ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7628

Trigonometría vs integración trigonométrica

Enrique Mateus-Nieves[a]

[a] Universidad Externado de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia

Recibido para publicación 6 mar. 2023. Aceptado tras revisión 31 mar. 2023
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Relacionar y aplicar contenidos trigonométricos en la solución de situaciones problema que involucran integración trigonométrica no es tarea sencilla para estudiantes universitarios. **Objetivo**: reconocer la trigonometría como una herramienta matemática con múltiples aplicaciones en su contexto profesional. **Diseño**: exploratorio de tipo descriptivo, analítico-interpretativo. **Entorno y participantes**: estudiantes universitarios de ingeniería. **Recogida y análisis de datos: se** programaron dos fases: de aprestamiento y de formalización. Las clases fueron videograbadas, se trascribieron en unidades de análisis para luego triangular la información recopilada. **Resultados**: Rescatar la importancia de la trigonometría como herramienta matemática que permite modelizar diversas situaciones problema. **Conclusiones:** se evidenció desarrollo de competencias matemáticas en los jóvenes, manifiestas en progreso de habilidades propias del pensamiento matemático avanzado, tales como: abstraer, generalizar, sintetizar, definir y demostrar; manifiestas al enfrentar diversas situaciones propuestas, donde comprendieron que, al usar integración trigonométrica, también se usan diferentes elementos trigonométricos, que permiten obtener expresiones más sencillas y que facilitan la integración.

Palabras clave: Integración trigonométrica, Pensamiento Matemático Avanzado, Trigonometría, Estudiantes de ingeniería.

Trigonometry vs. Trigonometric Integration

ABSTRACT

Background: Relating and applying trigonometric contents in the solution of problem situations involving trigonometric integration is not an easy task for university students. In the selected sample, an absence of trigonometric meanings was observed, which does not allow them to make a connection with the environment and with problem situations typical of their professional training. **Objective**: to recognize trigonometry as a mathematical tool with multiple applications in their professional context. **Design**: exploratory, descriptive, analytical-interpretative type. **Setting and**

Autor correspondiente: Enrique Mateus-Nieves. jeman124@gmail.com

participants: university engineering students. **Data collection and analysis**: two phases were programmed: preparation and formalization. The classes were videotaped and transcribed into units of analysis in order to triangulate the information collected. **Results**: The importance of trigonometry as a mathematical tool that allows modeling different problem situations was highlighted.**Conclusions**: The development of mathematical competences in young people was evidenced, manifested in the progress of advanced mathematical thinking skills, such as: abstracting, generalizing, synthesizing, defining and demonstrating; manifested when facing different proposed situations, where they understood that, when using trigonometric integration, different trigonometric elements are also used, which allow obtaining simpler expressions and facilitate integration.

Keywords: Trigonometric Integration, Advanced Mathematical Thinking, Trigonometry, Engineering Students.

Trigonometria vs integração trigonométrica

RESUMO

Contexto: Relacionar e aplicar conteúdos trigonométricos na solução de situações problemáticas envolvendo integração trigonométrica não é uma tarefa fácil para estudantes universitários. Na amostra selecionada, foi observada uma ausência de significados trigonométricos, o que não lhes permite fazer uma conexão com o ambiente e com situações problemáticas específicas de sua formação profissional**.** **Objetivo**: reconhecer a trigonometria como uma ferramenta matemática com múltiplas aplicações em seu contexto profissional. **Projeto:** exploratório, descritivo, analítico-interpretativo, tipo descritivo. **Ambiente e participantes**: estudantes universitários de engenharia. **Coleta e análise de dados**: foram programadas duas fases: preparação e formalização. As palestras foram gravadas em vídeo, transcritas em unidades de análise e depois trianguladas. **Resultados:** Foi destacada a importância da trigonometria como ferramenta matemática para modelagem de diferentes situações problemáticas. **Conclusões:** O desenvolvimento das competências matemáticas nos jovens foi evidenciado no progresso das habilidades de pensamento matemático avançado, tais como: abstração, generalização, sintetização, definição e demonstração; manifestado ao enfrentar várias situações propostas, onde entenderam que, ao utilizar a integração trigonométrica, também são utilizados diferentes elementos trigonométricos, que permitem obter expressões mais simples e que facilitam a integração.

Palavras-chave: Integração trigonométrica, Pensamento matemático avançado, Trigonometria, estudantes de engenharia.

INTRODUCCION

La investigación se adelantó con cinco grupos de estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura Cálculo 2, que involucra la enseñanza del cálculo integral y algunos elementos del cálculo vectorial. Inicialmente, se realizó a esta población, una entrevista semiestructurada con el objeto de conocer qué sabían sobre trigonometría y si ellos encuentran algún tipo de relación entre esta rama de las matemáticas y su formación profesional. Se encontró que la mayoría pensaba que existía muy poca o ninguna relación; posteriormente, en el curso de la investigación, se observó en la muestra seleccionada, escasa capacidad para relacionar elementos propios de la trigonometría (razones, funciones, identidades trigonométricas), con situaciones problémicas propias de su formación profesional; lo que permite inferir presencia de dificultades en los estudiantes en la transición de la trigonometría a la integración trigonométrica. Les cuesta visualizar algún tipo de modelización que, por ejemplo, use el teorema de Pitágoras partiendo de la construcción de un triángulo rectángulo, donde la expresión original defina alguna función trigonométrica de uno de sus ángulos agudos; para de esta forma poder encontrar algún tipo de solución asertiva a las situaciones problema propuestas. Otra dificultad identificada está en comprender que muchas integrales se pueden calcular manipulando el integrando a través de identidades trigonométricas, esto es, cuando las integrales presentan potencias de funciones trigonométricas es necesario utilizar diferentes identidades trigonométricas que permiten obtener una nueva expresión, también trigonométrica, más sencilla que facilita la integración. La investigación permitió identificar que algunos estudiantes reconocen que las identidades más empleadas son las pitagóricas y las de suma y resta de ángulos a pesar que les cuesta usarlas en contexto.

Teóricamente se usaron dos referentes: Trigonometría y Pensamiento Matemático Avanzado enfocado en integración trigonométrica; considerando que es en este tipo de pensamiento donde se espera construir en el estudiante un significado matemático global de diversos conceptos entrelazados que permiten desarrollo de competencias matemáticas, enfocadas en los procesos de abstraer, analizar, categorizar, generalizar, sintetizar, definir y demostrar. De ahí la necesidad de distinguir entre *conocimiento matemático usado y* la *aplicación de conceptos matemáticos* al buscar solución a una determinada situación propuesta.

Los resultados encontrados muestran que a los estudiantes se les dificulta resolver problemas que combinan herramientas trigonométricas (razón, función, serie trigonométrica y particularmente integración trigonométrica), con situaciones propias de su área de especialidad. En el caso de la integración trigonométrica se observaron dificultades para identificar y solucionar situaciones en las que se involucran: 1) productos y potencias de $sen\, x$ y $\cos x$; 2) productos y potencias de $\tan x$ y $\sec x$; 3) usar fórmulas de reducción para resolver integrales trigonométricas. De ahí la importancia de estudiar los usos que se da a la Trigonometría, de manera que permitan al estudiante, significar esta rama de las matemáticas durante su formación universitaria, en donde pesa la formalización de conceptos y elementos propios del Pensamiento Matemático Avanzado.

REFERENTES TEÓRICOS

Este trabajo está sustentado teóricamente en dos referentes: elementos de Trigonometría y Pensamiento Matemático Avanzado particularmente, integración trigonométrica.

Trigonometría. Rama de las matemáticas que estudia la relación entre lados y ángulos de triángulos. Las funciones asociadas a dichos ángulos son denominadas *funciones trigonométricas*. Entre las aplicaciones está el estudio de las esferas en la geometría del espacio y la ingeniería. Geométricamente, en el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa y cualquiera de los catetos se obtienen de la siguiente manera: $hipotenusa = \sqrt{(cateto_1)^2 + (cateto_2)^2}$ equivalente a $cateto = \sqrt{(hipotenusa)^2 - (cateto)^2}$. La representación matemática y geométrica del teorema se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Representación del teorema de Pitágoras.

Una razón trigonométrica es el cociente entre dos magnitudes del triángulo (catetos o entre la hipotenusa y alguno de los catetos), cuyo resultado es un valor numérico. Una función trigonométrica es una aplicación

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real le hace corresponder otro número real. Las funciones trigonométricas permiten extender la definición de las razones trigonométricas a todos los números reales y complejos. Ahora bien, si consideramos que la variable este siempre en el numerador de la fracción obtenida como función, se determinan tres funciones trigonométricas: $sen\,\theta, tan\,\theta$ y $sec\,\theta$, mostradas en la tabla 1.

Tabla 1

Algunas funciones angulares

Notación	Definición
$\boldsymbol{Sen\,\theta}$	Razón entre el cateto ($cateto_2$) y la hipotenusa. $Sen\,\theta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{C_2}{h}$
$\boldsymbol{Tan\,\theta}$	Razón entre el cateto opuesto (C_2) y el cateto adyacente (C1). $Tan\,\theta = \frac{\boldsymbol{Cateto\ Opuesto}}{\boldsymbol{Cateto\ adyacente}} = \frac{\boldsymbol{C_2}}{\boldsymbol{C_1}}$
$\boldsymbol{Sec\,\theta}$	Razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente (C1). $Sec\,\theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{h}{C_1}$. También conocida como recíproca del coseno. Esto es: $Sec\,\theta \cdot Cos\,\theta = 1$.

Por otro lado, una *identidad trigonométrica* es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones (y las operaciones aritméticas involucradas). Se destacan las identidades pitagóricas y las identidades para suma y resta de ángulos mostradas en la Figura 2.

Figura 2

Identidades trigonométricas básicas, (elaboración propia).

Pythagorean identities	**Identities for angle addition and subtraction**
$sin^2x + cos^2x = 1$	$sin(x \pm y) = sinx \cdot cosy \pm siny \cdot \cos x$
$1 + tan^2x = sec^2x$	$cos(x \pm y) = cosx \cdot \cos y \mp \sin x \cdot sin\,y$
$1 + ctan^2x = Csc^2x$	

Pensamiento Matemático Avanzado

La literatura en Educación Matemática distingue el *Pensamiento Matemático Avanzado* (PMA) como una línea de investigación dedicada exclusivamente a ciertos conceptos matemáticos específicos de las matemáticas universitarias o “avanzadas”. Vinner y Herschkowitz (1980), Valdivé y Garbin (2008) han centrado su atención de investigación en las imágenes mentales que los estudiantes evocan y que entran en conflicto con las definiciones matemáticas que son institucionalizadas[1].

Dentro del PMA inicialmente, se describe el esquema conceptual que tiene el alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática (Garbin, 2005, Valdivé & Garbin, 2013). En Mateus-Nieves y Rojas (2020, p 69) se reconoce que el PMA es propio de la formación universitaria porque “(...) la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar y formalizar. Entre los procesos cognitivos de componente psicológica, además de abstraer, se destacan los de representar conceptualizar, inducir y visualizar”. También manifiestan que, aunque, “(...)la abstracción no es una característica de las matemáticas superiores, como tampoco lo son analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, es evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores (...)” (p. 69). Por ello, en este trabajo se distingue entre *conocimiento matemático usado y* la *aplicación de conceptos matemáticos;* entendiendo por “*uso*” en términos de Cabañas (2011, p. 98), “las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico”. Tanto *uso* como *aplicación* pueden generar significados respecto a las matemáticas empleadas, pero la diferencia entre estos es que, en el *uso*, está la funcionalidad de las matemáticas, es decir, que esta pueda ser empleada o adoptada para resolver problemas en diferentes contextos, donde se privilegian los significados generados y su comprensión. En cambio, la *aplicación*, generalmente se limita a los significados promovidos por el discurso matemático escolar empleado que, por lo observado en diversas sesiones de clase, regularmente son de tipo memorístico al momento de resolver problemas, donde la mayor parte de las

[1] En este trabajo se entiende por *matemáticas institucionalizadas* la propuesta teórica del Enfoque Onto Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2002), donde se propone el contructo: *significado intitucional* como el contenido asignado a una expresion que es reconocida por la comunidad matematica como cierta y válida.

veces, quedan sin comprensión por parte del estudiante, y sin que sea posible reconocer el tipo de matemáticas empleadas.

En Mateus-Nieves & Font (2021) se ubica el cálculo integral dentro del PMA y se describen tres configuraciones epistémicas globales que se considera necesario comprender para diseñar clases temáticas, con mayor claridad didáctica para los estudiantes. En Mateus-Nieves & Hernández (2020) se hace un estudio sobre el significado global de la integral que alcanzan tres grupos de estudiantes universitarios cuando se articula su complejidad epistémica al momento de enseñarla. Mateus-Nieves (2021) hace un estudio sobre la Epistemología de la integral como elemento propio del PMA. Mateus-Nieves y Moreno (2021) enfocados en el PMA, diseñan y aplican una secuencia didáctica con actividades para analizar aspectos variacionales del concepto de función y cómo estos son interpretados por dos grupos de estudiantes que toman la asignatura precálculo; muestran que este estudio permitió a los alumnos construir acercamientos significativos para la comprensión y uso de funciones como modelos de situaciones de cambio y procesos de variación; lo que permitió evidenciar en los jóvenes construcción y acercamiento significativo para la comprensión y el uso de funciones como modelos de situaciones de cambio.

Por otro lado, dentro del PMA una integral se llama *trigonométrica* cuando el integrando se compone de *funciones trigonométricas y constantes*. En este trabajo se formalizó con la muestra seleccionada, que para la resolución de situaciones problema tanto, en contexto como ejercicios específicos, se deben usar los métodos y teoremas de integración considerando las sugerencias descritas en la tabla 2.

Tabla 2

Sugerencias para calcular integrales trigonométricas

1. Usar una identidad trigonométrica y simplificarla, cuando están presentes funciones trigonométricas. En lo posible ayudarse de un gráfico que modele la situación.
2. Buscar eliminar una raíz cuadrada. Regularmente se suele hacer después de completar un cuadrado o una sustitución trigonométrica.
3. Reducir una fracción incorrecta[2].
4. Separar los elementos del numerador entre el denominador de la fracción.
5. Multiplicar por una forma unitaria $\frac{\boldsymbol{g(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}$ que al ser multiplicada por la $\boldsymbol{f(x)}$

[2] Esto es, reconocer en una fracción impropia su parte entera.

integradora, permite modificar adecuadamente $\frac{[f(x)g(x]}{g(x)}$.

6. Intentar sustituir $\boldsymbol{f(x)}$ por $\frac{1}{f(x)}$.
7. Tener a mano una tabla de identidades trigonométricas e ir sustituyendo adecuadamente hasta llegar a las "fórmulas básicas".

METODOLOGIA

Se trató de un trabajo de corte exploratorio, de tipo descriptivo, analítico-interpretativo. De naturaleza exploratoria porque busca facilitar la comprensión del tema que se plantea; de tipo descriptivo, analítico-interpretativo porque busca especificar propiedades y características que muestran los estudiantes frente a la integración trigonométrica. Población: 150 estudiantes que cursan diversas carreras de ingeniería en una institución universitaria no estatal. Para seleccionar la muestra se organizaron dos actividades: una prueba escrita relacionada con resolución de triángulos rectángulos, compuesta de 5 situaciones problema y 5 ejercicios específicos. Una entrevista semiestructurada con el objeto de identificar qué conocimiento matemático y qué grado de apropiación de conceptos trigonométricos poseían los estudiantes y si veían algún tipo de relación con su formación profesional. Fueron sistematizados y triangulados los resultados conforme a los criterios acordados (ver tabla 3 sección de resultados).

Las sesiones de clase fueron grabadas y trascritas en unidades de análisis. Se llevó un diario de campo donde fueron registrados datos que el investigador observó y que se consideraron relevantes para el desarrollo de la investigación. Las unidades de análisis se triangularon con los datos del diario de campo, información que permitió hacer seguimiento detallado al desempeño de los estudiantes y obtener resultados y conclusiones.

La investigación se desarrolló en dos fases. Primera: *de aprestamiento* donde fue necesario repasar y reconstruir conceptos previos que se suponía ya manejaban los estudiantes, pero que al entrar en contacto con ellos se observaron falencias. Tal fue el caso de las identidades trigonométricas mostradas en la Figura 2, o la construcción de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas expuestas en la sección de resultados. Segunda fase: *de formalización*, se realizaron modelizaciones matemáticas a doce situaciones problema propias de la formación de ingenieros; en algunas de ellas fue necesario hacer bosquejo de superficies convencionales y no convencionales usando definiciones matemáticas propias del cálculo vectorial, específicamente en realizar parametrización de superficies basados en las coordenadas esféricas. Para ello se usó GeoGebra online como elemento de apoyo para visualizar, analizar, categorizar, generalizar y sintetizar las situaciones propuestas con el objeto que los estudiantes llegaran a definir cuáles funciones, identidades y trasformaciones se debían utilizar para enfrentar una posible solución asertiva. Por cuestión de espacio en este trabajo se presentan tres de doce situaciones propuestas porque son consideradas las que más elementos didácticos ofrecen. Cabe resaltar que por cuestión de espacio no es posible mostrar al detalle en este manuscrito, dos situaciones relacionadas con parametrización de superficies usando coordenadas esféricas.

Las secciones Resultados y Conclusiones están centrados en dos ejes que fueron abordados desde tres situaciones problema que necesitaron *modelización matemática* con el objeto de identificar el *uso de integración trigonométrica* para su solución, como una transición emergente de conceptos trigonométricos. La primera porque los estudiantes de ingeniería modelan para diseñar y/o analizar el trabajo de diferentes situaciones propias de su quehacer profesional. La segunda, para identificar resultados de investigación que aporten en didáctica, particularmente del PMA; que ayuden a entender, cómo se articula este conocimiento matemático propio de la educación superior con la formación de ingenieros.

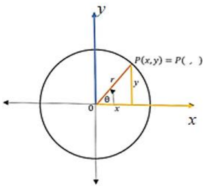
RESULTADOS Y ANALISIS

En la tabla 3 se muestran algunos criterios utilizados para seleccionar la muestra luego de sistematizar resultados de la prueba escrita y triangularlos con la entrevista semiestructurada.

Tabla 3

Criterios para selección de la muestra

Conocimiento matemático usado	Aplicación de conceptos matemáticos
Reconoce las razones trigonométricas	Emplea las razones trigonométricas para solucionar situaciones problémicas.
Identifica las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.	Obtiene el valor de las razones trigonométricas para un ángulo dado.
Reconoce las funciones trigonométricas.	Emplea correctamente las razones trigonométricas para solucionar un triángulo rectángulo.
	Usa correctamente las funciones trigonométricas para solucionar situaciones

	problémicas.
Identifica las coordenadas polares del punto P, al considerar la siguiente gráfica: Nota**:** Partiendo del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ y la recta *r* se obtiene el punto *P* cuyas coordenadas cartesianas son *(x, y)*.  	Identifica el eje *x* del plano como el eje polar.
	Reconoce correctamente cuáles son las coordenadas polares del punto P.
	Identifica cuáles son las coordenadas polares del punto P. Escribe correctamente las coordenadas polares del punto P.
Identifica las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico.	Emplea correctamente las funciones trigonométricas para solucionar un triángulo rectángulo.
	Traza correctamente sobre el círculo unitario las funciones angulares.
	Reconoce el signo de las funciones en los cuadrantes.
Obtiene las identidades pitagóricas a partir de razonar sobre el círculo trigonométrico.	Utiliza correctamente las identidades pitagóricas.
	Tiene capacidad algebraica para despejar correctamente las diferentes funciones trigonométricas a partir de las identidades pitagóricas.
Reconoce las Identidades para ángulos múltiples.	Conoce y usa correctamente las identidades para ángulos dobles.
	Conoce y usa correctamente las identidades para ángulos triples.
	Conoce y usa correctamente las identidades para ángulos medios.
Reconoce las funciones trigonométricas inversas.	Utiliza correctamente las funciones trigonométricas inversas.

Los resultados obtenidos de la tabla 3 permitieron ubicar 50 estudiantes cuyo desempeño fue categorizado como medio-bajo. Fueron organizados en dos grupos y nomenclados como E1, E2, …, hasta E50 con el objeto de hacer un seguimiento exhaustivo al desempeño individual. Con esta muestra se dio inicio a la primera fase denominada *de aprestamiento*. En esta fase fue necesario reconstruir conceptos previos que se suponía ya conocían. Se mostró a los estudiantes que, mediante procesos algebraicos sencillos, de los registros de la tabla 1 y la Figura 2, se encuentran otras identidades, esta vez para *ángulos dobles*. Por cuestión de espacio aquí solo se muestran los relativos a las funciones $sen\ x$ o $\cos x$ (ver Figura 3), obviando presentar los procesos algebraicos por considerarse básicos.

Figura 3

Construcciones derivadas

Identities for double angles	Different expressions for the functions $sin\ x$ and $cos\ x$
	$cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ or else it is, $sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$	$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$
$\cos(2x) = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$	$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$
	$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$

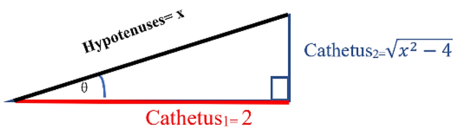
La transición de estas igualdades a partir de las identidades para la suma y resta no fue un trabajo sencillo para los estudiantes a pesar que se suponía ya eran temas estudiados en cursos anteriores. Lo que permite inferir escaso manejo algebraico (conocimiento matemático), dado el carácter instrumental de estos contenidos. Se infiere que los significados promovidos entre los estudiantes son limitados dado que no les permite relacionar las formas en que es posible emplear determinada noción en un contexto específico, lo que limita la aplicación de conceptos matemáticos. Algunos estudiantes pensaban que eran construcciones independientes unas de las otras, E21 manifestó: "*cuando yo las aprendí, el profesor las enseñó como axiomas, nunca hizo construcciones como las que hoy vemos en esta clase, que me permiten entenderlas como emergentes de procesos algebraicos*" [trascripción unidad de análisis 96], lo que permite inferir que los estudiantes saben de la existencia de un conocimiento matemático, pero les cuesta *aplicar dichos conceptos*, debido a que los procesos de enseñanza poco planeados conducen a los estudiantes a presentar obstáculos epistemológicos, que en términos de Barrantes (2006) citando a Brousseau, desde un punto de vista didáctico, la importancia de considerar los elementos que aparecen en juego en la relación entre enseñanza y aprendizaje. Para Brousseau "el error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado" (Barrantes, 2006, p. 3); esto es, en el estudio de los obstáculos epistemológicos se busca determinar las causas que conducen a errores, puesto que las equivocaciones que cometen los estudiantes no se dan solo por la falta de conocimientos previos que éstos tengan para analizar una situación determinada. En ocasiones son los mismos conocimientos previos quienes dificultan el acceso a nuevos conocimientos debido a que en algunos casos estos están tan arraigados, que ofrecen resistencia en la mente del estudiante para que sean replanteados o cambiados por completo.

Para la fase 2 *de formalización*, se institucionalizó que la integración por sustitución trigonométrica sirve para integrar funciones que contienen expresiones algebraicas que pueden ser trasformadas en las formas $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$. Este método se basa en el uso de triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras e identidades trigonométricas con el propósito de eliminar la raíz cuadrada. A los ejercicios y situaciones propuestas se les realizó modelizaciones matemáticas con el objeto que los estudiantes visualizaran y relacionaran la situación propuesta con expresiones matemáticas ya conocidas: razones, funciones trigonométricas e integrales. Se encontró que, al intentar solucionarlas, identifican que es necesaria la integración, pero les cuesta identificar y utilizar el/los métodos(s) necesario(s) para solucionar este tipo de integrales, temas también estudiados en el curso; lo que nuevamente permite inferir dificultades para relacionar el conocimiento matemático aprendido con la aplicación de estos conceptos a situaciones particulares.

Como ejemplo se muestra el caso de la integral $\int \frac{1}{x^2-4}\, dx$ donde era necesario aplicar el método por sustitución trigonométrica. Se precisó conducir a los estudiantes a reconocer que esta situación puede ser relacionada con el Teorema de Pitágoras, en el que es posible estructurar un triángulo rectángulo donde la expresión original defina alguna función trigonométrica de uno de sus ángulos agudos. Para la modelización seguida se creó la Figura 4, un triángulo rectángulo, con el objeto de identificar cuál es la función trigonométrica correspondiente que permita interpretar la expresión $x^2 - 4$, de tal manera que la raíz del minuendo fuera la hipotenusa (*x*) y la raíz del sustraendo uno de los catetos (que para este caso es 2).

Figura 4

Interpretación sobre un triángulo rectángulo



En este modelo la función trigonométrica adecuada, conforme a la ubicación de los datos es $sec\,\theta$ dado que la variable x queda en el numerador. Para determinar el valor del cateto$_2$ se completó el triángulo donde: Cateto$_{2=}\sqrt{x^2-4}$. Posteriormente se obtuvo que $\sec\theta=\frac{x}{2}$; al despejar la variable $x=2sec\theta \rightarrow dx=2sec\theta\tan\theta$. Sustituyendo x y su diferencial en la integral original equivale a:

$$\int\frac{1}{x^2-4}\,dx=\int\frac{2\sec\theta\, tan\theta}{4sec^2\theta-4}\,d\theta=\int\frac{2\sec\theta\, tan\theta}{4(sec^2\theta-1)}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{sec\theta\; tan\theta}{tan^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int\frac{sec\theta}{\tan\theta}d\theta$$

ahora como $sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ y $tan\theta=\frac{sen\theta}{cos\theta}$ entonces $\frac{sec\theta}{\tan\theta}=\frac{\frac{1}{cos\theta}}{\frac{sen\theta}{cos\theta}}=Csc\theta$ en la integral tenemos:

$\int\frac{1}{x^2-4}\,dx=\frac{1}{2}\int Csc\theta\; d\theta=\frac{1}{2}\,ln(Csc\theta-cotan\theta)+C$. Como se debe expresar la integral en términos de la variable x, para ello consideramos que $Csc\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ y $Cotan\theta=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ por tanto en la integral tenemos:

$$\int\frac{1}{x^2-4}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right)=\frac{1}{2}\,ln\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\right)+C\triangleq$$

Situación que para muchos estudiantes no resulto nada convencional de comprender, tal es el caso de E5, manifiesta: "... *resulta ser un proceso muy elaborado para alguien que apenas está aprendiendo el tema*" [unidad de análisis 315], durante la conversación entre investigador y grupo de estudiantes este mismo joven manifestó, "*no es sencillo alcanzar esa habilidad para interpretar y relacionar las matemáticas ya conocidas con situaciones nuevas*" [unidad de análisis 318], lo que permite ratificar dificultades en los estudiantes para relacionar *conocimiento matemático estudiado* con la *aplicación de esos conceptos*, tanto a nivel intra como extra matemático. Se les dificulta visualizar la emergencia de temas matemáticos conexos, los ven como entes matemáticos independientes unos de otros. Lo que en términos de Doumas y Hummel (2005) corresponde a dificultades con el desarrollo del pensamiento relacional; referido a la capacidad de formar y manipular representaciones relacionales, que les permita alcanzar: capacidad de crear analogías entre objetos o eventos aparentemente diferentes, capacidad para aplicar reglas abstractas en situaciones conocidas. Al investigador le llamó la atención la expresión del estudiante E5"*...resulta ser un proceso muy elaborado..."* al preguntarle *¿por qué es un proceso muy elaborado*? responde: "*…durante la secundaria y en los dos años que ya cumplo en la universidad, es la primera vez que un profesor construye un concepto a partir de una situación problema, la relaciona con conocimientos previos. Siempre los profesores daban un problema y las fórmulas, pero yo nunca sabía de dónde o cómo se construían estas... Muchas veces me preguntaba ¿eso si será cierto?, ¿Quién se dedicó a estudiar eso? y ¿por qué?"* [unidades de análisis 315-318], lo que permite inferir que este joven a estado ante la presencia de procesos de enseñanza de tipo formal-mecanicista donde se ha descuidado la vigilancia epistemológica del saber que se enseña.

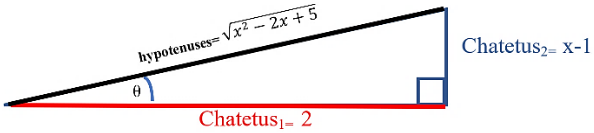
Otro ejercicio que generó dificultades a los estudiantes fue: a partir de $\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx$ debían ubicar los valores de los catetos y la hipotenusa. La modelización creada a partir un triángulo rectángulo, que al final del ejercicio, generó la Figura 5, tampoco les resultó nada sencillo como se pensó inicialmente. Les costó identificar que la expresión algebraica debe ser de la forma $\sqrt{x^2 + a^2}$ para poder calcular la integral; que esa expresión algebraica debía ser trasformada para poder identificar los valores pedidos y ubicarlos en el triángulo. Se les preguntó qué proceso algebraico se podía aplicar al denominador para transformarlo en uno de la forma indicada. Algunos estudiantes presentaron la expresión $\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx = \int \frac{1}{(x^2-2x+1+4)^2} dx = \int \frac{dx}{((x-1)^2+4)^2}$ [unidad de análisis 350], donde el denominador es de la forma $x^2 + a^2$. Aquí se resalta el conocimiento matemático usado por algunos estudiantes, y la funcionalidad de las matemáticas, manifiestos en un manejo algebraico adecuado y la conmutatividad en la expresión presentada, lo que permite inferir privilegio en los significados generados en estos estudiantes y su comprensión. Cabe anotar que algunos estudiantes manifestaron no estar de acuerdo con ese tratamiento algebraico porque no aparecía el radical. Lo que permite inferir, que en estos estudiantes hay un *conocimiento matemático* débil que les impide emplear y adoptar ese saber adquirido para resolver problemas en diferentes contextos. Para ellos la *aplicación*, se limita a los significados promovidos por el discurso matemático escolar de tipo memorístico a corto plazo, lo que ratifica la importancia de romper con el paradigma formal-mecanicista, de tipo memorístico, que tradicionalmente se aplica en la educación superior.

Al superar esta dificultad por intervención del investigador, se definió: $x-1=2tan\,\theta\ \rightarrow 2\,sec^2\theta\,d\theta$ al sustituir en la integral se tiene: $\int\frac{1}{(x^2-2x+1+4)^2}dx=\int\frac{2\,sec^2\,\theta\,d\theta}{(4\,tan^2\theta+4)^2}$, factorizando 4 en el denominador, aplicando la segunda identidad pitagórica mostrada en la figura 2 y simplificando se obtiene $\int\frac{2sec^2\theta}{16\,sec^4\theta}\,d\theta=\frac{1}{8}\int\frac{d\theta}{sec^2\theta}=\frac{1}{8}\int cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{16}\int(\cos 2\theta+1)\,d\theta$. Utilizando la segunda identidad para ángulos dobles mostradas en la figura 3 se tiene: $\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\,sen\,2\theta+\frac{1}{16}\theta+c,$ equivalente a: $\frac{1}{16}(sen\theta\,cos\theta)+\frac{1}{16}\theta+c\ [*]$.

Como $x-1=2tan\,\theta,$ entonces $\tan\theta=\frac{x-1}{2}\leftrightarrow\theta=tan^{-1}\frac{x-1}{2}$ Con estos datos ahora es posible visualizar sobre el triángulo rectángulo los valores de los catetos y la hipotenusa. Figura 5.

Figura 5

Construcción de la situación



De la figura 5, de donde se dedujo que, $sen\,\theta=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ y $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$, al sustituir estos valores en la igualdad marcada como $[*]$, se tiene:

$$\int\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}\right]+\frac{1}{16}\,tan^{-1}\frac{x-1}{2}+c.\triangleq$$

Equivalente a

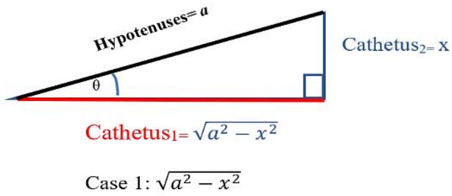
$$\int\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}dx=\frac{1}{8}\frac{(x-1)}{x^2-2x+5}+\frac{1}{16}\,tan^{-1}\frac{x-1}{2}+c.\triangleq$$

De esta situación se resalta que las dificultades presentadas por los estudiantes están relacionadas con no recordar los tres casos estudiados en clases previas (conocimiento matemático usado). Aquí es importante que el profesor encargado reconozca que tanto uso (funcionalidad) como aplicación pueden generar significados en los estudiantes por el discurso matemático empleado y respecto a las matemáticas utilizadas; por ello fue necesario reforzar desde los modelos presentados en las figuras 6, 7 y 8 los tres casos estudiados. En su orden fueron:

1. Si la función por integrar contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, la sustitución debe ser $x = a\, sen\theta, \left(con\ a > 0\ y - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ dado que eliminará la raíz cuadrada, Figura 6.

Figura 6

Caso 1

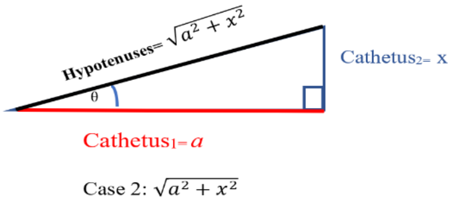


Al graficar sobre el triángulo y efectuar la sustitución, el estudiante visualiza que $\sqrt{a^2 - x^2} = a\, cos\theta$.

2. Si la función por integrar contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, la sustitución es $x = a \tan\theta$, con $\left(a > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ver Figura 7.

Figura 7

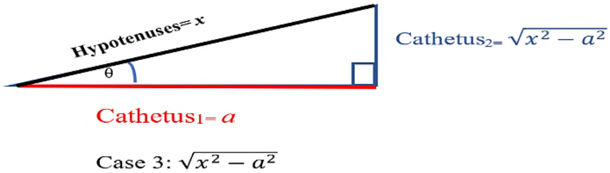
Caso 2



3. Si la función por integrar contiene una expresión de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, la sustitución debe ser $x = a \sec\theta$, con $\left(a > 0,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \ o, \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi,\ \right)$, dado que eliminará la raíz cuadrada, Figura 8.

Figura 8

Caso 3

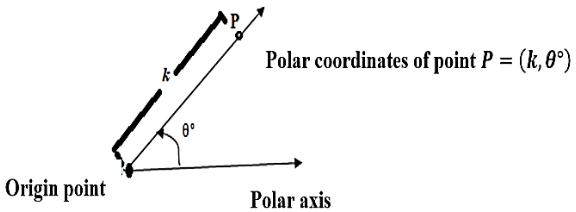


Al superar esta dificultad, y al exponerlos a las otras situaciones elegidas donde debían relacionar sistemas de coordenadas esféricas y cilíndricas, se observó que fortalecer las relaciones expuestas anteriormente, les permitió obtener una aproximación al sistema de coordenadas cartesianas, reconociendo que proporcionan una forma sencilla de describir la ubicación de los puntos en el espacio. Aprovechando esta coyuntura, se manifestó que algunas superficies pueden ser difíciles de modelizar con ecuaciones basadas en el sistema cartesiano, problema familiar en ingeniería; ya que, en dos dimensiones, las coordenadas polares regularmente proporcionan un sistema alternativo útil para describir la ubicación de un punto en el plano, particularmente en casos que involucran círculos. Ahora bien, es posible describir la ubicación de los puntos en el espacio, desde dos formas diferentes (coordenadas cilíndricas y esféricas). Las primeras son útiles para tratar problemas que involucran cilindros, ej., calcular el volumen de un tanque de agua redondo o la cantidad de fluido que pasa a través de una tubería. Las segundas, para tratar problemas relacionados con esferas, ej., encontrar el volumen de estructuras abovedadas. Ante esta situación y en vista de las dificultades manifiestas por los estudiantes para comprender las situaciones planteadas fue necesario repasar algunas nociones básicas que no se habían contemplado en la fase 1 porque se intuyó eran de pleno conocimiento y manejo de los estudiantes, estas fueron: sistemas de coordenadas polares, cilíndricas, esféricas y Superficies Paramétricas. Para ellos, se siguió el enfoque presentado en Stewart (2012) como se expresa a continuación.

Para expandir el sistema tradicional de coordenadas cartesianas de dos a tres dimensiones, basta agregar un nuevo eje para modelar la tercera dimensión considerando que, un sistema de coordenadas cartesianas se define por dos ejes ortogonales en un sistema bidimensional y tres ejes ortogonales en un sistema tridimensional que se cortan en el origen (0,0) y (0,0,0) respectivamente. Para representar puntos en el plano cartesiano se empleó el sistema de *coordenadas polares* donde es necesario conocer un ángulo (θ) y una distancia (k) Figura 9.

Figura 9

Coordenadas polares de un punto, (adaptación de Stewart, 2012, p. 639).

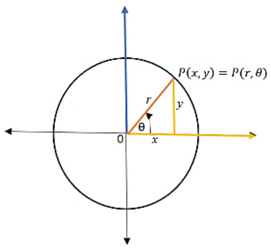


Al seguir un proceso similar al usado en dos dimensiones, uso de coordenadas polares, se creó un nuevo sistema de coordenadas tridimensional, llamado *sistema de coordenadas cilíndricas*, indicando que las coordenadas cilíndricas proporcionan una extensión natural de las coordenadas polares a tres dimensiones. Parecía un proceso sencillo, pero para los estudiantes no lo fue. Entre las dificultades identificadas durante la construcción del *sistema de coordenadas cilíndricas* como una extensión natural de las coordenadas polares a tres dimensiones, E17 preguntó: "*profesor, ¿este proceso se puede seguir indefinidamente?"* [unidad de análisis 530], lo que permite inferir, que este estudiante desconoce que únicamente es posible realizar gráficos hasta de tres dimensiones.

Con relación a la construcción de coordenadas cilíndricas [3], inicialmente fue necesario establecer que, a partir de la correspondencia pitagórica establecida para un triángulo rectángulo, la relación entre coordenadas polares y cartesianas está dada por las igualdades: $x = r \cos\theta$ y $y = r\, sen\, \theta$ donde es posible verificar que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y la fórmula para el ángulo polar es $\theta = cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$, considerados en la Figura 10.

Figura 10

Coordenadas polares en el plano



Ahora bien, en la Figura 11 se identificó un triángulo rectángulo ubicado en el plano xy, la longitud de la hipotenusa es r y θ es la medida del ángulo formado por el eje x positivo y la hipotenusa. La coordenada z describe la ubicación del punto encima o debajo del plano xy. Aquí fue fundamental para los estudiantes hacer la construcción en GeoGebra donde pudieron identificar la "clave" para transformar coordenadas cilíndricas a cartesianas, o rectangulares y viceversa.

Durante la conversión de coordenadas rectangulares a polares en dos dimensiones, se hizo énfasis en que la ecuación $\tan\theta = \frac{y}{x}$ tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, al restringir $0 \leq \theta \leq 2\pi$, fue posible

---

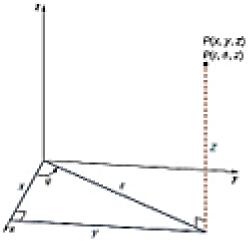
[3] En este sistema un punto en el espacio (Figura 8) está representado por la tripla ordenada (r, θ, z), donde

- (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección del punto en el plano xy
- $\boldsymbol{z}$ es la coordenada z habitual en el sistema de coordenadas cartesianas.

encontrar una única solución basada en el cuadrante del plano xy en el que se encuentra el punto original (x, y, z). Se consideró que si $x = 0$, entonces el valor puede ser $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, o\ 0,$ dependiendo del valor de y. Se pudo observar que muy pocos estudiantes notaron que estas ecuaciones se derivan de las propiedades de los triángulos rectángulos. Lo que permite inferir que, para ellos, la comprensión relacional, entendida como la habilidad para identificar operaciones, relacionar expresiones algebraicas de manera flexible (conocimiento matemático), se limita a una red conceptual que no corresponde con algunos conceptos matemáticos y la habilidad de usarlos para hallar respuestas, emitir juicios de valor sobre la razonabilidad del uso asignado; de manera que no pueden determinar qué tipo de relaciones se están dando y si estas son adecuadas o no, por ello la significación alcanzada hace que la aplicación de conceptos matemáticos se vea limitada. Con relación a las coordenadas esféricas[4], se enfatizó que una superficie en el espacio está representada mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas descritas en una función vectorial.

Figura 11

Representación de un punto en el espacio



---

[4] Entendidas como otra generalización de las coordenadas polares del plano cuando se gira alrededor de un eje. Esta situación presenta tres elementos constitutivos:

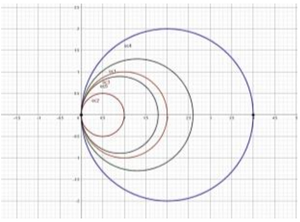
- La coordenada *radial* r: distancia al origen
- La coordenada *polar* θ: ángulo que el vector de posición forma con el eje z.
- La coordenada *acimutal* φ: ángulo que la proyección sobre el plano xy forma con el eje x.

Los rangos de variación de estas coordenadas son: $r \in [0, \infty)$; $\theta \in [0, \pi]$; $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Cabe resaltar que el ángulo φ también puede variar en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Con relación a esta situación se propuso: encuentre el área de la circunferencia $(x-a)^2+(y)^2=a^2, a>0$. Al emplear sustitución trigonométrica y luego coordenadas polares; ¿qué pueden concluir? De esta situación se observó que al graficar sobre GeoGebra online, identificaron que se genera una familia de circunferencias tangentes al origen del plano (Figura 12).

Figura 12

Familia de circunferencias



Al preguntarles sobre el trabajo a realizar conforme la gráfica que el software ofrece, las propuestas fueron casi uniformes, identificaron que dicha área está determinada por la integral $A=2\int_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\ dx$ y que se trata de un ejercicio caso 1, que conlleva a una sustitución de la forma $x=a\,sen\theta,$ para eliminar la raíz cuadrada. Lo que no fue sencillo para los estudiantes identificar fue cuál era la sustitución correcta. E25 propuso: "$x^2=sen\,\theta$" al preguntarle *¿cuál es el diferencial y si al hacer la respectiva sustitución en la integral, resulta más sencilla de calcular*? [unidad de análisis 564], manifestó: "*el diferencial es $dx=\frac{cos\,\theta}{2x}$, pero no veo si esto ayuda a o no a solucionar el ejercicio*" [unidad de análisis 565]. Lo que permite inferir que el subgrupo donde este estudiante trabajaba, tiene un conocimiento matemático poco claro, por ello el pensamiento relacional que manejan no les permite identificar la aplicación de conceptos asertivamente.

Luego de examinar con el grupo en pleno esta propuesta, E41 integrante de otro subgrupo, con su cuaderno de apuntes en mano pasó al tableo y propuso: "*nosotros trabajamos intentando varias opciones, la que nos funcionó mejor fue:*

sea $x - a = a\,sen\,\theta$, *el diferencial es:* $dx = a\,cos\theta\;d\theta$. *Ahora, como es una circunferencia, entonces* $x = 2a$, *de donde* $a = a\,sen\,\theta \rightarrow sen\theta = 1$ *que nos permite concluir que* $\theta = \frac{\pi}{2}$. *Y como* $x_1 = 0 \rightarrow -a = a\,sen\,\theta$, *quiere decir que* $sen\,\theta = -1$, *por tanto* $\theta = -\frac{\pi}{2}$ *que representan los límites de integración*". [unidades de análisis 578-580].

Acto seguido E28 del mismo subgrupo dice

"*ya calculamos la integral, permiso profesor para pasar al tablero*" y escribe: "$A = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta}$, $a\cos\theta\;d\theta$ *que equivale a* $2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta\;d\theta = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\;d\theta = \pi a^2$, *este número representa el valor del área pedida*". [unidades de análisis 581-583].

Con relación al uso de coordenadas polares el subgrupo del estudiante E30 planteó:

"*nosotros hicimos este trabajo: sea* $x = r\,cos\,\theta$ *y* $y = r\,sen\,\theta$, *como* $(x-a)^2 + y^2 = a^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2ax = 0$ *entonces,* $r^2 - 2ax\,cos\theta \rightarrow r(r - 2a\,cos\theta) = 0$ *de donde se tiene que* $r = 2a\,cos\theta$.

Ahora si consideramos $A = \frac{1}{2}\int_a^b |f(\theta)|^2 d\theta = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a\,cos\theta)^2\;d\theta\right]$ *se tiene:*$=$ $4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos\,2\theta}{2}\;d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos\,2\theta)\;d\theta$ *que al hacer los cálculos tenemos:* πa^2. [unidades de análisis 592-594].

En ambas producciones, se observa un tratamiento adecuado a los datos ofrecidos por el ejercicio lo que permite inferir desarrollo del pensamiento relacional, expresado en comprender, ordenar y clasificar los datos de la situación propuesta con sus propias ideas; conectan ideas de forma exhaustiva para extraer la respuesta correcta, lo que implica un conocimiento matemático usado adecuado. Para esos estudiantes, en términos de Meel (2003) citando a Skem (1978), se observa distinción entre comprensión relacional y comprensión instrumental, que conduce a contraponer el termino pensamiento relacional al de pensamiento procedimental. Siguiendo este autor se infiere que en estos estudiantes la comprensión es identificada cuando "saben qué hacer y por qué" (p. 9), es decir comprenden (funcionalidad de las matemáticas). Mientras que la comprensión instrumental la usan para identificar "ciertas reglas y sabe cómo aplicarlas" (p. 9).

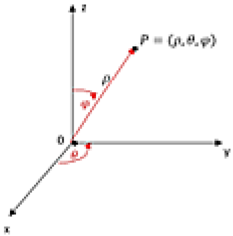
Se observó que la sintaxis del comando Superficie de GeoGebra les permitió enlazar la definición matemática con su representación gráfica, vista en 3D. Lo que permite inferir que el uso de este software ofreció un entorno amigable y de fácil uso para los estudiantes, interactuaron con los comandos de forma directa, a través de la barra de entrada, permitiéndoles visualizar la gráfica de superficies no acotadas desde diferentes ángulos. Este entorno tecnológico se convirtió en una herramienta para el aprendizaje, porque les ayudó a visualizar y representar conceptos.

Con relación a las coordenadas esféricas se institucionalizó: en el sistema de coordenadas cartesianas, la ubicación de un punto en el espacio se describe mediante una tripla ordenada donde cada coordenada representa una distancia. En el sistema de coordenadas cilíndricas, la ubicación de un punto en el espacio se describe mediante dos distancias (ryz) y un ángulo (θ). En el sistema de coordenadas esféricas volvemos a usar una tripla ordenada para describir la ubicación de un punto en el espacio, salvo que en esta ocasión esa tripla ordenada describe una distancia y dos ángulos. Este tipo de coordenadas esféricas permiten la descripción de una esfera, así como las coordenadas cilíndricas la de un cilindro. Para ello se formalizó conforme a Stewart (2012, p. 1005):

> Definición: El sistema de coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) de un punto P en el espacio (Figura 13), donde $\rho = |0P|$ es la distancia del origen a P; θ es el mismo angulo que en coordenadas cilíndricas y φ es el angulo entre el eje z positivo y el segmento de línea $0P$. Con $\rho \geq 0$, y $0 \leq \varphi \leq \pi$. Cabe resaltar que este sistema de coordenadas esféricas es útil en problemas donde hay simetría alrededor de un punto y el origen está ubicado en dicho punto.

Figura 13

Coordenadas esféricas del punto P, (adaptación propia).



Debido a las múltiples dificultades presentadas por los estudiantes para manejar este tipo de conceptos únicamente se pudo trabajar conversión entre coordenadas esféricas, cilíndricas y rectangulares. Dos de las doce situaciones elegidas no fue posible desarrollarlas dado que involucraban manejo de este tipo de conceptos. A pesar que las fórmulas para convertir las coordenadas esféricas en coordenadas rectangulares les parecieron complejas de usar, realmente son aplicaciones sencillas de la trigonometría que para este grupo de estudiantes se hace necesario reforzar en un escenario adicional a la clase.

CONCLUSIONES

Se encontró que algunos estudiantes no reconocen a la Trigonometría como una herramienta matemática útil en su quehacer profesional; lo paradójico es que al preguntarles si en alguna ocasión usaban las funciones *seno, coseno* por nombrar algunas, se encontraron respuestas como las de E10: "Sí, e*sas fórmulas las usamos"* [unidad de análisis 421].

En la muestra se logró avance para conceptualizar elementos del proceso a seguir para solucionar una situación problema, familiaridad con las propiedades que poseen las operaciones a usar, familiaridad con los contextos en que se presenta la integral como operador y como función; conocimiento de las integrales trigonométricas y capacidad para relacionarlas con elementos propios de la trigonometría. Construcción de la integral en sentido operacional, esencial en la construcción y naturaleza de las relaciones entre el PMA con la ingeniería, los símbolos matemáticos y los objetos mentales asociados. Se logró en la muestra avances sobre la importancia del uso adecuado de un sistema simbólico esencial para llevar a cabo generalizaciones, formalizaciones y argumentaciones. Se destaca en los estudiantes alcance de un nivel operacional cuando fueron capaces de proponer soluciones adecuadas a situaciones que en un principio eran desconocidas para ellos, esto requiere de generalizaciones lo que autmentó su capcidad de abstraccion. Dado que las operaciones no solo deben ser comprendidas sino que tambien fue necesario comprender su estructura. Elementos que permiten al estudiante desarrollar la habilidad para relacionar el uso de la integracion en diferentes situaciones matematicas problema porpias del quehacer de un ingeniero.

Con relación al conocimiento matemático usado y la aplicación de conceptos matemáticos, se observó que los estudiantes aprenden cómo integrar una variedad de productos de funciones trigonométricas que comúnmente son conocidas como *integrales trigonométricas,* algunas de ellas apoyados en software matemático especializado sin comprender la técnica de integración por sustitución trigonométrica empleada. Muy pocos estudiantes identifican que esta técnica permite convertir expresiones algebraicas que quizás no podamos integrar, en expresiones más sencillas que involucren funciones trigonométricas que permiten calcular la integral utilizando las técnicas descritas. Aquí se resalta la importancia del suso de software especializado, pero este debe ser usado sin descuidar la construcción de conceptos de manera que el estudiante alcance significado y sentido de dichas construcciones con el objeto de aplicarlas posteriormente.

Con relación a la resolución de situaciones problema que involucran integrales trigonométricas se encontró uso limitado del pensamiento relacional, referenciado en la escasas apropiación de conceptos y sus posibles aplicaciones. No obstante, se observó en algunos estudiantes establecer relaciones emergentes entre integrales donde existía productos de potencias de funciones trigonométricas, particularmente cuando identificaban potencias pares del seno e impar del coseno, y era necesario descompone la potencia impar del coseno, similar situación cuando se presentó potencia impar del seno y par del coseno y era necesario descompone la potencia impar del seno haciendo uso de las identidades trigonométricas pitagóricas. Pero no cuando se presentaron situaciones que involucran potencia impar de la tangente y par de la secante, aquí la dificultad estuvo en recordar la identidad pitagórica correcta y realizar procesos algebraicos adecuados para aplicar la respectiva sustitución que permitiera visualizar la integral de manera más sencilla de calcular. Lo que permite inferir que los estudiantes mantienen la idealización de ejecutar procesos de tipo mecanicista; situación tan arraigada, que les impide identificar que, establecer relaciones es esencial en las matemáticas superiores porque potencian el desarrollo de la comprensión y del conocimiento mismo de las matemáticas (Hiebert y Carpenter, 1992).

Con el avance de la investigacion se obsrvó que los estudiantes, progresivamente alcanzaron desarrrollo del pensamieto relacional como heramienta que les permitió identificar qué tipo de conocimiento matemático usaban y como ejecutaban la aplicación de esos conceptos matemáticos. Lo que les permitió enfrentar diversas situaciones propias del cálculo donde fue necesario hacer trasformacion de expresiones algebraicas, o en situaciones en las que se relacionaron expresiones arítmeticas, algebraicas y geometricas, que conllevan uso de estrategias flexibles. Pensar de este modo require en terminos de Carpenter et al, (2005) que los estudiantes "*miren*" (consideren) la totalidad de la situacion para identificar relaciones numéricas significativas, antes de empezar a calcular, y alcancen conciencia, al menos de la manera implicita, de propiedades y de relaciones.

Los estudiantes pudieron usar el pensamiento relacional para simplificar calculos, construir y aprender conceptos, extender procedimietnos a situaciones problema propias de su formacion de ingenieros, lo que permite inferir que dan un nuevo significado a la integración como operador que calcula y como herramienta cuando identifican la funcion integral como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ que depende del límite superior de integración. Trabajo centrado en el uso de conocimientos adquiridos previamente con la comprensión de la estructura de las situaciones propuestas y las relaciones que subyacen a ellas. Se observa adquisición de conocimiento implícito de algoritmos, propiedades, reglas y operaciones; las actividades centradas en el uso del pensamiento relacional facilitaron hacer explicito ese conocimiento procedimental, expuesto en las respuestas ofrecidas. En definitiva, favoreció un aprendizaje significativo de las matemáticas, particularmente relacionar la trigonometría como un elemento más del PMA, como un sistema organizado y sistemático que se convierte en herramienta para afrontar situaciones problema de la cotidianidad.

El uso de tecnología en Educación Matemática permite explicar y visualizar definiciones conceptos, teoremas, esbozar gráficas, etc. que, en su momento, ha sido difíciles de ser entendidas y comprendidas por los estudiantes. El uso de GeoGebra es de utilidad cuando se deben esbozar superficies convencionales y no convencionales, en especial cuando se requiere usar superficies paramétricas basadas en coordenadas esféricas. Sin embargo, el uso de este tipo e instrumentos no puede sustituir las construcciones, demostraciones y formalizaciones que el docente debe ejecutar con los estuantes con el objeto que estos últimos alcancen significado de esos entes matemáticos que aprenden.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente (EMN), previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Barrantes, H. (2006). *Los obstáculos epistemológicos. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*. *1*(2).

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socio epistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2005). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Doumas, L., & Hummel, J. (2005). Approaches to modeling human mental representations: what works, what doesn´t and why. In H. L. Holyoak & R. Morrison (Eds.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (p. 73-91). Cambridge University Press.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2),* 169-193.

Godino, J. (2002). Un Enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Reserches en Didactiques des Mathématiques, 22(2/3),* 237-284

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. D. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Macmillan.

Mateus-Nieves, E., & Hernández, W. (2020). Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. *UNION*, *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, *XVI*(60), 196-211.

Mateus-Nieves, E., & Rojas, C. (2020). Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. *Acta Sci. (Canoas), 22(3),* 65-81. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5667

Mateus-Nieves, E., & Font, V. (2021). Epistemic Complexity of the Mathematical Object “Integral”. *Mathematics, 9(19),* 2-25. https://doi.org/10.3390/math9192453

Mateus-Nieves, E., & Moreno, E. (2021). Development of Variational Thinking for the Teaching of Preliminary Notions of Calculus. A Class Experience in Basic Education. *Acta Scientiae, 23*(2), 113-135. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716

Mateus-Nieves, E. (2021). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema, Rio Claro (SP),* 35(71), 1593-1615. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE1. *Relime 6(3),* 221-271.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26(3),* 9-15.

Stewart, J. (2012). *Calculus Early trascendentals.* Seventh Edition. Volumes I, II. Thomson-Brooks/Cole. Cengage.

Valdivé, C. & Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 11*(3), 413-450.

Vinner, S. & Herschkowitz, R. (1980). Concepts images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (p. 177-184). University of California, Hall of Science.