

Interacciones promovidas por formadores de profesores a partir de un planteamiento erróneo acerca del tema de las fracciones

Hugo Parra-Sandoval ^a

Adelso Gustavo Perdomo Hernández ^b

Gabriela Prieto ^c

^a Universidad del Zulia, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Maracaibo, Venezuela

^b Universidad Científica del Sur, Departamento de Cursos Básicos, Lima, Perú

^c Universidad del Zulia, Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Maracaibo, Venezuela

Recibido para publicación 15 mar. 2023. Aceptado tras revisión 15 mayo 2023

Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Se presenta un episodio desarrollado en el marco de un proceso de formación para profesores de primaria sustentado en un diagnóstico previo donde, entre otras falencias, se detectaron aquellas relacionadas con el tema de las fracciones y su enseñanza. En ese contexto se producen un conjunto de interacciones entre los participantes y dos formadores de profesores de matemáticas, a partir de un error relacionado con esa temática. **Objetivos:** Analizar los tipos de interacciones promovidas por dos formadores de profesores de matemáticas a partir de la aparición de un error en el contexto de un programa de formación continua para profesores de primaria. **Diseño:** Investigación naturalista de carácter cualitativo-etnográfico. **Ámbito y participantes:** Dos formadores de profesores de matemáticas y profesores de la segunda etapa de primaria (9-11 años) pertenecientes a una red educativa que ofrece sus servicios en sectores desfavorecidos. **Recopilación y análisis de datos:** Se observaron dieciséis horas registradas en vídeo y se analizaron a partir de dos categorías con sus respectivas propiedades; cada categoría caracteriza un tipo de interacción. **Resultados:** La información recopilada muestra de parte de cada uno de los dos formadores de profesores de matemáticas un tipo de interacción diferente cuando aparece un error sobre la fracción y su enseñanza. **Conclusiones:** Los dos tipos de interacciones que se evidencian de manera diferente en cada uno de los formadores, muestran que las características que se proponga un programa de formación inicial, continua o de desarrollo profesional, está marcado por los tipos de interacciones que promueva el formador.

Palabras claves: Formación de profesores; formador de profesor de matemáticas; error; enseñanza de las fracciones

Autor correspondiente: Hugo Parra-Sandoval. Email: hugoparras@hdes.luz.edu.ve

Interactions Promoted by Teachers Educators Based on an Erroneous Approach to the Subject of Fractions

ABSTRACT

Background: An episode developed within the framework of a training process for primary school teachers is presented, based on a previous diagnosis where, among other shortcomings, those related to the subject of fractions and their teaching were detected. In this context, a set of interactions between the participants and two mathematics teacher educators take place, based on an error related to this theme. **Objectives:** To analyse the types of interactions promoted by two mathematics teacher educators from the appearance of an error in the context of a continuous training program for primary school teachers. **Design:** Naturalistic research of a qualitative-ethnographic nature. **Scope and participants:** Two mathematics teacher trainers and teachers of the second stage of primary school (9-11 years old) belonging to an educational network that offers its services in disadvantaged sectors. **Data collection and analysis:** Sixteen hours recorded on video were observed and analysed from two categories with their respective properties; each category characterises a type of interaction. **Results:** The information collected shows a different type of interaction on the part of each of the two mathematics teacher educators when an error appears about the fraction and its teaching. **Conclusions:** The two types of interactions that are evident in a different way in each one of the trainers, show that the characteristics proposed by an initial, continuous or professional development training program are marked by the types of interactions promoted by the trainer.

Keywords: Teacher training; mathematics teacher trainer; mistake; teaching fractions

Interações promovidas por formadores de professores a partir de uma abordagem errônea do tema das frações

RESUMO

Contexto: Apresenta-se um episódio desenvolvido no âmbito de um processo de formação de professores do ensino básico, com base num diagnóstico prévio onde foram detectadas, entre outras deficiências, as relacionadas com o tema das frações e o seu ensino. Nesse contexto, ocorre um conjunto de interações entre os participantes e dois formadores de professores de matemática, a partir de um erro relacionado a esse tema. **Objetivos:** Analisar os tipos de interações promovidas por dois formadores de professores de matemática a partir do aparecimento de um erro no contexto de um programa de formação contínua de professores do ensino básico. **Desenho:** Pesquisa naturalística de natureza qualitativo-etnográfica. Âmbito e participantes: Dois formadores de professores de matemática e professores do 2.º ciclo do ensino básico (9-11 anos) pertencentes a uma rede educativa que oferece os seus serviços em setores

desfavorecidos. **Coleta e análise dos dados:** Foram observadas e analisadas dezesseis horas gravadas em vídeo a partir de duas categorias com suas respectivas propriedades; cada categoria caracteriza um tipo de interação. **Resultados:** A informação recolhida mostra um tipo diferente de interação por parte de cada um dos dois formadores de professores de matemática quando surge um erro sobre a fração e o seu ensino. **Conclusões:** Os dois tipos de interações que se evidenciam de forma diferente em cada um dos formadores, mostram que as características propostas por um programa de formação inicial, contínua ou de desenvolvimento profissional são marcadas pelos tipos de interações promovidas pelo formador.

Palavras-chave: treinamento de professor; formador de professores de matemática; erro; ensinando frações

INTRODUCCION

Presentamos un episodio de una sesión de formación de maestros de primaria, en el que se producen un conjunto de interacciones entre los participantes y dos formadores, a partir de un error relacionado con la enseñanza de la noción parte-todo de las fracciones. El episodio se enmarca en un proyecto de investigación que estudia las interacciones lideradas por formadores de profesores en un programa de formación para profesores de primaria.

En el quehacer educativo es ineludible establecer diferentes relaciones dentro del aula que generan a su vez, variadas interacciones de los agentes o elementos que intervienen en ese contexto. En este sentido, Coll y Sánchez. (2008), señalan que la interacción es la articulación de las acciones que llevan a cabo el profesor y los estudiantes, las cuales giran alrededor de una actividad y un contenido específico dentro del proceso educativo, dando lugar al surgimiento del conocimiento o la construcción conjunta de significados a partir de las interacciones (Chico, 2018). Esas interacciones involucran procedimientos, conjeturas, formas de validación y contraejemplos, de ahí la importancia de analizar el diálogo para estudiar las interacciones. Entre las teorías que tratan las interacciones, se tiene el interaccionismo simbólico que tiene grandes influencias de la aproximación interaccionista en Educación Matemática (Godino y Llinares, 2000), pues se adaptan los conceptos sociológicos a los de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La importancia del estudio de las interacciones en el contexto escolar radica en que gran parte de los conocimientos que alcanza el estudiante provienen de interacciones en contextos de aula entre maestros y estudiantes (Sánchez-Barbero, Calatayud y Chamoso, 2019; Mendoza-von der Borch, 2018). En este sentido, Donoso, Valdés y Cisternas (2020) indican que la

información en torno a la interacción entre docentes y estudiantes en las clases es aún incipiente, sin embargo, es de interés analizar las interacciones que se dan en las acciones encaminadas a comunicar y negociar significados matemáticos en el aula (Chico, 2018)

Por otra parte, en toda interacción en el aula salen a relucir errores por parte de quienes participan en ella. Esto ocurre porque hay una estrecha relación entre las interacciones en el aula, los errores y los procesos de aprendizaje (Lannin, Barker y Townsend, 2007; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000). Cualquier situación de aprendizaje está sujeta a la posibilidad de la asunción de errores y estos deberán ser aprovechados en favor de los aprendizajes

Durante años el interés por estudiar los errores se ha incrementado y en un principio este tipo de investigaciones estuvieron más centradas en los estudiantes que en los profesores (Tulis, 2013, Heinze y Reiss, 2007, Santagata, 2005). Hoy esta realidad ha cambiado progresivamente; las investigaciones que abordan los errores en los profesores que se están formando se han incrementado, sin embargo, aquellas que estudian los errores y otros aspectos relacionados con los docentes en ejercicio, no han sido tan abundantes (Aguerrea, Solís y Huincahue, 2022; González; Gómez y Restrepo, 2015; Heinze y Reiss, 2007, Santagata, 2005 y Tulis, 2013; Rhoads, Radu y Webber, 2011) y mucho menos, si se trata de los formadores de profesores, actores claves que poco se han estudiado (Contreras, 2021; Parra-Sandoval, 2020; Chick y Beswick, 2018). Por eso, cualquier investigación sobre el error que se enfoque en estas dos poblaciones - profesores en ejercicio y formadores de profesores- puede aportar datos significativos para los procesos de aprendizaje y este es el caso que nos ocupa en este escrito.

En consecuencia, presentamos un episodio en el que un profesor de primaria en ejercicio manifiesta un error al momento de emitir su opinión sobre el tema de la fracción como parte-todo; esta situación genera un abundante número de interacciones entre este participante, sus pares y los dos formadores. Este episodio forma parte del programa de formación continua que ya mencionamos.

Tomando en consideración que el planteamiento erróneo es sobre la enseñanza de la fracción en el contexto de un programa de formación continua para profesores de primaria y que éste generó una serie de intercambio de opiniones y saberes entre los formadores y participantes, nos planteamos analizar los tipos de interacciones que son promovidas por dos formadores de profesores a partir de un planteamiento erróneo por parte de uno de los

participantes sobre el tema de la enseñanza de las fracciones, en el contexto de una sesión de formación continua.

MARCO TEÓRICO

Para alcanzar el objetivo planteado, abordamos una revisión bibliográfica que abarca los siguientes tres aspectos: las interacciones en el aula, el error en el campo de la educación matemática y la enseñanza de las fracciones.

Las interacciones en el aula

De acuerdo con Godino y Llinares (2000) el interaccionismo en la educación matemática contribuye a estudiar las interacciones entre individuos dentro de una cultura, en lugar de centrarse en el individuo de manera aislada. Para caracterizarlo se debe describir su posicionamiento en relación al significado, la naturaleza del conocimiento matemático, los procesos de llegar a conocer y comprender el objeto matemático y el papel del lenguaje.

Leguizamón (2017) manifiesta que se pueden emplear diferentes enfoques para caracterizar las interacciones en el aula de manera natural; esto se hace analizando los pares posibles intervinientes en este proceso, es decir, interacción profesor-estudiante, profesor-grupo, profesor-clase, estudiante-estudiante, estudiante-grupo, estudiante-clase, grupo-clase y en todos, se debe tomar en cuenta que son relaciones asimétricas de poder.

Otro enfoque sobre las interacciones es analizarlas en el marco de una actividad matemática; por ejemplo, estudiando los procesos que se promueven y el grado de participación de maestros y estudiantes durante las interacciones (Sánchez-Barbero et al. 2019). Entre los procesos, están los cognitivos, referentes al razonamiento que se produce en la interacción (Smart y Marshall, 2013) y los metacognitivos (Vélez y Ruis, 2021), que comprenden la capacidad reflexiva que permite tomar conciencia de la propia cognición. En lo concerniente al grado de participación de maestros y estudiantes, es la participación que tienen en la construcción del conocimiento para el aprendizaje (Sánchez-Barbero et al., 2019).

También el estudio de las interacciones gira en torno a las características de éstas. Por ejemplo, Ingram y Riser (2019) abordan las interacciones que se generan en clases de matemáticas a partir de la resolución

de problemas, mostrando que los estudiantes participan en una gama muy limitada de acciones de resolución de problemas, generalmente controladas por el profesor.

Otra perspectiva es mediante el estudio de patrones. Voigt (1985) señala que la identificación y estudio de patrones en el contexto de las interacciones facilita la observación de regularidades que ahí suceden, ayudando a analizar el quehacer dentro del aula. De acuerdo al autor, el estudio de patrones evita la diversidad de interpretaciones que pudieran darse a partir de las primeras percepciones. Por su parte, Pagés, Olave y Lezama (2018), señalan que un patrón de interacción es una estructura de interacción que se da frente a frente entre dos o más sujetos, tal que:

- “sirve para reconstruir una regularidad específica de interacción focalizada en un tema.
- Refiere a acciones concertadas, interpretaciones y mutuas percepciones de al menos dos participantes, y no es la suma de sus acciones individuales.
- La estructura es explicable por medio de un conjunto de reglas.” (p. 146-147).

Basándose en el estudio de patrones, hallamos que Hermkes, Mach y Minnameier (2018) apuestan por la identificación de unidades significativas de lo observado y de ahí, identifican patrones; los investigadores resaltan lo útil que les resulta esta manera de estudiar las interacciones en el aula.

En ese estudio de Hermkes et al. (2018) destacan que el patrón de interacción predominante muestra un bajo nivel de eficiencia cognitiva en las intervenciones del docente con sus estudiantes. Leguizamón (2017) por su parte, examina los patrones de interacción que surgen al observar futuros profesores en diferentes clases de matemáticas, destacando entre las interacciones más comunes aquellas en las que el docente formula preguntas cortas, a las que le corresponden respuestas breves por parte de los estudiantes. De igual manera, en ese mismo estudio reporta en el formador de profesores la auto respuesta por parte de éste.

En relación con los aprendizajes, Donoso et al. (2020) revelan que la mayoría de las interacciones que promueven los profesores exigen de parte de sus estudiantes una baja demanda cognitiva y poca retroalimentación del profesor. Caso contrario es el que informan Borssoi, Silva y Ferruzzi (2021), quienes observan a un profesor promover interacciones caracterizadas por

orientar a sus estudiantes a reflexionar y compartir sus saberes, logrando de esta manera aprendizajes que requieren de una demanda cognitiva compleja como es la modelización matemática.

Pagés et al. (2018) reportan un estudio realizado con tres futuros profesores y proponen dos tipos de patrones derivados de las interacciones: el *patrón extractivo – embudo* y el *patrón discusión – focalización*. En el primero, los estudiantes no necesitan involucrarse cognitivamente en la actividad para contestar adecuadamente las preguntas que se plantean o surgen, sino que es el docente quien lo hace, y sabe a qué respuesta quiere llegar. En el segundo, el estudiante trabaja de forma activa y posee la responsabilidad de elaborar una explicación y justificación de lo que se realiza, el profesor busca desarrollar procesos cognitivos y metacognitivos en los estudiantes y alcanzar la finalidad de las tareas. Los resultados de este estudio muestran en los futuros profesores, un predominio del patrón extractivo-embudo.

Dado el carácter práctico de estudiar las interacciones realizando una clasificación de acuerdo a ciertas pautas que se repiten, decidimos asumir los patrones de interacción establecidos por Pagés et al. (2018). Los patrones nos facilitan la focalización en las acciones que se llevan a cabo en la sesión de formación y nos permite detectar las características de las interacciones y el rol que juega el formador en ellas.

El error

Las interacciones en el aula dan lugar a la aparición de diferentes tipos de errores por parte de quienes participan. En ese sentido hay unanimidad en asumir que los errores son inherentes a los procesos de aprendizaje (Lannin et al., 2007; NCTM, 2000), así que cualquier situación de aprendizaje está sujeta a la posibilidad de la asunción de ellos y estos deberán ser aprovechados.

Una de las principales características del error es su persistencia en el tiempo; así, McAllister y Beaver (2012), analizan el tipo de errores que futuros profesores manifiestan al momento de crear problemas con operaciones de fracciones. Entre lo más resaltante del estudio está la débil comprensión conceptual de las operaciones con fracciones. Esta presencia de errores en poblaciones que se suponen que ya ha estudiado ésta y otras temáticas la reportan otros estudios como los de Aguerrea et al. (2022); Plaza, González y Vasyunkina (2020); Booth, Barbieri, Eyer y Paré-Blagoev (2014) y Cangelosi, Madrid, Cooper, Olson y Hartter (2013). De acuerdo con Cangelosi et al. (2013), los errores persisten porque pueden estar estancados en un nivel bajo

del concepto asociado y superarlos, significa ser abordados de diferentes maneras (Aguerrea et al., 2022; Cangelosi et al., 2013).

Por otra parte, hallamos estudios que se enfocan en cómo los profesores enfrentan la aparición del error en sus clases. Schleppenbach, Flevares, Sims y Perry (2007) en un estudio comparativo entre profesores de China y EE. UU. analizan los discursos de estos docentes y sus reacciones ante la aparición de errores en clase. Los resultados muestran que los profesores chinos reaccionan de manera diferente a los estadounidenses; ante el surgimiento de errores en sus clases, los profesores de China formulan interrogantes que promueven la reflexión sobre el error manifestado; en cambio, los profesores de EE. UU. se inclinan más a comentar sobre el error. Por su parte, Pinzón, Gómez y González (2022) en un cuestionario aplicado a profesores, indagan acerca de sus prácticas curriculares ante los errores que manifiestan los estudiantes. Entre los resultados destacan que dos terceras partes plantearon actividades centradas en el propio docente, quedando solo un tercio que proponen actividades en las que los estudiantes asumen el protagonismo de las actividades bajo la orientación del profesor. Estos resultados nos indican la no uniformidad de reacciones ante la aparición de los errores en sus clases.

Las fracciones

Las fracciones reúnen un conjunto de errores que persisten en el tiempo. Parte de esta realidad la constituye muy probablemente la fragilidad conceptual a la que hacen referencia Cangelosi et al. (2013).

En el caso de las fracciones, esta fragilidad conceptual podría deberse en parte, al hecho de reducir muchas veces su estudio a la representación como parte-todo. En este punto es importante señalar que la movilización entre las diversas interpretaciones de la fracción suele ser limitada. Al respecto, Tunç-Pekkan (2015), por medio de una prueba que realiza a 656 niños estadounidenses de 4to y 5to grado encuentra un bajo rendimiento en los ítems donde se requiere un razonamiento más avanzado, comparado con aquellos donde la interpretación requerida está vinculada a la fracción como parte/todo.

Investigadores como Cortina; Zuñiga y Visnovska (2013), manifiestan que la flexibilidad conceptual de la fracción se ve afectada cuando se favorece una interpretación. Por ejemplo, los docentes al privilegiar la concepción parte-todo en el contexto de las superficies, se apoyan en el supuesto de que las actividades propias de esta interpretación resultan ser más significativas para los estudiantes porque permiten, por medio del esquema de conteo, identificar

el numerador y el denominador de una fracción, para las superficies ya divididas y sombreadas. Por otro lado, también permite el uso de sistemas de representación como el verbal (lectura de fracciones) y el simbólico (expresión numérica asociada a una fracción).

Privilegiar la interpretación de la fracción como parte-todo y su representación figural en un contexto continuo resulta ser una práctica didáctica frágil en la que se pueden generar errores que repercutirán más adelante en otros aprendizajes. Un claro ejemplo de un error posible en los estudiantes se aprecia en la investigación de Singh, Hoon, Nasir, Han, Rasid y Hoong (2021), donde solicitan a un estudiante representar gráficamente $10/9$. El estudiante indica que no puede utilizar la representación gráfica del pastel (representación figural en un contexto continuo y circular) por tratarse de una fracción donde el numerador es mayor que el denominador (fracción impropia).

El investigador le solicita ahora representar gráficamente $4/9$, el estudiante luego de varios intentos genera la representación in Figura 1.

Figura 1

Adaptado de Singh et al. (2021)



En este punto es importante hacer notar que en la representación de fracciones propias usando el círculo, el estudiante tiende a hacer la división de la figura usando el segmento denominado diámetro, permitiendo dividir el círculo solo en una cantidad par de sectores circulares. Luego toma uno de esos sectores circulares y lo divide a la mitad, obteniendo de este modo un total de 9 partes, pero dos de ellas de distinto tamaño al resto. Esta acción por parte del estudiante se debe al esquema de doble conteo (se cuenta el total de partes en que ha sido dividida la figura y también se cuenta el número de partes que se han sombreado) permitiéndole identificar símbolos de fracciones sin tomar en

consideración que las partes del fraccionamiento sean del mismo tamaño. (Tunç-Pekkan,2015).

METODOLOGÍA

Presentamos un episodio enmarcado en un proyecto de investigación que analiza las interacciones lideradas por dos formadores de profesores en un programa de actualización para profesores de primaria. La característica de este episodio es que en él se generan un conjunto de interacciones a partir de un planteamiento erróneo sobre la conceptualización de las fracciones y su enseñanza por parte de uno de los participantes. Este programa de formación se sustentó en las principales deficiencias halladas en un diagnóstico realizado a docentes de primaria, en el que una de las falencias fue el tema de las fracciones. Los docentes participantes pertenecen a una red de colegios que atienden poblaciones desfavorecidas en Venezuela.

Como enfoque metodológico asumimos la etnografía porque permite la reconstrucción de los hechos tal y como suceden (Flick, 2015; Álvarez, 2011). En ese sentido registramos dieciséis horas de vídeo que es el tiempo de duración de tres sesiones de formación y de ellas seleccionamos para este escrito un episodio de unos 17 minutos, caracterizado por el rico repertorio de interacciones entre dos formadores y los profesores participantes generado por la aparición de un error.

Para analizar los patrones de interacción de cada uno de los formadores, asumimos como categorías de análisis los dos patrones de interacción planteados por Pagés et al. (2018). El primer patrón es el denominado *extractivo – embudo*, que se caracteriza porque quien conduce la actividad, direcciona todas las intervenciones hacia la respuesta deseada, lo que conduce a los participantes a no involucrarse en procesos cognitivos complejos para emitir sus respuestas. El segundo patrón es el denominado *discusión – focalización*, en este caso quienes dirigen las actividades son dos formadores a través de preguntas, ejemplos y contraejemplos, haciendo que los participantes lleguen a sus propias conclusiones recurriendo a la argumentación sustentada en su propia reflexión; esto supone, de parte de los participantes, la activación de procesos cognitivos complejos.

Para ayudarnos a caracterizar y analizar estos dos patrones observamos el vídeo del episodio numerosas veces y fijamos la atención en los siguientes aspectos: el primero, intencionalidad de las preguntas planteadas por los formadores; el segundo, características de estas preguntas y las respectivas

respuestas que estas interrogantes generan en los participantes y por último, la manera como los formadores enfrentan el error surgido entre las respuestas de los participantes. Tomando en cuenta estos cuatro aspectos, formulamos las propiedades de cada uno de los patrones, adecuándose a los datos que emergieron de la observación.

Con los dos patrones planteados por Pagés et al. (2018) y las propiedades que definen cada una de las categorías, elaboramos el Cuadro 1.

Cuadro 1

Categorías de análisis

Categorías	Propiedades
<p>Patrón Extractivo - embudo</p>	<ul style="list-style-type: none"> *El formador dirige a los participantes hacia la respuesta esperada. * El formador no toma en consideración los errores o temáticas que puedan desviar la atención hacia donde él desea dirigirla. *El formador verifica si el participante responde de acuerdo a lo esperado. *Los participantes intentan responder tal y como suponen que el formador espera que lo hagan. *Las preguntas del formador exigen poca demanda cognitiva a los participantes.
<p>Patrón Discusión – Focalización</p>	<ul style="list-style-type: none"> *Se orienta a los participantes a través de preguntas que le permitan responder de manera acertada. * El formador toma en consideración los errores y temáticas como una oportunidad para reflexionar sobre el tema. *Mediante preguntas, el formador verifica si el participante responde con argumentos producto de su reflexión *los participantes responden de acuerdo a lo que ellos creen que es la respuesta correcta *Los participantes en sus respuestas muestran niveles de esfuerzo cognitivo complejos (argumentación, reflexión)

RESULTADOS

Presentamos los resultados de las observaciones realizadas abordando cada una de las categorías de análisis con sus respectivas propiedades (ver cuadro 1).

Interacciones Patrón extractivo - embudo

Recordemos que el patrón extractivo - embudo se caracteriza porque el papel protagónico lo asume quien dirige la actividad; en este caso es el formador quien formula las preguntas, caracterizadas por ser cortas y a su vez inducen a respuestas breves. De igual manera, este tipo de preguntas exigen poca demanda cognitiva a quienes van dirigidas. En este mismo patrón, los errores o temáticas que no son del interés por parte del formador son dejados de lado.

En la sesión de formación en la cual se ubica este episodio, el formador previamente comienza comentando los resultados de una prueba de matemáticas aplicada a los docentes participantes en el programa de formación continua; en particular se comentan las respuestas a los problemas y ejercicios planteados alrededor de las fracciones y los porcentajes, lo que luego deriva en un diálogo sobre el tema de la enseñanza del concepto de fracción, tal y como aquí lo indicamos a continuación:

Formador 1 (F1): *Pero ¿cómo lo hicieron? ¿Qué contenidos? ¿Qué utilizaron ustedes? ¿Qué contenido?*

Docente 1 (D1): *Primero analizamos el enunciado del problema y también comenzamos a construir el rectángulo. Con las indicaciones comenzamos a hacer nuestro trazado...*

F1 interrumpe la intervención de D1

F1: *Y en ese trazado ¿qué conceptos están implícitos? porque ustedes dividen ese rectángulo en partes iguales ¿qué concepto está implícito ahí? ¿Qué concepto?*

(se oyen voces y los docentes intentan responder, como tratando de decir la respuesta esperada por F1, hasta que uno de ellos lo logra)

D1: *Por lo menos la función (otros continúan afirmando también la palabra función). Cuando están dividiendo el rectángulo en partes iguales, ¡la fracción!...*

F1: La fracción, ¿verdad?

Lo primero que distinguimos en el diálogo es el esfuerzo por parte del formador de dirigir la discusión hacia el tema de fracciones como parte-todo, es decir, dirigir la atención hacia la respuesta por él esperada (la correcta, de acuerdo a sus expectativas). Nótese que desde el inicio F1 retoma expresiones usadas por D1 como, “comenzamos a construir el rectángulo”, “comenzamos a hacer nuestro trazado” y las transforma si es necesario, que es el caso cuando F1 expresa “*porque ustedes dividen ese rectángulo en partes iguales*”. La idea es llevar la discusión al contexto de la fracción como parte – todo. Lo hace porque estas frases están muy relacionadas a la definición de fracción como parte - todo en la cultura escolar matemática. Este esfuerzo por parte de F1 por direccionar la discusión se consolida en el momento que cierra su intervención expresando “*¿verdad?*”. Con esta pregunta evita toda posibilidad de desviar la atención hacia otras temáticas y de esta manera, lograr la respuesta esperada.

Otra característica de F1 al asumir el patrón extractivo - embudo, es el dejar de lado expresiones que no se dirijan hacia el tema de las fracciones. Así, cuando D1 y otros participantes hacen mención a la función, F1 simplemente no toma en consideración tal respuesta y mucho menos indaga porqué hacen alusión a este término. Se reitera el interés de F1 en dirigir toda la atención de los participantes hacia las fracciones como parte-todo, de ahí que se queda con aquella palabra o frase que asume como respuesta correcta.

En relación a las características de las interrogantes y sus correspondientes respuestas, destacamos la formulación de preguntas breves que generan a su vez, respuestas cortas; por ejemplo, F1 formula preguntas como, “*¿qué concepto está implícito ahí?, ¿Qué concepto?*”, “*la fracción ¿verdad?*”. Una consecuencia de este tipo de preguntas es que inducen a respuestas breves que exigen poco esfuerzo cognitivo a los docentes participantes, ya que solo se requiere acertar la respuesta. En este caso D1 responde a lo que considera que F1 desea como respuesta.

Finalmente, en cuanto al error, notamos de parte de F1, no reaccionar como lo venía haciendo, sino que le da paso a F2. Observemos la siguiente parte del diálogo:

D1: ... entonces caen los niños en un error que a veces quieren utilizar una circunferencia y dividirla en cinco. No se puede dividir en 5 porque no tiene 5 partes iguales. Entonces allí es donde está la orientación del docente en decirle: Pueden

utilizar un rectángulo, verdad, y hasta los mismos cuadritos del cuaderno cuadriculado se dividen en 5 partes iguales.

Finalizada la intervención de D1, se abre un breve compás de espera en el que F1 no reacciona ante lo aseverado por D1 y es, ese momento, que interviene F2.

Este conjunto de interacciones muestra en F1 una tendencia a dirigir las intervenciones de los participantes hacia el tema de su interés, la fracción como parte – todo. Sus preguntas – la mayoría cortas - exigen respuestas breves y, en consecuencia, procesos cognitivos poco complejos; además, su desinterés por intervenciones donde se menciona otra temática y su deslinde ante un error presentado por uno de los participantes, nos permiten afirmar que F1 se inclina más hacia el patrón extractivo – embudo.

Interacciones patrón discusión - focalización

El patrón discusión – focalización se caracteriza porque quien dirige la actividad formativa lo hace a través de preguntas, ejemplos y contraejemplos, aprovechando el error para reflexionar y aprender sobre él. Como consecuencia las intervenciones de las participaciones se caracterizan por estar apoyadas en argumentos sustentados en la reflexión.

Este tipo de interacciones las hallamos registradas en el momento que surge un error relacionado con la representación figural de la fracción $1/5$ a través de un círculo. Quien la caracteriza mejor es el formador 2 (F2). En ese sentido, F2 no deja pasar los errores y los aborda y orienta a través de preguntas, permitiendo a quien se expresa de manera errónea, responder de manera acertada. Veamos cuando D1 confunde circunferencia y círculo:

D1: ... entonces caen los niños en un error que a veces quieren utilizar una circunferencia y dividirla en cinco (haciendo alusión a un círculo mediante gestos con su mano y una hoja). No se puede dividir en 5 porque no tiene 5 partes iguales. Entonces allí es donde está la orientación del docente en decirle: Pueden utilizar un rectángulo, verdad, y hasta los mismos cuadritos del cuaderno cuadriculado se dividen en 5 partes iguales.

Ante esa confusión entre circunferencia y círculo F2 interviene:

F2: *No entendí lo de las 5 partes iguales de la circunferen... (no termina la palabra), de la... ¿Estás hablando del círculo o circunferencia?*

D1: *“si, el círculo” ...*

A pesar de que D1 rectificó el mal uso del término “circunferencia”, continuó expresándose como si éste fuera sinónimo de círculo y F2 interviene nuevamente. Veamos la continuación del diálogo:

D1: *“si, el círculo”...A veces yo por lo menos he estado... siempre tuve la oportunidad de dar tres veces un tercer grado y entonces los niños querían hacer la división en una circunferencia (sic) de cinco partes iguales, entonces dividían a veces la circunferencia (sic) en 4 y agarraban una de las 4 y la dividían, o sea, se supone que si es una fracción, debe ser dividida en partes iguales, entonces en ese aspecto se le debe sugerir, al niño, utilizar las debidas figuras geométricas, cuáles se pueden dividir en partes iguales y cuáles no.*

F2: *¿Estás hablando del círculo o de la circunferencia?*

D1: *El círculo*

Luego de corregir una vez más el mal uso del término “circunferencia” por parte de D1, el formador F2 comienza a formular preguntas que orienten a reflexionar sobre lo afirmado por D1 en cuanto a “que no se puede dividir una circunferencia (círculo) en cinco partes iguales” haciendo referencia a la fracción $\frac{1}{5}$. Esta actuación de F2 lleva a otra característica del patrón discusión focalización que es la de promover la reflexión, buscando que los participantes respondan con argumentos. Veamos:

F2: *¿El círculo se puede dividir en 5 partes?*

D1: *No (es un No con voz prolongada) (A la vez que la maestra D1 se encuentra diciendo que no, se escuchan las voces de los demás participantes, algunos dicen que no y otros que sí.)*

D1 vuelve a intervenir

D1: *Necesariamente no, porque son partes iguales. Generalmente, (se escuchan voces de participación), generalmente, ¡exacto! (confirmando la intervención de otra maestra), son 4 partes iguales.*

F2: *¿Qué opinan los demás?*

F1: *¿Quién tiene una apreciación diferente?*

Observamos que F2 ante un error, reacciona sin corregir inmediatamente, pidiendo una aclaratoria. De esta manera F2 orienta la discusión a través de preguntas (“¿El círculo se puede dividir en 5 partes iguales?”). Producto de esas interrogantes se genera un debate entre los participantes y F2, verifica si se llega a la respuesta correcta a través de la argumentación de sus respuestas.

Es de hacer notar que ante esta actitud de F2, F1 asume una nueva posición y pregunta “*¿Quién tiene una apreciación diferente?*”. Pareciera que F1 rectifica su actitud inicial en este diálogo.

Al continuar la discusión, otra docente, D2, señala:

D2: *Sí se puede, porque en todo caso tendrías que medir el círculo, verdad, uno divide el diámetro (haciendo referencia al radio con sus manos) y lo va dividiendo, o sea, sí lo puedes dividir en 5 partes, partes iguales. Van a medir lo mismo, tú puedes dividir las 5 partes y que midan todo lo mismo, que el arco sea el mismo”,*

Aunque la explicación de D2 no es del todo correcta, se hace notar que D2 responde de acuerdo a lo que ella cree que es la respuesta correcta y la sustenta. Esto pareciera conducir a los participantes a entender que la situación expresada inicialmente es un error (indicar que un círculo no podía dividirse en 5 partes iguales).

Luego de la intervención de D2 quien afirma que, si se puede dividir un círculo en cinco partes iguales y, por tanto, representar de esta manera $\frac{1}{5}$, interviene nuevamente D1 y dice:

D1: *Lo digo por la experiencia de que a veces nosotros formamos la torta. Por lo menos yo a mis niños les digo: si yo tengo una torta y la divido en 2, entonces de una torta la dividí en 2, entonces esa fracción representa un medio, entonces ya ellos empiezan como a esquematizar que nada más voy a utilizar el círculo. Y si le presentas un quinto, ellos hacen a veces la circunferencia (sic) la dividen en 4 y uno del cuarto, ellos vienen y trazan la rayita. (Se interrumpe con intervenciones de otros que poco se entienden)*

De nuevo D1 reitera que no se puede dividir un círculo en cinco partes iguales; sin embargo, se observa un intento por matizar su respuesta. Por momentos D1 pareciera ya no situarse en el plano de las matemáticas, donde inicialmente contextualizó su intervención, sino en el plano de la enseñanza del concepto de fracciones. Para eso, D1 recurre a su experiencia y da indicios de que ese “no se puede” se refiere a que no es conveniente dividir el círculo en cinco partes iguales porque desde su perspectiva, confunde a sus estudiantes. Pasa a ser una argumentación más de tipo didáctica del contenido, que matemática. Sin embargo, se observa en el diálogo que la confusión existe y es por eso por lo que F2 insiste preguntando “...pero ¿se puede o no se puede dividir el círculo entre cinco?” a lo que los docentes responden que sí se puede. De esta manera F2 busca confirmar mediante esta pregunta si ya quedó superado el error, al menos por ese momento.

Luego F2 profundiza en el error que manifiesta D1 y retoma el ejemplo manifestado por este docente planteando la siguiente interrogante:

F2: Ok. Ellos hacen eso (dividir el círculo en cuatro partes iguales y tomar una de ellas y dividirla por la mitad). Eso es un error. Muy bien. ¿Por qué ese error? ¿Cuál es la causa?

Al plantear F2 la interrogante “¿Por qué ese error? ¿Cuál es la causa?”, notamos preguntas que exigen un esfuerzo cognitivo complejo, en este caso, promueve la metacognición y la argumentación. Se observa entre los participantes una posición a reflexionar sobre el error y así descubrir las causas. Ese proceso reflexivo se manifiesta en las siguientes intervenciones:

D3: Yo pienso que es por no utilizar los instrumentos de medición y ese es un hecho más complicado, para eso está el transportador.

F2: Aja, por una parte, eso puede ser algo, pero por qué tienden a hacer eso, ¿por qué tú dices que dividen primero siempre en 4?

Interviene de nuevo D1

D1: Bueno, porque generalmente, a veces por experiencia, nosotros tomamos el círculo y empezamos: un medio, un cuarto y eso es, pero a veces no le damos esas medidas al niño de un quinto y tomamos como que esa, ese cuidado, cuando es un quinto tenemos que hacerlo así, tomamos medidas, no porque como lo estamos iniciando en lo que es el conocimiento

de las fracciones. Entonces cuando a ellos se les presenta un quinto, ellos dividen, como ya están acostumbrados a ver un cuarto, dividen el círculo en 4 y unos de esos cuartos ellos lo comparten en 2.

F2: Pero ¿por qué hacen eso? Yo estoy de acuerdo contigo ...

D5: Porque para nosotros es más fácil enseñar a dividir al niño en pares (refiriéndose al denominador): vamos a dividir en un cuarto, vamos a tocar el dos cuarto. Siempre los estamos enseñando a dividir en pares y no estamos haciendo uso de los instrumentos de medición.

Formador 2: ¿Por qué la tendencia de los muchachos a irse a un cuarto, a un medio en un círculo? ¿Por qué será? ¿Es un problema de madurez mental o hay otras razones?

D4: Los esquematizamos, les enseñamos que solamente hay algunas figuras o elementos que se distribuyen en determinadas cantidades y el estudiante siempre aprende, se graba que siempre el cuadrado lo podemos dividir en 2 partes o en 4 partes. Esquematizamos esos modelos y no debe ser así.

Pudiera parecer en este momento que F2 intenta dirigir la atención a la respuesta correcta, pareciendo ubicarse en el patrón extractivo – embudo; sin embargo, el tipo de preguntas de F2, haciendo énfasis en el *por qué*, indican que su intencionalidad es promover la reflexión como recurso para hacer un análisis del error cometido por los estudiantes.

A partir de aquí el diálogo se abre ahora a discutir las razones por las cuales los estudiantes cometen este tipo de errores y F2 ofrece una explicación al respecto. De esta manera F2 cierra la actividad orientada a analizar las causas de los errores en las fracciones. El conjunto de estas intervenciones de F2 indican de su parte, una inclinación a favorecer interacciones de tipo focalización – discusión.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La información reporta interacciones promovidas por los dos formadores a partir de un planteamiento erróneo por parte de uno de los participantes en relación al tema de las fracciones, dando pie a distinguir en cada uno de ellos tendencias diferentes. Por una parte, F1 favorece

interacciones de tipo extractivo – embudo. Por otra parte, F2 tiende a promover interacciones del tipo discusión - focalización.

Para ayudarnos fijamos la atención en los siguientes aspectos derivados de las categorías y propiedades planteadas: intencionalidad de las preguntas por parte del formador y sus consecuentes respuestas en los participantes, demanda cognitiva que exigen las preguntas y posicionamiento de los formadores ante la aparición de planteamientos erróneos por parte de los participantes.

En cuanto a la intencionalidad, F1 toma en consideración sólo aquellas intervenciones que pueden ayudar a llegar a plantear el tema de las fracciones; a través de preguntas breves extrae la respuesta que considera que puede ser una guía o una señal para expresar la temática sobre la que versa la sesión de formación. Este tipo de posicionamiento de F1 coincide con los resultados de Pagés et al. (2018), cuando analizan las actuaciones de tres futuros profesores y observan una tendencia a direccionar las preguntas y afirmaciones a un tipo de respuesta determinada. Resultados semejantes coinciden con los de Leguizamón (2017) quien reporta la misma actitud en tres profesores pertenecientes a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). Se trata de una actitud que asume el control de parte de quien dirige la actividad con el fin de enfocar la atención en el tema que él desea, dejando de lado cualquier otro tipo de respuestas que desvíe su atención tal y como lo afirman Ingram y Riser (2019) y Donoso et al. (2020) en sus estudios, al indagar sobre el comportamiento y las interacciones derivadas de la actuación de profesores en sus clases.

Por su parte F2 asume una posición más orientadora que directiva cuando interroga. F2 plantea preguntas abiertas que permiten diversificar respuestas, buscando explorar el pensamiento de los docentes participantes. Esta actitud de F2 contrasta con F1 e igual con los resultados de los estudios ya mencionados (Leguizamón, 2017; Pagés et al., 2018; Ingram y Riser, 2019 y Donoso et al., 2020). Sin embargo, la manera de plantear las preguntas F2 coincide con lo reportado por Borssoi et al. (2021) quienes analizan las interacciones promovidas por un profesor al momento de una clase de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. Por su parte, Schleppenbach et al. (2007) en un estudio en el que comparan los discursos de profesores de China y EE. UU. notan en los profesores chinos una tendencia a formular preguntas abiertas como las de F2, situación que se nota en menor medida en los profesores estadounidenses. Estas divergentes posiciones indican cuánto dependen las interacciones de acuerdo a la intencionalidad - consciente o no - del tipo de preguntas.

Un segundo aspecto es en relación al tipo de respuestas de los profesores participantes a partir de las preguntas formuladas por los formadores. Como consecuencia lógica del tipo de preguntas, se observa que ante las interrogantes formuladas por F1, las respuestas de los profesores en la sesión de formación son generalmente breves, coincidiendo con lo reportado por Leguizamón (2017), Pagés et al. (2018), Ingram y Riser (2019) y Donoso et al. (2020). Al contrario, a las preguntas planteadas por F2 le corresponden en su mayoría respuestas más amplias, que vienen acompañadas de argumentos, tal y como también reportan los estudios de Borssoi et al. (2021) y de Schleppebach et al. (2007), estos últimos en el caso de los profesores de China.

Como consecuencia de la intencionalidad de las preguntas formuladas por F1 y F2 y sus respectivos tipos de respuestas, se evidencia que las demandas cognitivas varían entre ambos casos. En el caso de F1 las respuestas de los profesores participantes tienden a reflejar una baja demanda cognitiva; al contrario, en el caso de F2, las respuestas de los profesores participantes reflejan procesos cognitivos más complejos porque invitan a la reflexión y su consiguiente respuesta basada en argumentos. La aparición de respuestas que reflejan procesos cognitivos más complejos también es reportada por Borssoi et al. (2021); ellos observan que el profesor de matemáticas cuando orienta a sus estudiantes a modelar una situación relacionada con el contexto de sus estudiantes, ellos desarrollan más la argumentación y la reflexión por el tipo de preguntas promueven.

Respecto al posicionamiento del formador ante la aparición de los errores, la actitud de F1 es la de no darle importancia si esto supone desviar la atención al tema de la fracción como parte-todo; así, cuando D1 menciona la palabra “función” en un contexto de fracciones, él la elude, no indaga a qué se refieren aquellos docentes con esa afirmación. Por su parte F2 asume una actitud diferente, él reacciona ante el comentario erróneo que manifiesta D1 en relación a la representación de $1/5$ en un círculo. Estas diferencias entre F1 y F2, indican diferentes maneras de actuar ante el error, tal como lo reportan González et al. (2022) y Schleppebach et al. (2007); ambos estudios reportan dos tipos de posicionamiento ante el error, aquel en el que el profesor, ante la aparición de los errores es quien lo aclara y otro, en el que el profesor es quien orienta a sus estudiantes a analizar el error y reflexionar sobre él hasta lograr que el o los estudiantes tomen conciencia de sus respuestas erradas. Es decir, consideran la aparición del error en clase como una oportunidad para promover el aprendizaje en sus estudiantes.

CONSIDERACIONES FINALES

No queda duda que las interacciones promovidas por los formadores tienden a marcar una diferencia entre ambos. F1 muestra una tendencia hacia el patrón extractivo – embudo y F2 promueve más interacciones propias del patrón discusión – focalización, siendo diferentes las consecuencias de cada tipo de interacción. Por eso, como resultado de lo observado, hacemos un balance de estas consecuencias, sin pretensiones de generalizar.

En primer lugar, es claro que la intencionalidad de las preguntas planteadas por los formadores genera interacciones diferentes entre los participantes, lo que se ve reflejado en el tipo de respuestas y opiniones que surgen en el episodio. En el patrón extractivo – embudo, las respuestas son generalmente breves y con escasa argumentación; en el caso de interacciones tipo discusión – focalización, las respuestas por lo general vienen acompañadas de más argumentos. Al presentarse respuestas apoyadas en la argumentación, sean éstas erróneas o no, el patrón discusión – focalización promueve la reflexión entre los participantes, lo que evidencia procesos cognitivos más complejos que enriquecen los procesos de formación de profesores.

En segundo lugar, la manera como los formadores enfrentan el error es diferente en cada tipo de patrón. En el patrón extractivo – embudo, los errores en las respuestas de los participantes son ignorados o utilizados parcialmente para conveniencia del formador. Caso contrario sucede en el patrón discusión – focalización; el formador asume la presencia del error, lo enfrenta interrogando alrededor de él, evitando desde un principio emitir opiniones al respecto. El formador pregunta a los participantes con el fin de promover en ellos la reflexión y su correspondiente argumentación. De esta manera, los procesos cognitivos asociados a las preguntas son más ricos ya que son producto de procesos reflexivos, contribuyendo de esta manera a mejorar la formación de los participantes (Hummes, Font Moll y Breda, 2019).

Otro aspecto que destacar del episodio estudiado es la ratificación de lo afirmado por Pagés et al. (2018) y Hermkes et al. (2018), quienes reportan en sus estudios lo útil que resulta para el análisis de las interacciones en el aula, el establecimiento de patrones. Esta manera de estudiar las interacciones en el aula no solo tiene una utilidad metodológica para las investigaciones, también se constituyen en un recurso con mucho potencial para contribuir en la formación inicial de profesores, la formación continua y el desarrollo profesional de estos, ya que sirven para identificar las diferentes acciones que se desarrollan en el aula y su posterior análisis. Todo esto permite reflexionar

sobre las implicaciones de nuestras acciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En cuanto a las limitaciones de este estudio, dada su naturaleza y objetivos planteados, hay aspectos que no se pudieron profundizar como lo es, el alcance en la transformación de las prácticas educativas de este grupo de profesores en relación a la enseñanza de la conceptualización de las fracciones. Lo afirmamos, porque la persistencia de los errores juega en contra, como lo afirman numerosas investigaciones aquí ya mencionadas; en ese sentido creemos que el análisis de las interacciones en clases mediante patrones contribuye al diagnóstico de las situaciones de clase, sin embargo, la consolidación de la formación requiere de mayor tiempo y es por eso que proponemos continuar con este tipo de estudios en otros contextos y pensando, además, en la conveniencia de estudios longitudinales.

Otra necesidad que surge, dadas las limitaciones de este estudio, es la de investigar más al formador de profesores en cuanto a las interacciones que promueve en su labor profesional y su manera de abordar el error cuando éste surge en su aula. Este estudio acerca del formador amerita ser investigado tanto en el contexto de la formación inicial, como en la formación continua y el desarrollo profesional.

El camino está abierto a investigar la caracterización de los diferentes tipos de interacciones, sus respectivas limitaciones y potencialidades, más aún cuando se trata de estudios vinculados con el desarrollo profesional de los profesores y el papel de sus formadores.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES.

H.P.S. coordinó todo el proceso. G. P. y A. P. concibieron la idea presentada. Todos los autores desarrollaron la teoría. H.P.S. recolectó los datos. H.P.S. y A. P. adaptaron la metodología. Todos los autores analizaron los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor correspondiente, HPS, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Aguerrea, Maitere, Solís, María Eugenia y Huincahue, Jaime. (2022). Persistent mathematical errors when entering initial teacher math training: the linearity case. *Uniciencia*, 36(1), 49-65. <https://doi.org/10.15359/ru.36/1.4>
- Álvarez, y Carmen. (2011). El interés de la etnografía escolar en la investigación educativa. *Estudios Pedagógicos*, XXXVII(2), 267–279. <https://doi.org/10.4067/S0718-07052011000200016>
- Booth, Julie L.; Barbieri, Christina; Eyer, Francie & Pare-Blagoev, E. Juliana (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *The Journal of Problem Solving*, 7(1), 3. <https://doi.org/10.7771/1932-6246.1161>
- Borsoi, A.H., Silva, K.A.P. da e Ferruzzi, E.C. (2021) Aprendizagem Colaborativa no Contexto de uma Atividade de Modelagem Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 35(70). <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a17>
- Cangelosi, Richard; Madrid, Silvia; Cooper, Sandra; Olson, Jo & Hartter, Beverly (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions, *The Journal of Mathematical Behavior*, 2(1), 69-82. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.10.002>.
- Chick, H. & Beswick, K. (2018) Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *J Math Teacher Educ*, 21, 475–499. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y>
- Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 14, 31–47.
- Coll, C., y Sánchez, E. (2008). *Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación*. 346, 15–32. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:9a33c94d-977b-4290-bcaf-3ed775a8195b/re34601-pdf.pdf>
- Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de*

Investigación en Educación Matemática, 1(1), e202101.
<https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12>

- Cortina, José Luis; Zuñiga, Cñaudia y Visnovska, Jana (2013) La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7-29. <https://doi.org/10.24844/EM>
- Donoso Orosio, E., Valdés Morales, R., y Cisternas Núñez, P. (2020). Las interacciones pedagógicas en las clases de resolución de problemas matemáticos. *Páginas de Educación*, 13(1), 82-106. <https://doi.org/10.22235/pe.v13i1.1920>
- Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa*. Morata.
- Godino, Juan D. & Llinares, Salvador (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12(01), 70-92.
- Pinzón, Andrés; Gómez, Pedro & González, María José (2022) Mathematics Teachers' Feedback Responses to Students' Errors and Unexpected Strategies. *Australian Journal of Teacher Education*, 47(3), 19-34. <http://doi.org/10.14221/ajte.2022v47n3.2>
- Heinze, A. & Reiss, K. (2007). Mistake-handling Activities in the Mathematics Classroom: Effects of an In-service Teacher Training on Students' Performance in Geometry. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 31, pp. 9-16). Seoul, Corea: PME.
- Hermkes, R., Mach, H., & Minnameier, G. (2018). Interaction-based coding of scaffolding processes. *Learning and Instruction*, 54, 147–155. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.09.003>
- Hummes, Viviane; Font Moll, Viçent y Breda, Adriana (2019) Uso Combinado del Estudio de Clases y la Idoneidad Didáctica para el Desarrollo de la Reflexión sobre la Propia Práctica en la Formación de Profesores de Matemáticas: *Acta Scientiae* 21(1), 64-82. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>
- Ingram, J., & Riser, P. A. (2019). Experiences of problem solving in whole class interactions. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 16, 5–21.

- Lannin, J.K., Barker, D.D. & Townsend, B.E. (2007) How students view the general nature of their errors. *Educ Stud Math* 66, 43–59. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9067-8>
- Leguizamón, José Francisco (2017) Patrones de interacción comunicativa del profesor universitario de matemáticas. Un estudio de caso. *Praxis y Saber*, 8(16), 57-82. <https://doi.org/10.19053/22160159.v8.n16.2017.6200>
- McAllister, C.J. & Beaver, C. (2012), Identification of Error Types in Preservice Teachers' Attempts to Create Fraction Story Problems for Specified Operations. *School Science and Mathematics*, 112: 88-98. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00122.x>
- Mendoza von der Borch, T. (2018). Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 133–154. <https://doi.org/10.17227/rce.num74-6901>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principles and Standards*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Pagés, Daniela, Olave, Mónica, y Lezama, Javier. (2018). Estudio de interacciones en clase de matemáticas: un caso con futuros profesores de matemáticas. *Educación matemática*, 30(2), 140-170. <https://doi.org/10.24844/em3002.06>
- Parra-Sandoval, Hugo (2020). Problematización y conocimiento especializado del formador de profesores de Matemáticas. *Revista Paradigma*, 41, 251-270. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p251-270.id873>
- Plaza, L., González, J., y Vasyunkina, O. (2020). Obstáculos en la enseñanza – aprendizaje de la matemática. Revisión sistemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 295–304.
- Rhoads, K., Radu, I. & Weber, K. (2011) The Teacher Internship Experiences of Prospective High School Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 9, 999–1022. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9267-7>
- Sánchez-Barbero, B., Calatayud, M. y Chamoso, J. M. (2019). Análisis de la interacción de maestros cuando resuelven problemas realistas conjuntamente con sus alumnos en aulas de primaria, teniendo en

- cuenta su experiencia docente. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 40-59.
<https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.03>
- Santagata, Rosella (2005) Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508,
<https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.004>
- Schleppenbach, M.; Flevares, L. M.; Sims, L.M. & Perry, M. (2007) Teachers' Responses to Student Mistakes in Chinese and U.S. Mathematics Classrooms, *The Elementary School Journal*, 108(2), 131-147.
<https://doi.org/10.1086/525551>
- Singh, P., Hoon, T. S., Nasir, N. A. M., Han, C. T., Rasid, S. M., & Hoong, J. B. Z. (2021). Obstacles Faced by Students in Making Sense of Fractions. *The European Journal of Social y Behavioural Sciences*, 30(1), 34–51. <https://doi.org/10.15405/ejsbs.287>
- Smart, J. B. & Marshall, J. C. (2013). Interactions between classroom discourse, teacher questioning, and student cognitive engagement in middle school science. *Journal of Science Teacher Education*, 24(2), 249–267. <https://doi.org/10.1007/s10972-012-9297-9>
- Tulis, María (2013) Error management behavior in classrooms: Teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education*, 33, 56-68. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.02.003>
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 419–441.
<https://doi.org/10.1007/S10649-015-9606-2>
- Vélez Gutiérrez, C. F., y Ruíz Ortega, F. J. (2021). Una revisión sobre metacognición. Algunas implicaciones para los procesos educativos. *Tesis Psicológica*, 16(1), 100-117.
<https://doi.org/10.37511/tesis.v16n1a5>
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6(1)