organiza e coleta informações acerca da situação da realidade,	
K ₃ : Lembrando que o valor do carro, de modo geral, não varia durante os meses de um mesmo ano, só de um ano para outro. J ₃ : Para os demais anos, segundo nossas informações e hipóteses, a desvalorização é de 5% ao ano, então consideramos mais adequado utilizar a função maior inteiro em que [t] é o maior inteiro menor ou igual a t. $V(t) = \begin{cases} 57.240 & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 57.240 \cdot 0,935^{[t-1]} & \text{se } 1 < t \leq 10 \end{cases}$	Conhecimento processual (C): declara que a construção do modelo matemático é baseada nos dados coletados e nas hipóteses formuladas	Resolução matemática da situação

2º) Um mesmo desdobramento decorrente de estratégias apenas de natureza individual

Diferentes estratégias, mas todas de natureza individual, foram mote para uma ação dos estudantes na atividade. Um exemplo dessa situação ocorreu na atividade *Jogo de Poker*. Neste caso a identificação de procedimentos matemáticos potencialmente úteis para a construção do modelo matemático parece ser um desdobramento das estratégias de monitoramento e de planejamento, ambas de natureza individual. A Tabela 5 apresenta o exemplo.

Tabela 5

Estratégias metacognitivas de natureza individual na atividade Jogo de Poker

Excertos	Estratégia	Desdobramento
<p>J₃: Calma aí, deixa eu pensar um pouco. Podemos fazer um exemplo com o Theologis fazendo uma trinca? Probabilidade de t(7) é igual a probabilidade de t(7). Se virar um “2” ele já fez uma trinca e isso não ajuda em nada o Garla, porque mesmo que as outras cartas virem a favor dele, ele ainda perde. Então, só se o Garla fizer outra trinca, porque a trinca do Theologis vai ser a menor do jogo. Então o modelo seria $P(T_n) = P(T_n) - P(G_n)$. Seguindo esse padrão podemos analisar para as outras jogadas para ver se não vai acontecer algo diferente.</p>	<p>Monitoramento (I): Apresenta exemplos análogos ou assume linguagem coloquial para explicar estratégias de resolução ou tornar suas escolhas mais adequadas para a atividade.</p> <p>Planejamento (I): Busca, em sua estrutura cognitiva, elementos para matematizar a situação.</p>	<p>Identificação de procedimentos matemáticos potencialmente úteis na construção do modelo matemático</p>

Tabela 6

Estratégias metacognitivas de natureza individual na atividade Desvalorização de Veículos

Excertos	Estratégia	Desdobramentos
<p>J₃: É, aí calculamos quanto custa hoje esse carro que era zero há 10 anos atrás! Aí que nós vimos que o modelo funciona.</p> <p>L₃: Fizemos essa construção encontrando uma regressão linear e por meio do gráfico de junho de 2009 à junho de 2019. A diferença que encontramos do nosso modelo para tabela Fipe foi de 1 919,20. Validando com a tabela Fipe com os valores de todos os anos analisados [2009-2019] analisamos que de um ano para o outro a desvalorização foi pequena (1%).</p>	<p>Conhecimento condicional (I): avalia se seus procedimentos conduzem a resultados adequados.</p> <p>Avaliação (I): Verifica se seus resultados finais correspondem às</p>	<p>Verificação do modelo matemático</p>

Porém mesmo com essas oscilações podemos chegar a um valor bem próximo do real. Então optamos por verificar utilizando o *Curve Expert* e encontramos uma exponencial e, calculando para 10 anos encontramos R\$16 872, 75. O fato de utilizar o *curve* foi de comparação.

condições do problema.

Outro exemplo de desdobramento decorrente de estratégias de natureza individual, neste caso estratégias de conhecimento condicional e de avaliação, é a verificação do modelo matemático, na atividade da *Desvalorização de Veículos* (Tabela 6).

3º) Um mesmo desdobramento decorrente de estratégia apenas de natureza colaborativa

Em alguns casos os desdobramentos parecem associados apenas a estratégias metacognitivas de natureza colaborativa, como por exemplo a “construção do modelo matemático” e a “Utilização de recursos tecnológicos (Excel, CurveExpert) para validação do modelo”. Na atividade *Jogo de Poker* esses desdobramentos decorrem das estratégias de conhecimento condicional e de monitoramento.

Tabela 7

Estratégias metacognitivas de natureza colaborativa na atividade Jogo de Poker

Excertos	Estratégia	Desdobramento
J ₃ : Eu também falei com o A1 [grupo 1], ele me falou que eles calcularam a probabilidade de cada mão usando o Excel. Depois eles plotaram os resultados como pontos no Curve, para obter as funções. Mas parece que também chegaram à intervalos que deu um número negativo, que acho que pode chegar em uma função por partes.	Monitoramento (C): construção do modelo estabelecendo comparações com os que seus colegas sugeriram.	Construção do modelo matemático

K₃: Para validar, nós podemos comparar os resultados com os do outro grupo. Lá tem os meninos que entendem bem do jogo e podem ver se é isso mesmo ou se deixamos passar alguma coisa.
 J₃: Podemos rodar a regressão no Curve Expert, e ver se o índice r, de quão próximo a curva está dos nossos pontos.

Conhecimento condicional (C):
 justifica adequadamente o uso de conceitos e métodos matemáticos.

Utilização de recursos tecnológicos (Excel, CurveExpert) para validação do modelo

4º) Diferentes desdobramentos decorrentes de uma mesma estratégia de mesma natureza (individual ou colaborativa)

Alguns desdobramentos parecem relacionados ao uso de uma mesma estratégia metacognitiva, sendo ela, entretanto, mobilizada em diferentes momentos do desenvolvimento da atividade. Um exemplo dessa situação se dá na atividade *Desvalorização de Veículos* em que a formulação de hipóteses e a construção de um segundo modelo matemático são dois desdobramentos decorrentes da estratégia de monitoramento sob natureza individual mobilizada por um estudante duas vezes (Tabela 8).

Tabela 8

Estratégia de monitoramento e seus diferentes desdobramentos para a atividade Desvalorização de Veículos

Excertos	Estratégia	Desdobramento
J3: Precisamos definir algumas hipóteses. Encontramos que no 1º ano o veículo sofre uma desvalorização de 10% do valor total. Então tomamos como hipótese que a desvalorização seria de 10% no primeiro ano.	Monitoramento (I): admite que é necessário formular hipóteses.	Formulação de hipóteses
J ₃ : Como não conseguimos validar o modelo para 2031 e, conversando com a professora e o grupo, tive a ideia de considerar um carro do ano	Monitoramento (I): expõe estratégia para construir um modelo.	Construção de um segundo modelo matemático

de 2009 do mesmo modelo 1.0 que usamos no modelo e analisar seu valor usando dados da tabela Fipe. Verificamos então que na tabela Fipe o valor do carro em 2009 teria sido R\$30 950. Aí então começamos a construir um novo modelo.

Os desdobramentos para o desenvolvimento da atividade identificados como decorrentes de estratégias metacognitivas, seja de natureza individual, seja de natureza colaborativa, podem ser agrupados relativamente a quatro finalidades na atividade: *à interação entre matemática e realidade; ao uso de conceitos matemáticos e à construção de modelos matemáticos; à validação de modelos e de resultados; aos movimentos de ida e vinda entre as fases de um ciclo de atividades de modelagem.*

Os desdobramentos referentes à *Interação entre matemática e realidade* relacionam-se às evidências de interlocução entre aspectos, informações e conhecimentos acerca da situação problemática e à tradução ou interpretação dessa situação em linguagem matemática. Os desdobramentos também indicam o trabalho matemático orientado com vistas a atender características da situação problema da realidade em foco e que para isso requereu complementação na coleta de dados, a definição de hipóteses e simplificações, por exemplo.

Relativamente ao *uso de conceitos matemáticos e construção de modelos matemáticos*, os desdobramentos evidenciados são a aplicação ou manipulação de conceitos matemáticos que focalizam a resolução matemática e construção do modelo matemático. Nesse grupo podemos citar, por exemplo, a realização de cálculos, o uso de recursos tecnológicos, a identificação de conteúdos matemáticos pertinentes.

No que diz respeito a desdobramentos referentes à *validação do modelo e dos resultados*, as estratégias metacognitivas levaram à verificação e à validação da resolução matemática, do modelo matemático, do resultado matemático ou da resposta para a situação problemática da realidade. Como exemplo de desdobramentos que se inserem nesse grupo está o uso de recursos da tecnologia, como é o caso dos softwares *Curve Expert* e *Excel* para a validação do modelo e da resposta.

Os movimentos de ida e vinda em atividades de modelagem decorrem de estratégias que proporcionaram perceber e fazer uso da flexibilidade nos procedimentos requeridos nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem, trazendo para a atividade uma dinâmica conforme já indica o ciclo da Figura 1. Por exemplo, a construção de um segundo modelo matemático, uma nova simplificação da situação, quando o aluno em fase de resolução precisa retomar o problema, quando na construção do modelo houve necessidade definir novas hipóteses ou quando a validação implicou à retomada de das informações utilizadas.

CONCLUSÕES

Nesta pesquisa dirigimos atenção às estratégias metacognitivas dos estudantes em atividades de modelagem matemática, considerando tanto sua natureza individual quanto colaborativa. Ao reconhecer que uma característica essencial de uma atividade de modelagem é que ela é realizada em grupo, o conjunto de estratégias metacognitivas dos estudantes, desde a interação com a situação até a validação da resposta obtida, não se limita à natureza individual.

As estratégias de natureza individual, de modo geral, se mostram nos monólogos ou nas falas dos estudantes, em argumentações que eles parecem construir *sozinhos* sem interação com outros estudantes. Já estratégias de natureza colaborativa advém das interações com colegas ou com a professora que, neste caso, atuam como fontes que encorajam os estudantes a acompanhar, verificar ou desenvolver seu próprio processo de pensamento e de compreensão, ao passo que podem, ainda, leva-los a detectar e reparar equívocos.

Relativamente aos desdobramentos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática decorrentes de estratégias metacognitivas ativadas pelos estudantes, é possível concluir que elas impulsionam os estudantes a modos de agir na atividade. Particularmente, as ações dos estudantes e essas estratégias parecem se conectar de diferentes maneiras: um mesmo desdobramento decorre de diferentes estratégias e que têm naturezas distintas (individual ou colaborativa); um mesmo desdobramento decorre de estratégia apenas de natureza individual; um mesmo desdobramento decorre de estratégia apenas de natureza colaborativa; diferentes desdobramentos decorrem de uma mesma estratégia.

Das estratégias metacognitivas utilizadas pelos estudantes, identificamos desdobramentos para as atividades de modelagem matemática relativos a diferentes aspectos de uma atividade de modelagem: a interação

entre matemática e realidade; o uso de conceitos matemáticos e a construção de um modelo; a validação de modelos e de resultados; a definição de movimentos de ida e vinda característicos das ações indicadas em um ciclo de modelagem matemática.

A caracterização desses desdobramentos bem como a identificação da natureza das estratégias metacognitivas a eles vinculada é um aspecto pouco explorado em pesquisas anteriores e que pode orientar a condução de atividades de modelagem na sala de aula, considerando o potencial que a ação dessas estratégias pode ter sobre o desempenho dos estudantes visando o seu sucesso em atividades de modelagem.

Assim, o que a pesquisa conclui é que, embora o principal agente de metacognição seja o indivíduo, em atividades de modelagem, as estratégias metacognitivas não se limitam à natureza individual, havendo também evidências de metacognição colaborativa no grupo. Nesse sentido, resultados da presente pesquisa vem complementar o que apontam Vorhölter (2019) e Vorhölter e Krüger (2021) relativamente à caracterização de uma metacognição colaborativa nos grupos envolvidos em uma atividade de modelagem, especificando a natureza das estratégias bem como sua ação sobre a atividade de modelagem que está sendo desenvolvida.

O que se conclui é que alguns desdobramentos decorrem mais de uma estratégia metacognitiva do que de outra. Isso sinaliza que não é uma estratégia isolada, mas um conjunto delas que viabiliza as ações em atividades de modelagem matemática.

Explorar semelhanças e dissemelhanças entre as atividades desenvolvidas por diferentes grupos de estudantes, de níveis de escolaridade distintos, bem como ampliar as discussões sobre como um mesmo grupo se comporta metacognitivamente em diferentes atividades e, também, como esse tipo de comportamento se dá individual ou colaborativamente, pode ser foco de pesquisas futuras.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com fomento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) para a realização de doutoramento da autora EMVC.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Em parceria, as duas autoras se apropriaram dos fundamentos teóricos do artigo, realizaram a coleta de dados e sua análise. O texto também foi redigido de forma conjunta e colaborativa.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, LMMA, mediante solicitação adequadamente justificada.

REFERÊNCIAS

- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modelling activities. *ZDM*, 50(1), 19-30.
- Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *VIDYA*, 42(2), 121-145.
- Almeida, L. M. W., Castro, É. M. V., & Silva, M. H. S. (2021). Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 14(2), 383-406.
- Almeida, L. M. W., Castro, É. M. V., & Gomes, J. C. S. (2021). Estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática. In: *Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)*, Uberlândia, MG, (p. 2029-2043).
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In: Kaiser, Gabriele, Blum, Werner, Ferri, Rita Borromeo, e Stillman, Gloria (Eds), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (pp. 15-30). Springer.
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.
- Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1997). *Qualitative research for education*. Allyn & Bacon.
- Carrejo, D. J., & Marshall, J. (2007). What is mathematical modelling? Exploring prospective teachers' use of experiments to connect

- mathematics to the study of motion. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 45-76.
- Castro, E. M. (2022) Meacognição em atividades de modelagem matemática. *Tese de doutorado*. Universidade Estadual de Londrina.
- Castro, E. M. & Almeida, L. M. W (2023) Estratégias metacognitivas de um grupo de estudantes brasileiros em atividades de modelagem matemática. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 23(1), 1-26. <https://doi.org/10.15517/aie.v23i1.51512>.
- Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F. Weinert & R. Kluwe (Ed.), *Metacognition, motivation, and understanding* (p. 21-29). Lawrence Erlbaum.
- Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In: Lauren Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–236). Lawrence Erlbaum.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 143-162.
- Garnica, A. V. M. (1997). Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. *Interface-comunicação, saúde, educação*, 1, 109-122.
- Garnica, A. V. M. (2001). Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. *Mimesis, Bauru*, 22(1), 35-48.
- Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de empresas*, 35, 20-29.
- Iiskala, T., Vauras, M., Lehtinen, E., & Salonen, P. (2011). Socially shared metacognition of dyads of pupils in collaborative mathematical problem-solving processes. *Learning and instruction*, 21(3), 379-393.
- Jou, G. I. de & Sperb T.M. (2006). A metacognição como reguladora da aprendizagem. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 19(2), 177-185.
- Kim, Y. R., Park, M. S., Moore, T. J., & Varma, S. (2013). Multiple levels of metacognition and their elicitation through complex problem-solving tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 377-396.

- Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. EPU.
- Magiera, M. T., & Zawojewski, J. S. (2019). Principles for Designing Research Settings to Study Spontaneous Metacognitive Activity. In Chamberlain, Samuel e Sriraman, Bharath (Eds.). *Affect in Mathematical Modeling* (pp. 53-66). Springer.
- Stillman, G. (2004). Strategies employed by upper secondary students for overcoming or exploiting conditions affecting accessibility of applications tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 16(1), 41-71.
- Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In: Kaiser, Gabriele, Blum, Werner, Ferri, Rita Borromeo, e Stillman, Gloria (Eds). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, (ICTMA 14) (pp. 165-180). Springer.
- Vertuan, R. E., & Almeida, L. M. W. D. (2016). Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(56), 1070-1091.
- Vygotsky L. S. (1997). *Educational Psychology*. St. Lucie.
- Vorhölter, K. (2017). Measuring metacognitive modelling competencies. In In: Stillman, Gloria, Blum, Werner e Kaiser, Gabriele (Eds.). *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 175-185). Springer.
- Vorhölter, K. (2018). Conceptualization and measuring of metacognitive modelling competencies: Empirical verification of theoretical assumptions. *ZDM*, 50(1), 343-354.
- Vorhölter, K. (2019). Enhancing metacognitive group strategies for modelling. *ZDM*, 51(4), 703-716.
- Vorhölter, K., & Krüger, A. (2021). Metacognitive strategies in modeling: Comparison of the results achieved with the help of different methods. *Quadrante*, 30(1), 178-197.
- Yildirim, T. P. (2011). *Understanding the Modeling Skill Shift in Engineering: The Impace of Self-Efficacy, Epistemology, and Metacognition* (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh). <http://ezproxy.um.edu.my:2048/login?url=http://search.proquest.com/docview/858073953?accountid=28930>