

# Manifestações do Conhecimento de Professores de Educação Básica Primária (EBP) diante de Situações de Ensino da Geometria

## Manifestations of Knowledge by Primary Basic Education (PBE) Teachers in Geometry Teaching Situations

### Manifestaciones de Conocimiento por parte de los Profesores de Educación Básica Primaria (EBP) en Situaciones de Enseñanza de la Geometría.

Yetza Ximena Díaz Pinzón <sup>a</sup>

Fredy Enrique González <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Secretaría de Educación Municipal de Tunja, Institución Educativa Julius Sieber, Tunja, Colombia,

<sup>b</sup> Universidade Federal de Ouro Preto–UFOP; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática-PPGEDMAT; Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.

#### ABSTRACT

**Context:** This study is motivated by the authors' concern regarding the teaching of geometry in Colombian primary education. It is estimated that the undesirable outcomes in students' performance at this educational level are directly related to the geometry knowledge possessed by Primary Basic Education (PBE) teachers, based on the following guiding question: What is the individual knowledge, practices, processes, and goals of PBE teachers for teaching triangle geometry? **Objectives:** The purpose of this study was to examine the Didactic Content Knowledge (DCK) that PBE teachers should possess for teaching Triangle Geometry (TG), with an emphasis on: Concepts, Geometric Constructions, Language used to describe the constructions, Explanations provided by teachers regarding the constructions, as well as the various strategies that these teachers develop to transform TG content into comprehensible meanings for students. **Methodology:** This was an exploratory study. The Systemic Method supported by Grounded Theory was applied to process the information, using Open Inductive Coding procedures. The coding system was generated from data collected through participant observation techniques, complemented by documentary analysis. **Results:** Teachers demonstrated some difficulties and errors in constructing triangles, assigning their elements, and in the discourse used to describe them, which became obstacles. One of the most prominent challenges was the inability to identify the heights of triangles when they are not represented in their prototypical form. **Conclusions:** The exploratory nature of the study only allows for conjectures about the didactic knowledge that the participating teachers have regarding TG. However, it did reveal their doubts, difficulties, and conceptual shortcomings concerning this content. Additionally, it became evident that DCK is not only a theoretical tool for research but should also be included in initial and ongoing teacher training programs for PBE educators.

**Keywords:** Triangle Geometry, Mathematics Teaching, Teacher Education, Didactic Content Knowledge, Primary Basic Education.

#### RESUMO

**Contexto:** Este estudo é motivado pela preocupação dos autores em relação ao ensino da geometria na educação primária colombiana. Estima-se que os resultados indesejados no desempenho dos alunos desse nível educacional estejam diretamente relacionados aos conhecimentos sobre Geometria que os professores da Educação Básica Primária (EBP) possuem, a partir da seguinte pergunta norteadora: Quais são os conhecimentos, práticas, processos e finalidades individuais dos professores de EBP para ensinar a geometria do triângulo? **Objetivos:** O objetivo deste estudo foi examinar o Conhecimento Didático do Conteúdo (CDC) que os professores de EBP devem ter para o ensino da Geometria do Triângulo (GT), com ênfase em: Conceitos; Construções Geométricas; Linguagem usada para descrever as construções; e Explicações dadas pelos professores em relação às construções; assim como nas diferentes estratégias que esses professores desenvolvem para transformar os conteúdos próprios da GT em significados compreensíveis para os estudantes. **Metodologia:** Este estudo teve caráter exploratório; para o tratamento das informações, aplicou-se o Método Sistemático sustentado na Teoria Fundamentada, utilizando procedimentos de Codificação Indutiva Aberta. O sistema de codificação foi gerado a partir das informações coletadas por meio de técnicas de observação participante, complementadas com uma análise documental. **Resultados:** Tanto na construção dos triângulos quanto na atribuição de seus elementos e no discurso para descrevê-los, os professores apresentam algumas dificuldades e erros que se tornam obstáculos; um dos mais notáveis é o fato de não identificarem as alturas dos triângulos quando estes não são representados na forma prototípica. **Conclusões:** A natureza exploratória do estudo permite apenas fazer conjecturas sobre

Autor para correspondência: Yetza Ximena Díaz Pinzón Email: yetza.diaz@uptc.edu.co; matmatikestasahi@gmail.com

o conhecimento didático que os professores participantes têm sobre a GT; no entanto, foi possível revelar suas dúvidas, dificuldades e lacunas conceituais em relação a esse conteúdo. Além disso, percebeu-se que o CDC não é apenas uma ferramenta teórica para realizar trabalhos de pesquisa, mas deveria ser um dos conteúdos presentes nos programas de formação inicial e continuada dos professores de EBP.

**Palavras-chave:** Geometria do Triângulo. Ensino da Matemática. Formação de Professores. Conhecimento Didático do Conteúdo. Educação Básica Primária.

## RESUMEN

**Contexto:** Este estudio está motivado por la preocupación de sus autores relacionada con la enseñanza de la geometría en la educación primaria colombiana. Se estima que los resultados no deseados del rendimiento de los alumnos de este nivel educativo están directamente relacionados con los conocimientos sobre Geometría que poseen los profesores de la Educación Básica Primaria (EBP), a partir de la siguiente pregunta orientadora: ¿Cuáles son los conocimientos, prácticas, procesos y finalidades individuales de los profesores de EBP para enseñar la geometría del triángulo? **Objetivos:** La finalidad de este estudio fue examinar el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) que deben tener los profesores de EBP para la enseñanza de la Geometría del Triángulo (GT), con énfasis en: Conceptos; Construcciones Geométricas; Lenguaje usado para describir las construcciones; y, Explicaciones dadas por los docentes en relación con las construcciones; así como también en las diferentes estrategias que dichos profesores desarrollan para transformar los contenidos propios de la GT en significados comprensibles para los estudiantes. **Metodología:** Este estudio tuvo carácter exploratorio; para el tratamiento de la información se aplicó el Método Sistemático sustentado en la Teoría Fundamentada, aplicando procedimientos de Codificación Inductiva Abierta. El sistema de codificación se generó a partir de la información recolectada mediante técnicas de observación participante, complementadas con un análisis documental. **Resultados:** Tanto en la construcción de los triángulos, como en la asignación de sus elementos y en el discurso para describirlos, los docentes presentan algunas dificultades y errores que se convierten en obstáculos; uno de los más sobresalientes es el hecho de no identificar las alturas de los triángulos cuando éstos no son representados en la forma prototípica. **Conclusiones:** La naturaleza exploratoria del estudio sólo permite hacer conjeturas acerca del conocimiento didáctico que los profesores participantes tienen sobre la GT; sin embargo, sí se logró develar sus dudas, dificultades y carencias conceptuales con respecto a este contenido; además, se pudo percibir que el CDC no solamente es una herramienta teórica para realizar trabajos de investigación sino que debería ser uno de los contenidos presentes en los programas de formación inicial y continuada de los docentes de EBP.

**Palabras clave:** Geometría del Triángulo. Enseñanza de la Matemática. Formación de Profesores. Conocimiento Didáctico del Contenido. Educación Básica Primaria.

## INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Franco y Alsina (2022), en las próximas décadas, uno de los focos de investigación en la educación matemática infantil consiste en definir el conocimiento y las destrezas que los profesores deben poseer para enseñar matemáticas. Este artículo es uno de los productos de una investigación mayor, relacionada con los Conocimientos de los docentes de educación básica primaria colombiana para enseñar la geometría de los triángulos, entre cuyos propósitos está: analizar las condiciones y restricciones que tiene el profesorado de Educación Básica Primaria (de ahora en adelante EBP) sobre el conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), ante situaciones de enseñanza de la geometría de los triángulos. Como lo considera Rabanedo, *et. al.* (2023); la enseñanza de la geometría está desvinculada de la realidad de los estudiantes; las nociones relacionadas con la descripción y clasificación de figuras se reducen a la medición, la memorización y mecanización de fórmulas sin fundamento, y no se da cabida al cuestionamiento de los procesos; además, los temas relativos a la geometría se desarrollan, casi al final del año escolar, de manera irrelevante y se tratan sólo para cumplir con una planeación, mas no para desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes.

Desde 2021, la autora del presente trabajo, ha venido desarrollando un proceso de acompañamiento y formación a docentes que enseñan matemáticas en cursos de EBP en instituciones públicas del Municipio de Tunja Boyacá Colombia; con base en sus observaciones directas en las aulas de clase y charlas con los profesores, ha podido percibir que la mayoría de los docentes observados no cuentan con formación disciplinar en matemáticas sino que su formación básica es en otras disciplinas, tales como Ciencias de la Educación; Química y Biología; Psicopedagogía; Administración y Supervisión Educativa; y, Educación Física,

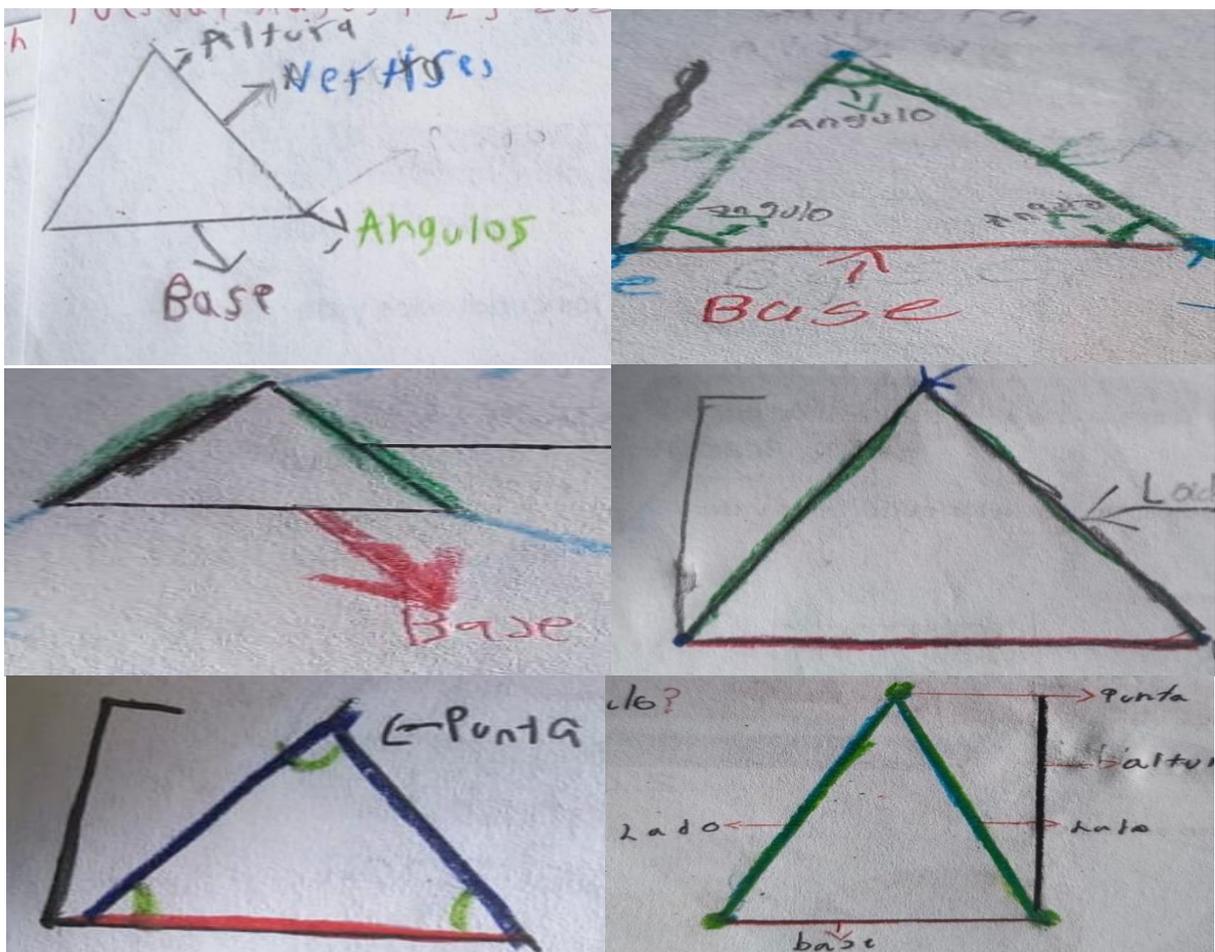
Recreación y Deporte; además, algunos que han concluido estudios de posgrado en áreas como Necesidades de Aprendizaje; Gestión Educativa; Tecnología Educativa; y, Educación Inclusiva e Interculturalidad, igual que quienes no han realizado estudios posgraduales, no tienen formación idónea para la enseñanza de las matemáticas. En el desarrollo de las actividades objeto de este artículo hay un caso excepcional; uno de los docentes observados, cuenta con formación en licenciatura y posgrado en educación matemática, y ha desarrollado toda su trayectoria laboral en la EBP y, aunque, en su discurso escrito usa el lenguaje y la simbología de manera más amplia que los otros docentes, no lo hace con rigurosidad.

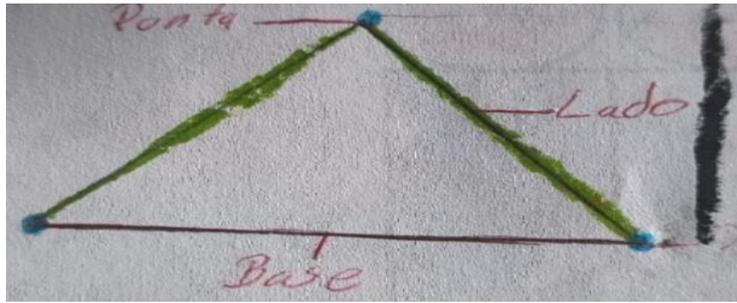
Debido a que normalmente la asignación académica para los cursos de EBP, en las instituciones públicas se realiza sin discriminar el perfil profesional, los docentes se declaran autodidactas y reconocen las dificultades que tienen para enseñar geometría debido a las carencias en su formación. Ellos saben identificar las características básicas y fórmulas tradicionales, pero no cuentan con alternativas inmediatas cuando se enfrentan a temas o términos desconocidos; generalmente, se valen de videos que proyectan a los estudiantes, y no permiten cuestionamientos para evitar dar detalles que pongan de manifiesto sus dificultades en el tema.

En el proceso de acompañamiento a los docentes en el aula, realizado durante el último semestre del año 2022, la investigadora visitó los diferentes cursos e interactuó con los niños; como ejemplo particular se toma la visita al quinto grado de primaria. Durante las clases observadas los docentes deberían abordar temáticas referentes al triángulo. Como actividad dinamizadora se pidió a cada uno de los estudiantes que dibujaran un triángulo en su cuaderno. En los tres cursos, sin excepción, los niños dibujaron un triángulo de la forma denominada como prototípica (Martínez, *et. al.*, 2017). Posteriormente, se les pidió señalar la base. Así, los estudiantes resaltaron el segmento paralelo al borde inferior del pizarrón, como lo ilustra la Figura 1.

**Figura 1**

*Algunas representaciones de triángulos realizadas por estudiantes de quinto grado de EBP*

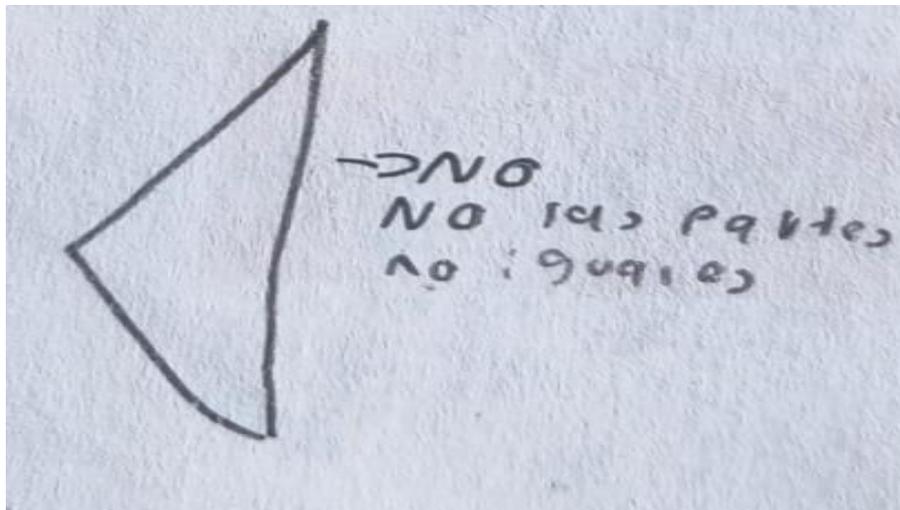




Luego, se tomó una escuadra en forma de triángulo escaleno y se les preguntó si, para ellos, esa forma representa un triángulo. La mayoría afirmó que no lo era, porque sus partes no son iguales, como muestra el ejemplo de la Figura 2; quienes no afirmaron esto, prefirieron no opinar.

### Figura 2

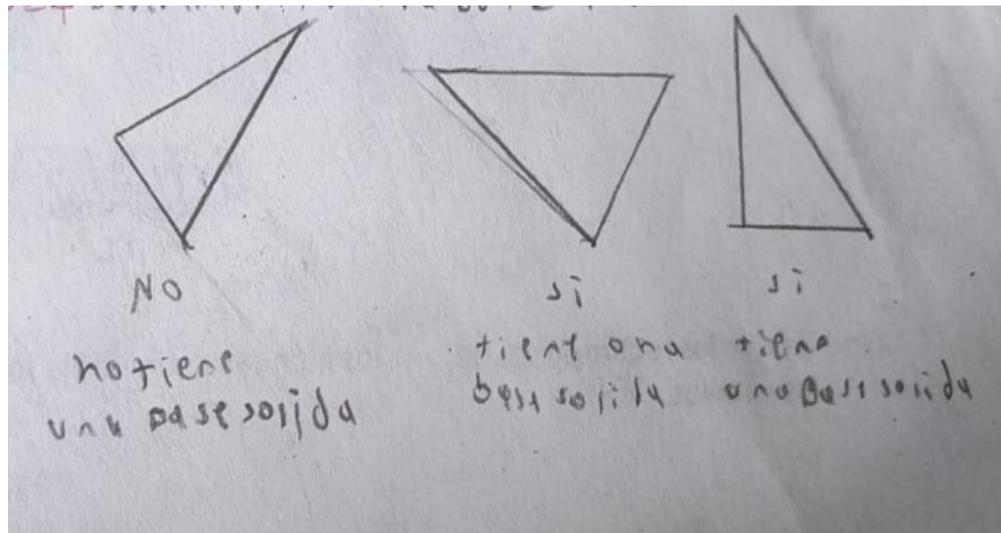
*Explicación de por qué la representación no es un triángulo, realizada por un estudiante de quinto grado de EBP*



Ante esta confusión se les aclaró que la escuadra sí representa un triángulo; de esta manera, se trasladó la forma al tablero, sin etiquetar vértices ni dejar segmento alguno paralelo a la parte inferior del tablero; luego, se les pidió que marcaran la base. Nadie acertó. Dijeron que no tenía base, porque no es posible apoyar el triángulo en una esquina (refiriéndose a un vértice), o como ilustran en la Figura 3 “no tiene base sólida”.

### Figura 3

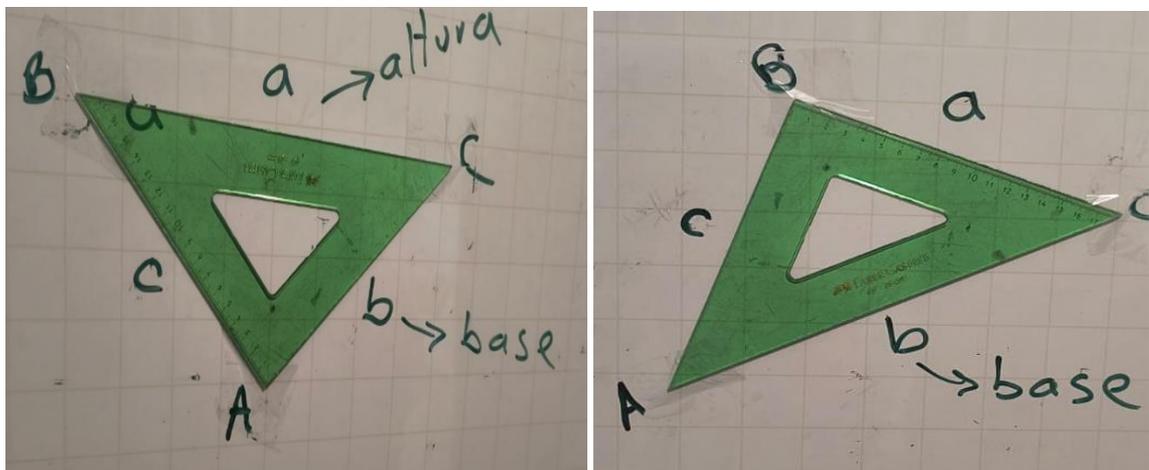
*Explicación de por qué la representación no prototípica de un triángulo no tiene base, realizada por un estudiante de quinto grado de EBP*



Ante los ejemplos anteriores y otros revisados, se les aclaró que, sin importar la posición de la figura, sí hay base, entonces, se marcaron los vértices y los lados y se les pidió señalar la base; así, marcaron el segmento etiquetado como  $b$ , y la explicación que dieron es que  $b$  significa base, refiriéndose a la inicial de la palabra; también, se les pidió que señalaran la altura. Según Jaime *et. al.* (1992), ante esta instrucción, se termina señalando el segmento más largo, tal cual como lo hicieron los estudiantes. Otros trazaron un segmento desde el vértice superior hasta el lado opuesto, pero sin tener en cuenta la perpendicularidad, un registro de esta descripción se observa en la Figura 4.

**Figura 4**

*Explicación de por qué la posición de la base y la altura de un triángulo, realizada por un estudiante de quinto grado de EBP*



Las situaciones anteriores muestran cómo los procedimientos de los estudiantes están ligados a paradigmas de representación asociados por la poca exploración y reflexión que se hace durante la enseñanza de la geometría de los triángulos y en muchas ocasiones coinciden con las concepciones que tienen los quienes enseñan los temas, como se podrá verificar en el análisis de las actividades aplicadas a los profesores.

Adicionalmente, no existen investigaciones locales que cubran esta problemática, los trabajos que se proponen normalmente son secuencias didácticas enfocadas a grupos de estudiantes y casi siempre reportan éxito en el aprendizaje como en el caso de Joya y Suárez (2020), pero no sacan a la luz, ni se confrontan las limitaciones de los profesores con respecto a la carencia de formación en el conocimiento didáctico del contenido.

A partir de los diálogos entablados con los profesores, los acompañamientos en aula, la interacción con los estudiantes, la revisión de los discursos, y el diseño de la enseñanza sobre los triángulos que se evidencia básica y poco explorada, se propuso a un grupo de profesores que orientan matemáticas en cursos en Educación Básica Primaria en un establecimiento oficial vinculado a la secretaría de Educación del municipio colombiano de Tunja (Boyacá), participar en una comunidad de aprendizaje enfocada a estudiar el conocimiento didáctico del contenido para la enseñanza de la geometría del triángulo (CAGT). A continuación, se presentan algunos estudios que son punto de partida para este trabajo y la descripción, análisis y discusión llevadas a cabo en una sesión (CAGT),.

## REVISIÓN DE LITERATURA

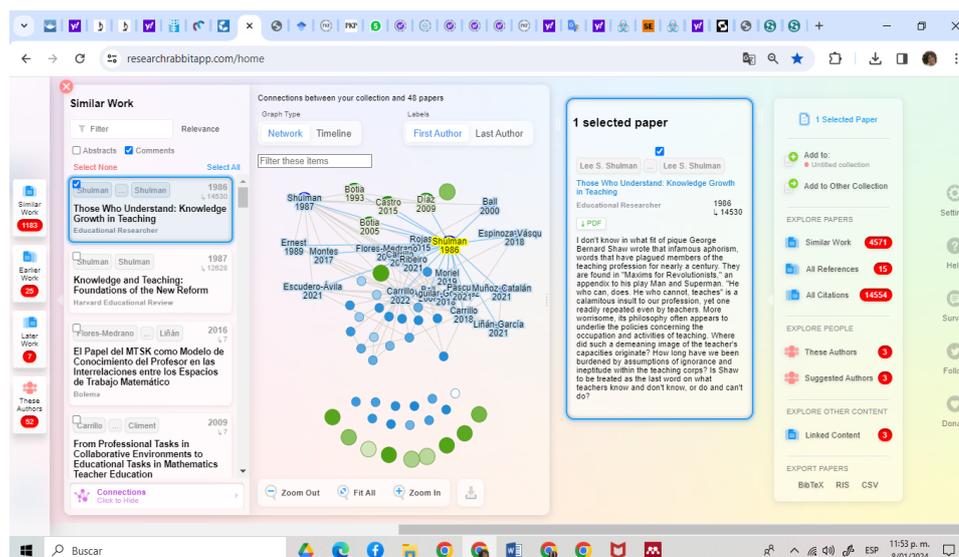
### Estudios sobre Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC),

Primordialmente se ha revisado literatura relacionada con los fundamentos del programa de investigación intitulado “Desarrollo del conocimiento en la enseñanza”, propuesto por Shulman (1986a) en su conferencia “El paradigma perdido en la investigación sobre la enseñanza”, refiriéndose al pensamiento del profesor sobre el contenido del tema objeto de estudio y su interacción con la didáctica, teniendo en cuenta las creencias y teorías implícitas acerca del conocimiento y la construcción de su enseñanza y que sustentan su práctica educativa; es esto lo que denomina Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), asunto éste que, en los últimos años, ha generado un monto cada vez mayor de investigación (Abell, 2007), dada su relación con los procesos de mejoramiento de las prácticas docente que ponen en juego los profesores; tanta relevancia ha alcanzado este tema que autores como Vergara Díaz y Cofré Mardones (2014), lo consideran como un programa apropiado para la formación de los educadores.

Para describir el CDC, Shulman (1987) propuso las siguientes categorías: Conocimiento del Contenido (SMK), Conocimiento del Currículo (CUK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), conocimiento pedagógico general (GPK), conocimiento de los estudiantes y sus características (LK), conocimiento del contexto educacional (CK) y el conocimiento de los valores, propósitos y fines de la educación (VAK), teniendo en cuenta los aportes de Verdugo-Perona, *et. al.* (2017); además, se le ha vinculado con el Knowledge Quarter (KQ), propuesto por Rowland, *et. al.* (2005), ya que posibilita la observación, el análisis y la discusión sobre las situaciones de aula en las cuales el conocimiento de los profesores es influyente. (Figura 2)

**Figura 5**

*Estudios vinculados con el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) (Shulman, 1986b), imagen generada con <https://www.researchrabbitapp.com/home>*



Otros estudios orientados a la comprensión del conjunto de conocimientos y habilidades que requieren los profesores para facilitar las tareas de enseñanza son los realizados por Ball (1988) y sus colaboradores, quienes han desarrollado el Modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) y el Modelo del

*Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*, ante la hipótesis de que el conocimiento que el profesor considera útil en su contexto de enseñanza y aprendizaje es especializado, tal como lo afirman Carrillo-Yañez *et. al.* (2018), sustentándose en las recomendaciones de Escudero (2015).

### **Estudios sobre Enseñanza de la Geometría**

Por otra parte, se ha hecho revisión de literatura relacionada con la enseñanza de la geometría, principalmente en Colombia, en este marco se ha identificado que

Gutiérrez (2011) ofrece un acercamiento a los principales elementos didácticos de la enseñanza de la geometría, según este autor el modelo de Van Hiele es el marco más efectivo para organizar la enseñanza de esta disciplina, en los diferentes niveles educativos, centrándose en las fases de aprendizaje, ya que orientan la organización del contenido de las secuencias de enseñanza de las matemáticas escolares; Gutiérrez también propone describir el aprendizaje de conceptos geométricos, a partir de la distinción entre las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales, para exponer cómo los ejemplos juegan un papel crítico; destaca la necesidad de que los profesores consideren las representaciones gráficas, físicas y mentales, utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y puntualiza sobre los elementos primordiales de los procesos y destrezas de visualización, inmersos en el trabajo con elementos geométricos. Estas reflexiones y propuestas serán tenidas en cuenta para plantear acciones de formación específicas en las necesidades de los docentes, haciendo uso del Modelo de Van Hiele (Falconí-Procel, 2021), la propuesta de Vinner (1991) y los Cores and Papers (Adam, 2014).

Por su parte, en el trabajo de Joya y Suárez (2020), llevado a cabo en la ciudad de Tunja, los autores dan a conocer el análisis de las conjeturas y caracterizaciones sobre los elementos notables del triángulo en geometría euclidiana, realizadas por un grupo de estudiantes de los últimos grados de secundaria sobre usando ambientes de geometría dinámica diseñados en GeoGebra. Los autores destacan el progreso en el pensamiento intuitivo y en el pensamiento espacial de los estudiantes, y el desarrollo de la competencia digital, evidenciados en el aprendizaje sobre rectas y puntos notables del triángulo, al identificarlos en la representación gráfica, priorizar el uso del lenguaje natural, hacer conjeturas y descubrir relaciones y propiedades de los triángulos. Estos elementos en los que mostraron progreso los participantes del estudio ofrecen un panorama sobre las orientaciones e ideas que deben trasladarse a los docentes de EBP.

El estudio de Arrieche *et. al.* (2018), aunque no se realizó con profesores en ejercicio, identifica los conflictos semióticos que subyacen en las dificultades y falta de conocimientos geométricos, manifestados por un grupo de estudiantes para ser profesores que enseñan Matemática (docentes en formación), al estudiar la geometría del triángulo con base el libro didáctico de Geometría Moderna de Edwin E. Moise, Floyd L. Downs Addison Wesley. Dadas las dificultades de los estudiantes para interpretar el contenido expuesto en el libro, el estudio determinó que es necesario que los docentes que dictan la asignatura Geometría, construyan material instruccional idóneo. Estas conclusiones ratifican la importancia de identificar las dificultades de los docentes y, así, preparar protocolos que propicien un adecuado acercamiento de los estudiantes con los contenidos geométricos que ellos deben aprender.

Por su parte, Martínez, *et. al.* (2017) examinan las dificultades que los estudiantes confrontan para identificar propiedades del triángulo, cuando se usan figuras prototípicas; en su estudio, desarrollado con niños de 6 a 12 años, los autores afirman que el prototipo de triángulo, predominante en la enseñanza de Geometría, es el equilátero; por tanto es necesario ampliar la gama de ejemplos y contraejemplos que se muestren a los niños, teniendo en cuenta que, antes de la capacidad de clasificar, el niño debe comprender las figuras e ir al concepto desde la percepción.

En el trabajo de Jaime *et. al.* (1992) y en el de Jaime (1996) se hace referencia a los errores, tanto en los enunciados como en las definiciones, así como a los usos inconsistentes e inadecuados, que aparecen tanto en libros de texto individuales como en series de textos para EBP. Examinando particularmente, las secciones dedicadas a la geometría de los triángulos y cuadriláteros, los autores identificaron los errores más frecuentes, los cuales se vinculan con la comprensión y el uso del lenguaje, destacando que el lenguaje icónico predomina sobre el verbal, lo cual interfiere en la capacidad para razonar y precisar definiciones, obstaculizando el progreso de los estudiantes en relación con sus niveles de razonamiento.

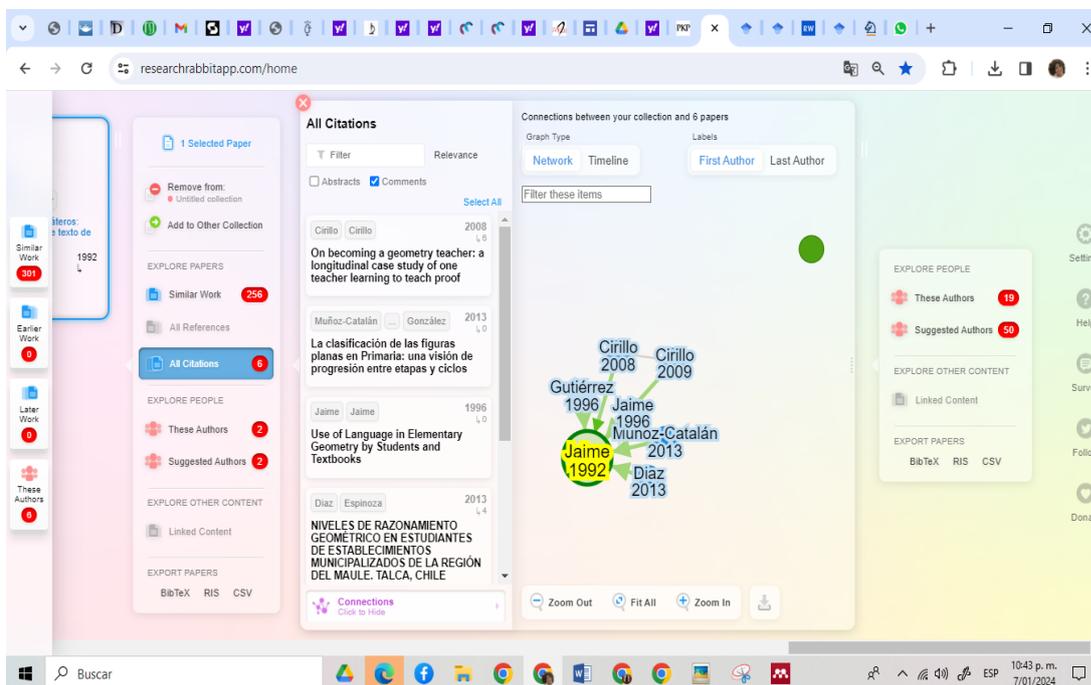
Otros trabajos consultados fueron los de Cirillo (2008, 2009) quien, durante un periodo determinado de tiempo, realizó un seguimiento al trabajo académico de un profesor de reciente ingreso, y logró identificar

que el docente cada año modificaba su discurso; también cambió su práctica; incluso, modificó el plan de estudios introduciendo nuevas actividades y tareas diferentes a las del libro guía con el que empezó, enfocándose en las pruebas y en la participación de los estudiantes bajo una práctica a la cual denominó Matemáticas Reales. En la investigación realizada por este autor, se destaca que el conocimiento que el profesor tenía sobre la disciplina lo hacía más creíble delante de los estudiantes y, además, le permitía fortalecer sus conocimientos curriculares y pedagógicos (Cirillo, 2008, p. 253). Además, el investigador llevó a cabo un análisis de las pruebas aplicadas por el profesor observado, encontrando cómo el tipo de prueba y el material curricular institucional, constituyeron un obstáculo para que el profesor pudiera poner en práctica su modelo de enseñanza, a pesar de su idoneidad disciplinar. Estos detalles contribuyen a destacar la importancia del conocimiento didáctico del contenido que debe tener un docente para enfrentar de manera idónea las situaciones de enseñanza, superando las barreras que los sistemas institucionales y aún bibliográficos pueden representar.

En el estudio de Muñoz-Catalán *et. al.* (2013), realizado en el marco de un Proyecto de Innovación Docente; los autores, presentan un material centrado en las figuras planas, como contribución para resolver las múltiples carencias en matemáticas que presentaban sus estudiantes (maestros en formación). Dado que los futuros formadores no solo deben planear los contenidos a enseñar, también deben saber qué y cómo saben sus alumnos sobre cuestiones que requieren un conocimiento profundo y sólido de las matemáticas. Los autores profundizaron en su propia comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza, desde la perspectiva de su evolución, y diseñaron actividades para la formación inicial de maestros de primaria, promoviendo el desarrollo del conocimiento profesional necesario para enseñar los contenidos matemáticos desde una perspectiva evolutiva entre etapas y ciclos que presentaban los maestros en formación.

## Figura 6

Estudios relacionados a la enseñanza de la geometría. Imagen generada en <https://www.researchrabbitapp.com/home>



## METODOLOGÍA

Este estudio tiene carácter cualitativo; para el tratamiento de la información se tomaron en cuenta principios del método sistémico asociados con la teoría fundamentada de Strauss y Corbin (2016), específicamente, lo relativo a la codificación inductiva abierta (Acuña, 2015). El sistema de codificación se generó a partir de la información recolectada mediante técnicas de observación participante, complementadas con un análisis documental.

Partiendo de: (a) los registros efectuados desde las observaciones realizadas durante el proceso de acompañamiento y formación llevado a cabo por la investigadora con los docentes mencionados en la introducción; y, (b) las recomendaciones formuladas en los documentos revisados durante la Revisión Sistemática de Literatura y las reflexiones que, sobre dichas recomendaciones, llevó a cabo la investigadora. Durante una sesión de acompañamiento se propuso a los profesores responder a cuatro puntos asociados con cuatro aspectos respectivamente: (1) Conceptos; (2) Construcciones Geométricas; (3) Lenguaje usado para describir las construcciones; y, (4) Explicaciones dadas por los docentes en relación con las construcciones. Esta sesión se denominó: “*Conocimiento de los profesores de EBP sobre la geometría del Triángulo*”.

Para la organización y análisis de la información se usaron herramientas como, *Google Académico*, *Mendeley*, y *Atlas TI*; con base en dicho análisis fueron construidas categorías que sirvieron de base para ayudar a responder a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los conocimientos, prácticas, procesos y finalidades individuales de los profesores de EBP para enseñar la geometría del triángulo?

### INFORMACIÓN RECOLECTADA

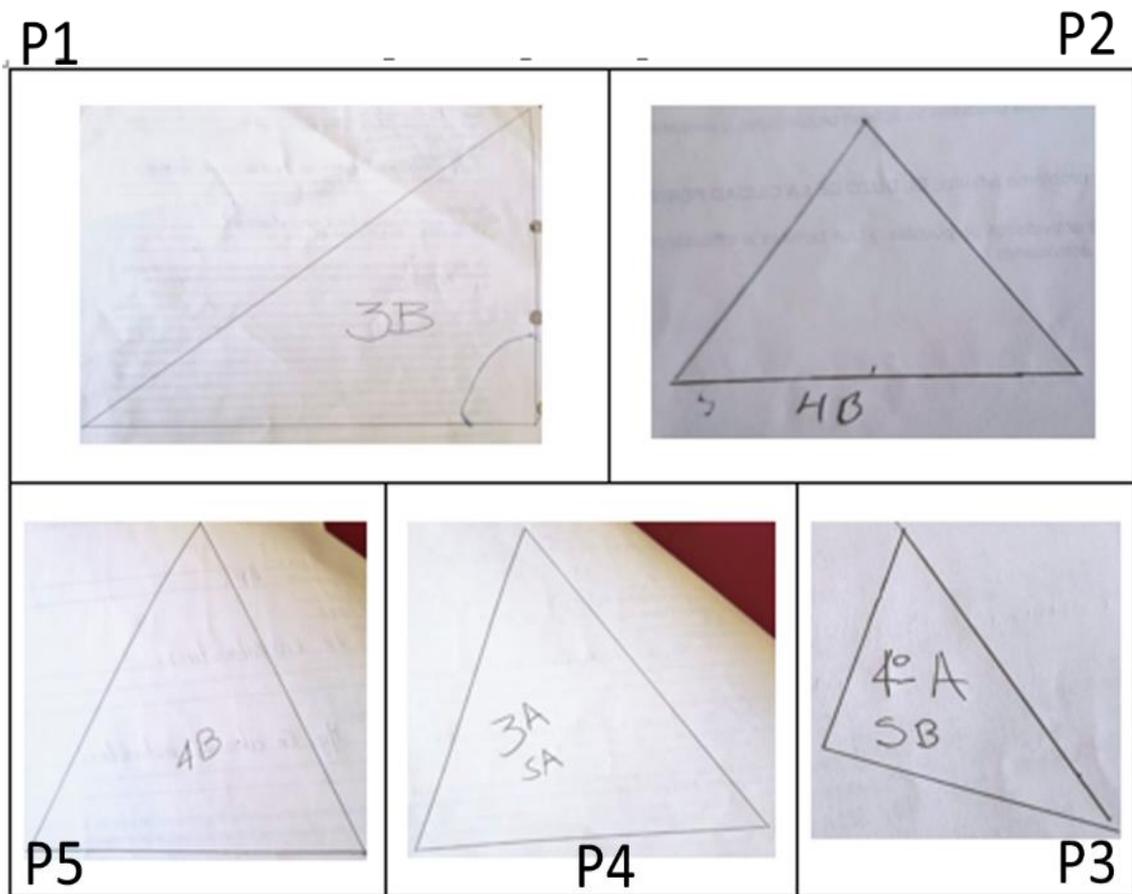
A continuación, se describen los desarrollos que presentaron los profesores en torno a las cuatro actividades planteadas. Los participantes se han etiquetado como P1, P2, P3, P4, P5 respectivamente.

#### Actividad 1. Conceptos.

A los docentes se les pidió que dibujaran un triángulo y lo expusieran en un cartel que fue fijado en el tablero. El propósito de esta actividad fue examinar las técnicas de construcción que aplicaban, así como también el modelo de triángulo que utilizaban. Los triángulos construidos por los participantes en el estudio, se muestran a continuación (Figura 4).

**Figura 7.**

*Triángulos construidos por los participantes.*



Como se puede observar en la Figura 4, P1 trazó un triángulo rectángulo, lo caracterizó destacando el ángulo recto, lo dibujó dejando un lado paralelo al borde derecho de la hoja y otro lado paralelo al borde inferior de la hoja; P2 dibujó un triángulo equilátero, (así lo describió verbalmente), trazó uno de los lados paralelo a la parte inferior de la hoja; P3 Dibujó un triángulo escaleno, con la particularidad de que ningún lado es paralelo a los bordes de la hoja, como lo definiera Jaime *et. al.* (1992) en posición no estándar; por su parte, P4 trazó un triángulo similar al triángulo P2, mientras que P5 trazó un triángulo isósceles, dejando el lado de menor longitud paralelo al borde inferior de la hoja. En todos los casos, los participantes sólo usaron una regla y un lápiz para dibujar los triángulos.

Nótese que P1, P2, P4 y P5 dibujaron el triángulo de la forma estándar, es decir, con un lado horizontal paralelo al borde de la hoja en la cual se realiza el dibujo; la recurrencia de esta manera de dibujar los triángulos de acuerdo con Jaime, *et. al.* (1992), se asocia con la frecuencia con la cual esta disposición de los lados de un triángulo aparece en los libros de texto usados para la enseñanza de la Geometría; otro aspecto a destacar es el relacionado con el uso exclusivo se regla y compás; esto se asocia con el hecho según el cual la imagen mental de un concepto empieza a construirse usando destrezas visuales sin involucrar, en principio, análisis matemáticos de los elementos o propiedades del concepto. Lo anterior muestra que en estos docentes también está presente la imagen prototípica del triángulo, de modo semejante a lo que ocurre con los estudiantes investigados por Martínez, *et. al.* (2017).

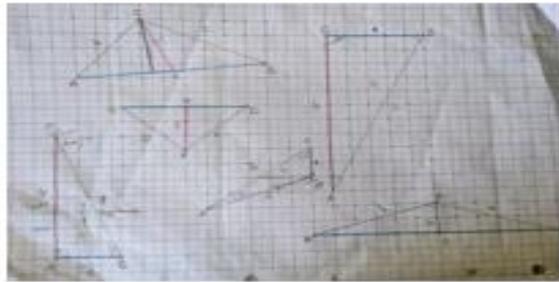
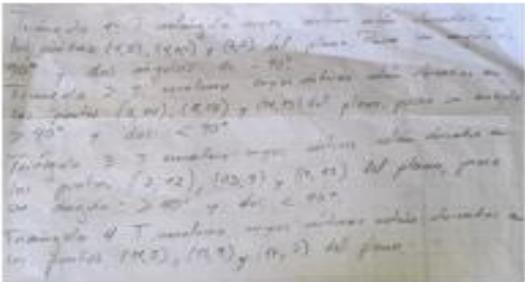
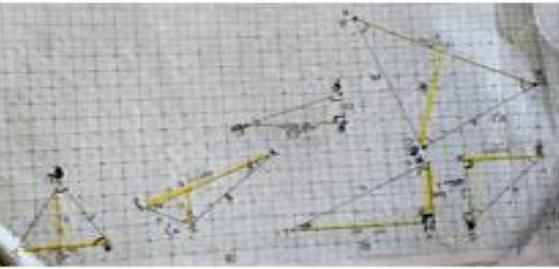
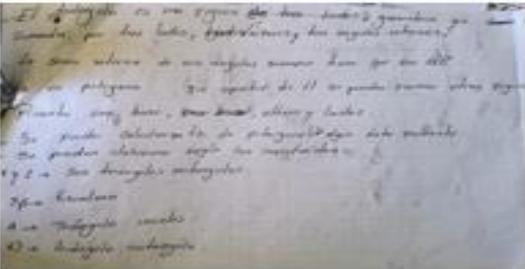
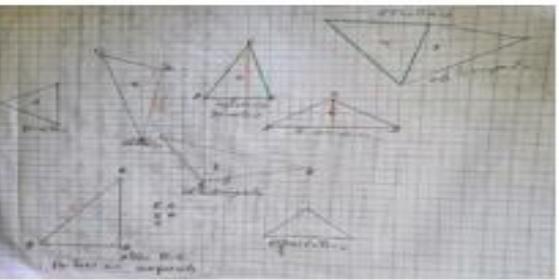
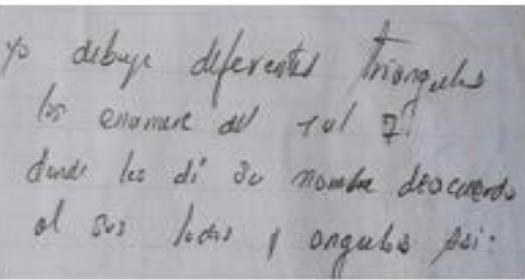
P1, P2, P4 y P5 corroboran la práctica tradicional de dibujar el triángulo con uno de sus lados paralelos al borde inferior de la superficie donde se realiza la construcción, en este caso la superficie era perpendicular al dibujante “plano horizontal”, pero al exhibirla en el tablero la superficie se convierte en un plano vertical y, normalmente, este lado se asume como la base. Notamos que en ninguno de los casos señalaron vértices, lados u otro componente, solamente P1 trazó un arco para indicar que era un ángulo recto, pero en general se limitaron a dibujar la figura sin caracterizarla. Se manifiestan algunas variables didácticas, es decir, elementos de las situaciones que el maestro puede modificar y pueden llegar a afectar la jerarquía de las estrategias de solución usadas por el alumno en diferentes situaciones, según Briand (1996, citado por Higuera, 1998). En este caso la posición puede influir sobre la percepción de las figuras y sus componentes, según el uso de la hoja milimetrada o la hoja cuadriculada convencional, así como también el plano sobre el cual se dibuje, si es el paralelo al piso, que normalmente corresponde a la mesa de escritura de los aprendices, o es el tablero perpendicular al piso, desde el cual normalmente instruye el maestro.

## **Actividad 2. Construcciones**

Se entregó a los participantes dos hojas de papel, una milimetrada y otra cuadriculada; se les instruyó para que, en la hoja que tuviese el diseño con el que se sintieran mejor, diseñasen una trama de puntos que simulara un geoplano; en el “geoplano” dibujado en la hoja, se les pidió que construyeran triángulos diferentes, indicando todos sus elementos. Adicionalmente, se les indicó que redactaran un texto, de 1000 palabras como máximo, en el que describieran las características de los triángulos por ellos construidos. Los triángulos construidos por los participantes, se muestran en la Figura 5.

### **Figura 8**

*Construcciones y caracterizaciones de triángulos en el geoplano, usando hoja milimetrada, realizadas por los participantes*

$P_i$	Construcción	Descripción
$P_1$		
$P_2$		
$P_4$		

P1 adaptó la trama de puntos indicada, solamente lo necesario, para cubrir la superficie de cada una de las figuras trazadas; dibujó dos triángulos rectángulos en forma estándar, omitiendo la condición de que consideraban diferentes ampliaciones o reducciones de un mismo triángulo; enumeró los triángulos; ubicó los vértices en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, organizando ABC desde el vértice inferior izquierdo. El texto redactado no responde a la instrucción dada, solamente aparece la denominación de cuatro de los triángulos, indica las coordenadas donde ubicó los vértices y cuántos ángulos son mayores o menores a 90 grados, pero usando simbología no convencional. Cada vértice lo hizo corresponder a una coordenada, esto hace inferir que tomó como referencia el cuadrante I del plano cartesiano, que aparece por defecto en la hoja milimetrada asignando como eje horizontal el borde de la hoja de mayor longitud (borde inferior, perpendicular al dibujante).

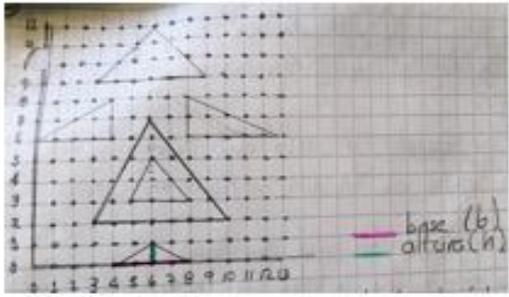
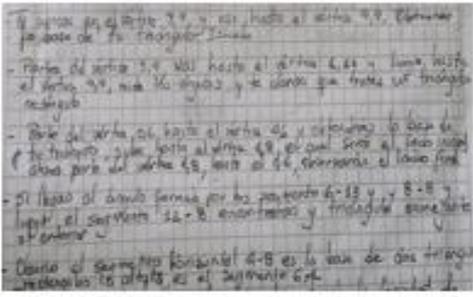
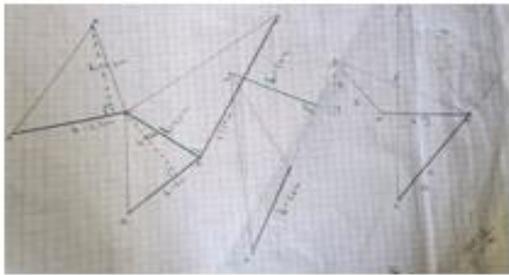
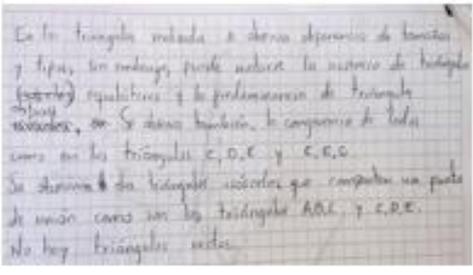
P2 utilizó la hoja milimetrada; construyó tres triángulos rectángulos, en los cuales marcó la altura en los catetos de mayor longitud; dibujó un triángulo equilátero al que también le marcó la altura correctamente, pero no fue así con los triángulos isósceles; posicionó los puntos del geoplano, y aparentemente usó como referencia el primer cuadrante como en el caso anterior; asignó en todas sus construcciones todos los elementos, pero al trazar las alturas en los triángulos 2 y 4 no hubo precisión, se infiere que esto se debe a que los lados que fijó como bases no son paralelos al lado inferior de la hoja de dibujo, como sucede con los triángulos 1, 3, 5 y 6. Esto se atribuye a un error didáctico de visualización (Jaime *et. al.*, 1992). La descripción es bastante general. No es muy precisa. Menciona, por ejemplo, “Se puede calcular Th Pitágoras de algún dato faltante”.

P4 no tuvo en cuenta el plano que por defecto aparece en la hoja milimetrada; tampoco trazó correctamente las alturas, excepto en un triángulo al que erróneamente etiquetó como isósceles escaleno; y en cuanto a la descripción, no la realizó.

En la Figura 9, se muestra las construcciones realizadas por los participantes que trabajaron con la hoja cuadriculada.

**Figura 9.**

*Construcciones y caracterizaciones de triángulos en el geoplano, usando hoja cuadriculada.*

$P_i$	Construcción	Descripción
$P_3$		
$P_5$		

Fuente: Registros fotográficos del Estudio

$P_3$  usó la hoja cuadriculada para trazar los triángulos; construyó un plano cartesiano; sin embargo, no describe con precisión los elementos, las coordenadas de algunos vértices no coinciden y no usó simbología para identificar ángulos, lados o vértices; usó una narrativa particular para describir los elementos de los triángulos, sin embargo, en cuanto a las definiciones y la simbología, es un discurso impreciso y sin rigurosidad.

$P_5$  utilizó la hoja cuadriculada; no trazó plano cartesiano ni simuló el geoplano, las figuras no señalan con precisión la ubicación de lados ni vértices, sin embargo, la relación entre el trazo de la base y la altura están bien. El discurso muestra imprecisiones sobre las ideas que tiene de los conceptos y la ubicación de los elementos, indica, por ejemplo, que no hay triángulos rectos (sin especificar las características de esa clasificación). Cabe mencionar que los docentes planean de manera autónoma, y replican frecuentemente el lenguaje elemental de los libros, incluyendo los aciertos y los errores (Jaime, 1996), sin cuestionamiento alguno.

Las construcciones y sus respectivas descripciones producidas por los participantes fueron analizadas en función de la identificación de los aciertos y errores apreciados, tanto en el manejo de los conceptos como en la identificación de los elementos notables de los triángulos; el resultado de este análisis se muestra en la siguiente Tabla.

**Tabla 1**

*Relación de aciertos y errores sobre de los participantes en el manejo de los conceptos como en la identificación de los elementos notables de los triángulos.*

Participante	P1	P2	P3	P4	P5
<b>Construcción del Geoplano</b>	1	1	1	0	0

<b>Uso y reconocimiento de elementos y conceptos asociados a la actividad</b>	Concepto de isometría	0	0	0	0	0
	Tipo de triángulos	1	1	0	0	0
	Coordenadas	1	0	1	0	0
	Vértices	1	1	0	1	0
	Lados	1	0	0	0	0
	Ángulos	0	0	0	0	0
	Base	1	1	0	0	1

(0 = error 1= acierto)

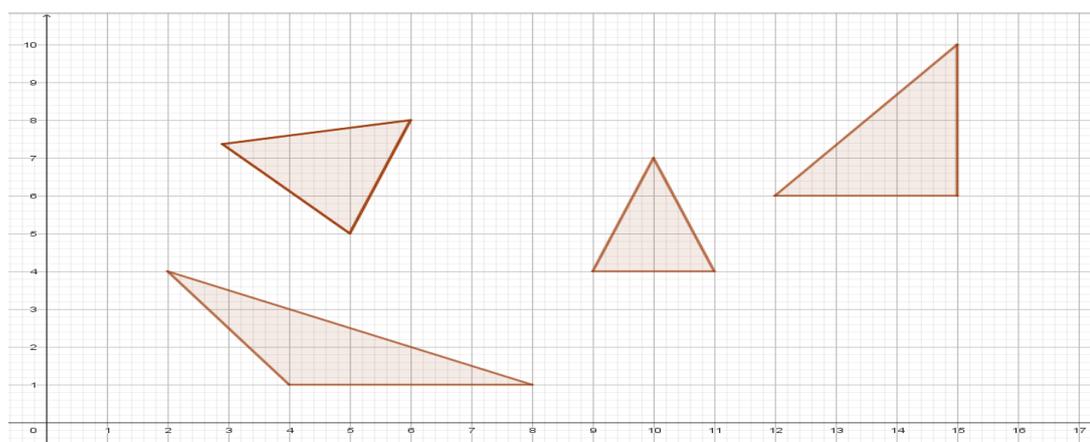
En la tabla 1 se consideran los conceptos geométricos involucrados en la construcción de un triángulo que son más conocidos por los participantes en el estudio; se aprecia que los elementos más reconocidos son la base y los vértices; sin embargo, la caracterización de ángulos y el concepto de isometría no están claros para los participantes. También puede establecerse que solamente dos participantes reconocen mas de la mitad de los elementos.

### Actividad 3. Lenguaje Utilizado en la Construcción de Triángulos

A cada uno de los participantes les fue entregada una hoja de papel en la cual estaban dibujados varios triángulos (Figura 10).; su tarea consistía en observarlos para que, luego, identificaran sus elementos, indicaran su tipo teniendo en cuenta la clasificación en función de sus ángulos y sus lados y, finalmente, explicaran de manera detallada cómo se podría hallar el perímetro y el área de cada uno de los triángulos.

#### Figura 10

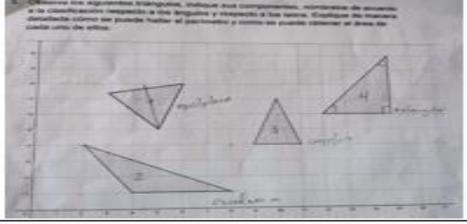
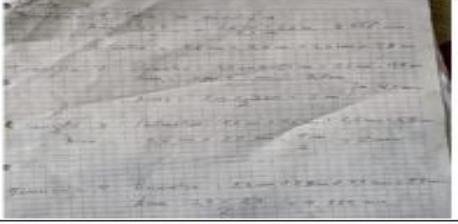
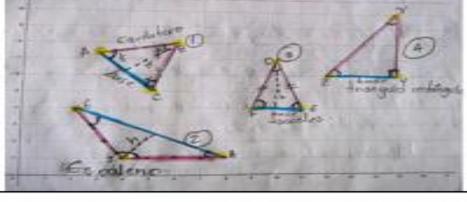
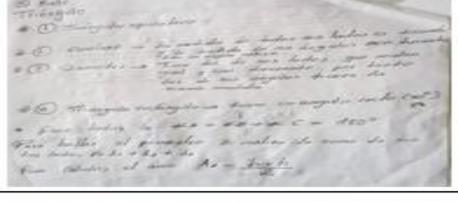
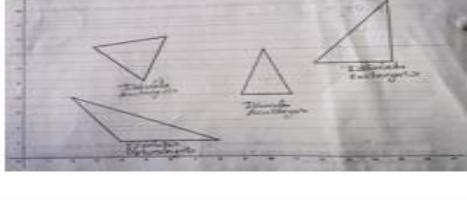
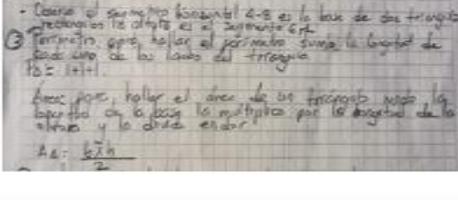
*Imagen de la hoja contentiva de los triángulos que debían ser analizados.*



A continuación, se muestra las respuestas dadas por los docentes Figura 11 y 12 y las correspondientes reflexiones.

#### Figura 11

*Construcciones y caracterizaciones de triángulos realizadas por los participantes P1, P2, 93*

P <sub>i</sub>	Construcción	Descripción
P <sub>1</sub>		
P <sub>2</sub>		
P <sub>3</sub>		

En la Figura 11 se puede apreciar que P1 enumeró los triángulos y solamente los etiquetó teniendo en cuenta los nombres con respecto a la longitud de los lados, pero no señaló los segmentos que tuvo en cuenta como bases o como alturas; calculó los perímetros y áreas correspondientes, usando la fórmula convencional  $(base \cdot altura) / 2$ , aunque durante la formulación no multiplicó la unidad de medida, por lo tanto, el área resultante la expresó en centímetros lineales; no usó como referente de medida la cuadrícula, sino que tomó sus propias medidas con una regla y las expresó en centímetros.

P2 Fijó las bases en diferente lado; no conservó un patrón, sin embargo, las alturas asociadas a las bases que no son paralelas al lado inferior de la hoja de dibujo no están bien trazadas, pues no son perpendiculares al lado opuesto al vértice, esto es notable en los triángulos 3 y 5. Aunque P2 posee un poco más de información, en cuanto a simbología y uso de lenguaje matemático, debido a su formación disciplinar en el área, no los usa adecuadamente.

### Figura 12

*Construcciones y caracterizaciones de triángulos realizadas por los participantes P4 y P5.*

$P_1$	Construcción	Descripción
$P_4$		
$P_5$		

Fuente: Registros fotográficos del Estudio

$P_3$  y  $P_4$  evidencian el reconocimiento de los triángulos como objetos de tres lados que se unen en los vértices, pero no tienen precisión sobre otros elementos.  $P_3$  etiquetó el triángulo equilátero como un triángulo isósceles acutángulo, debido a que el triángulo no aparece en forma estándar, término adoptado en este artículo de acuerdo con Jaime *et. al.* (1992). Se supone que la posición del triángulo le permite ver al participante que aparentemente hay un lado de mayor longitud; en cuanto a las áreas y perímetros simplemente describe las fórmulas convencionales, pero no realiza ningún cálculo. Mientras que  $P_4$  enumeró los triángulos, trazó las alturas de manera correcta en el equilátero y en el isósceles, en los otros dos solamente determinó el perímetro de los triángulos, tomó unas medidas convencionales y con ellas halló el perímetro y el área usando la fórmula  $(b \cdot h)/2$ . Un caso particular es que el perímetro del triángulo equilátero lo halló sumando dos de los lados del triángulo y la altura (que trazó de manera correcta).

$P_5$  etiquetó las figuras directamente; marcó los vértices con letras mayúsculas, aunque usó simbología asociada a las características de los triángulos, la usó de manera incorrecta. También describe cómo hallar el perímetro de los triángulos, pero cuando especifica cómo hallar el perímetro del triángulo rectángulo, al que llama recto, menciona al teorema de Pitágoras, no obstante, cuando se refiere al perímetro del equilátero es el único participante que simplifica la suma de los lados con una multiplicación.  $P_5$  siempre tuvo en cuenta que la altura debe ser un segmento que sea perpendicular al lado opuesto del vértice desde donde se trace la altura, (esto no lo indica en su discurso, se infiere al analizar las construcciones).

Los profesores construyeron con algunas imprecisiones los elementos del triángulo, así mismo, determinaron perímetros y áreas, sin usar fórmulas alternativas a la tradicional que involucra bases y alturas. Evidencian dificultades para describir verbalmente las propiedades y elementos de los triángulos, situación vinculada a los supuestos que relacionan los conceptos con las definiciones, planteados por Vinner (1991). Se presentaron varias inquietudes durante la aplicación de la actividad anterior, por ejemplo: ¿cuál es la altura de un triángulo?, ¿cuál es la base de un triángulo?, ¿depende de la posición?, ¿cómo definir verbalmente las alturas de un triángulo?, ¿cuál es el criterio para trazar y definir la altura de un triángulo?, ¿cuántas formas existen

para determinar el área de un triángulo?, ¿los vértices de un triángulo tienen un orden?, ¿un triángulo tiene más de una altura?, ¿es relevante el hecho de dibujar sobre un plano paralelo al piso (horizontal) o sobre uno paralelo a la pared (vertical)?

#### Actividad 4. Explicaciones dadas por los docentes en relación con las construcciones realizadas

Una vez los participantes resolvieron las tres primeras actividades se quiso confrontar su experiencia frente a las construcciones y conceptos que abordaron. Durante el proceso mostraron inseguridad, algunos acudieron a consultar en el teléfono móvil para recordar fórmulas o formas, por lo tanto, se les pidió ser lo más objetivos y honestos posible en sus respuestas a las siguientes Preguntas: (1) ¿Qué sabe sobre los triángulos? (2) ¿Qué ignora sobre los triángulos? (3) ¿Qué utilidad encuentra en la enseñanza de los triángulos? (4) ¿Cuáles son las dificultades más frecuentes de los estudiantes al estudiar los triángulos? (5) ¿Cuáles inquietudes le genera tener que enseñar la geometría de los triángulos? (6) ¿Qué tipo de materiales o recursos ha utilizado para enseñar la geometría de los triángulos?

A continuación, en las Tablas 2, 3, 4, 5, y 6 son presentadas las respuestas dadas por los participantes a estas cuatro cuestiones.

**Tabla 2**

*Respuestas a las preguntas 1 y 2*

Participante $P_i$	¿Qué sabe sobre los triángulos?	¿Qué ignora sobre los triángulos?
$P_1$	Componentes, determinar áreas y perímetros.	El nombre de los triángulos según sus lados y según sus ángulos.
$P_2$	Identifico sus elementos internos y externos, reconozco su clasificación y características.	Algunos detalles.
$P_3$	Lo que he tenido que aprender para poder enseñar, teniendo en cuenta mis saberes previos, adquiridos en mi formación primaria y secundaria.	Bastantes aspectos por falta de formación en matemáticas.
$P_4$	Las clases de triángulos, hallar las áreas y perímetros.	Ignoro mucho no es mi fuerte
$P_5$	Tienen 3 lados, tres vértices y tres ángulos, se pueden clasificar de acuerdo a sus ángulos ( $P_5$ hace esta indicación usando el símbolo $\sphericalangle$ ) y lados, pueden extenderse a partir de un vértice y dos lados, pueden ser adyacentes, la suma de sus ángulos internos debe ser $180^\circ$ , existe un teorema o fórmula para hallar la hipotenusa de un triángulo recto y es el teorema de Pitágoras.	¿Cómo hallar la medida de un lado inclinado en una cuadrícula sin necesidad de regla? ¿Dónde ubicar exactamente la base?

**Tabla 3**

*Respuestas a las preguntas 3*

Participante $P_i$	¿Qué utilidad encuentra en la enseñanza de los triángulos?
$P_1$	Para determinar áreas de determinados lugares, son la base para el álgebra.
$P_2$	Que es una figura geométrica básica en el entorno escolar y en el contexto exterior. En el contexto real se observa con mayor detalle su utilidad.
$P_3$	Despertar el interés de los estudiantes por las formas y características de los objetos del entorno. Así mismo, es un tema que permite reforzar temas anteriores; permite contextualizar al estudiante en resolución de problemas con el uso de operaciones (multiplicación y división).
$P_4$	Llevarlos a la vida práctica, encontrar figuras con cada uno de los triángulos.
$P_5$	Para dividir un círculo, para realizar figuras artísticas del entorno.

**Tabla 4***Respuestas a las preguntas 4*

<b>Participante <math>P_i</math></b>	<b>¿Cuáles son las dificultades más frecuentes de los estudiantes al estudiar los triángulos?</b>
P1	Identificar los nombres y la clasificación de los triángulos.
P2	La clasificación según sus ángulos y hallar el área.
P3	La medición de ángulos y la clasificación, según sus lados y ángulos.
P4	Confusión.
P5	Las clases de ángulos y su unión con la clasificación de los triángulos

**Tabla 5***Respuestas a las preguntas 5*

<b>Participante <math>P_i</math></b>	<b>¿Cuáles inquietudes le genera tener que enseñar la geometría de los triángulos?</b>
P1	Por ser un tema complejo ¿cómo enseñarles a los niños a procesar información para la vida cotidiana?
P2	Olvidar algunos conocimientos básicos
P3	Despertar el interés del estudiante por las formas y características de los objetos del entorno. Es un tema que permite reforzar temas anteriores y contextualizar al estudiante en resolución de problemas con el uso de multiplicación y división.
P4	Si no sé, es mejor no enseñar hasta aprender o averiguar.
P5	¿Cómo enseñar sin que sea tedioso ni repetitivo, sino inductivo y analítico?

**Tabla 6***Respuestas a las preguntas 6*

<b>Participante <math>P_i</math></b>	<b>¿Qué tipo de materiales o recursos ha utilizado para enseñar la geometría de los triángulos?</b>
P1	Palos de paleta, pitillos, fósforos, las reglas, escuadras, recortes, punteado con figuras de triángulo
P2	Palillos plastilina, Geogebra, Cabri, regla y graduador, papel tijeras
P3	Textos y tablero
P4	Escuadra, graduador, compas, regla, apoyo audiovisual, libros.
P5	Videos, figuras en papel, origami, juegos interactivos de atención y memoria, palos de paleta, pinchos plastilina

En principio, de acuerdo con las respuestas presentadas en las Tablas 2, 3, 4, 5 y 6 se observa que los docentes no tratan detalles fuera de lo convencional; sin embargo, en las respuestas a la segunda pregunta dan a entender que es su falta de formación en el área la que les impide tener un conocimiento más sólido, pero, a pesar de eso, usan sus saberes previos y lo refuerzan de manera autodidacta, en algunos casos, por miedo a preguntar y dejar en evidencia su desconocimiento.

Los docentes no relacionan la utilidad de la enseñanza del triángulo con situaciones ajenas al propio triángulo, no consideran otras opciones relativas a la ciencia, a la tecnología, o a estrategias de pensamiento y conocimiento, e identifican en sus estudiantes las mismas dificultades que ellos reflejan en sus respuestas.

Las respuestas relativas a las inquietudes sobre la enseñanza y los materiales reflejan que requieren reforzar sus conocimientos sobre los triángulos y que, aunque acuden a diversos materiales y ayudas, los usan de manera restringida e inmediata, lo cual no permite darle la trascendencia a la enseñanza del triángulo como lo amerita y se sigue concibiendo como una simple figura geométrica que todos identifican de manera visual, pero sin el conocimiento geométrico pertinente. La intención de aplicar la actividad 4 fue permitir que los participantes cuestionaran sus conocimientos una vez habían resuelto las demás actividades, pues podrían establecer tanto sus facultades como algunas dificultades.

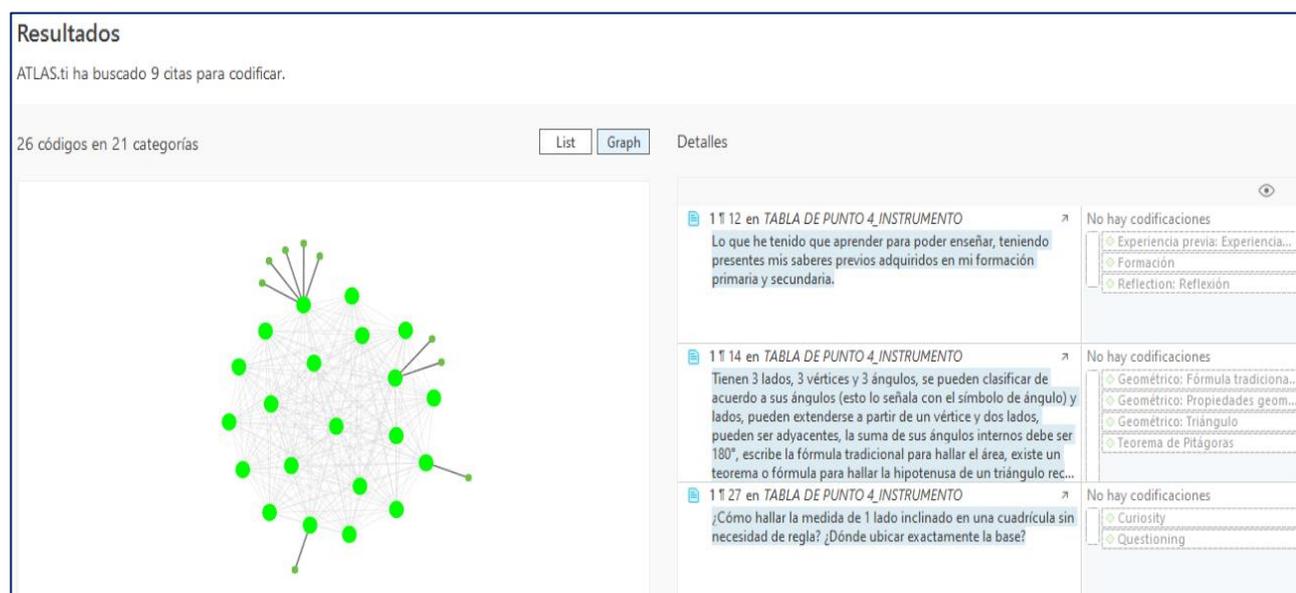
## ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Para este análisis se acudió a la codificación inductiva a partir de las respuestas consignadas por los participantes a las preguntas (1) a (6), arriba señaladas y organizadas en las Tablas 2, 3, 4, 5 y 6; dichas respuestas se estructuraron en un documento único, el cual fue analizado con el software Atlas TI; de ese modo fueron identificadas 21 categorías y 26 códigos articulados con 9 citas.

Entre los códigos destacados y recurrentes se encuentran los siguientes: (1) conocimiento específico en geometría del triángulo; (2) aprendizaje; (3) enseñanza; (4) formación; (5) fórmula del área de un triángulo; (6) Teorema de Pitágoras; (7) falta de conocimiento; (8) incertidumbre; (9) preguntas sobre matemáticas; (10) contexto; (11) educación; (12) juegos; (13) operaciones; (14) motivación; (15) utilidad; (16) inseguridad; (17) niños; (18) procesamiento de información; (19) autodidactismo; (20) falta de información; (21) conocimientos; (22) prácticas de los profesores; (23) enseñanza de la geometría, (24) ángulos y triángulos; (25) materiales. (Figura 12)

**Figura 13.**

*Gráfica de la red que relaciona códigos, categorías y citas*

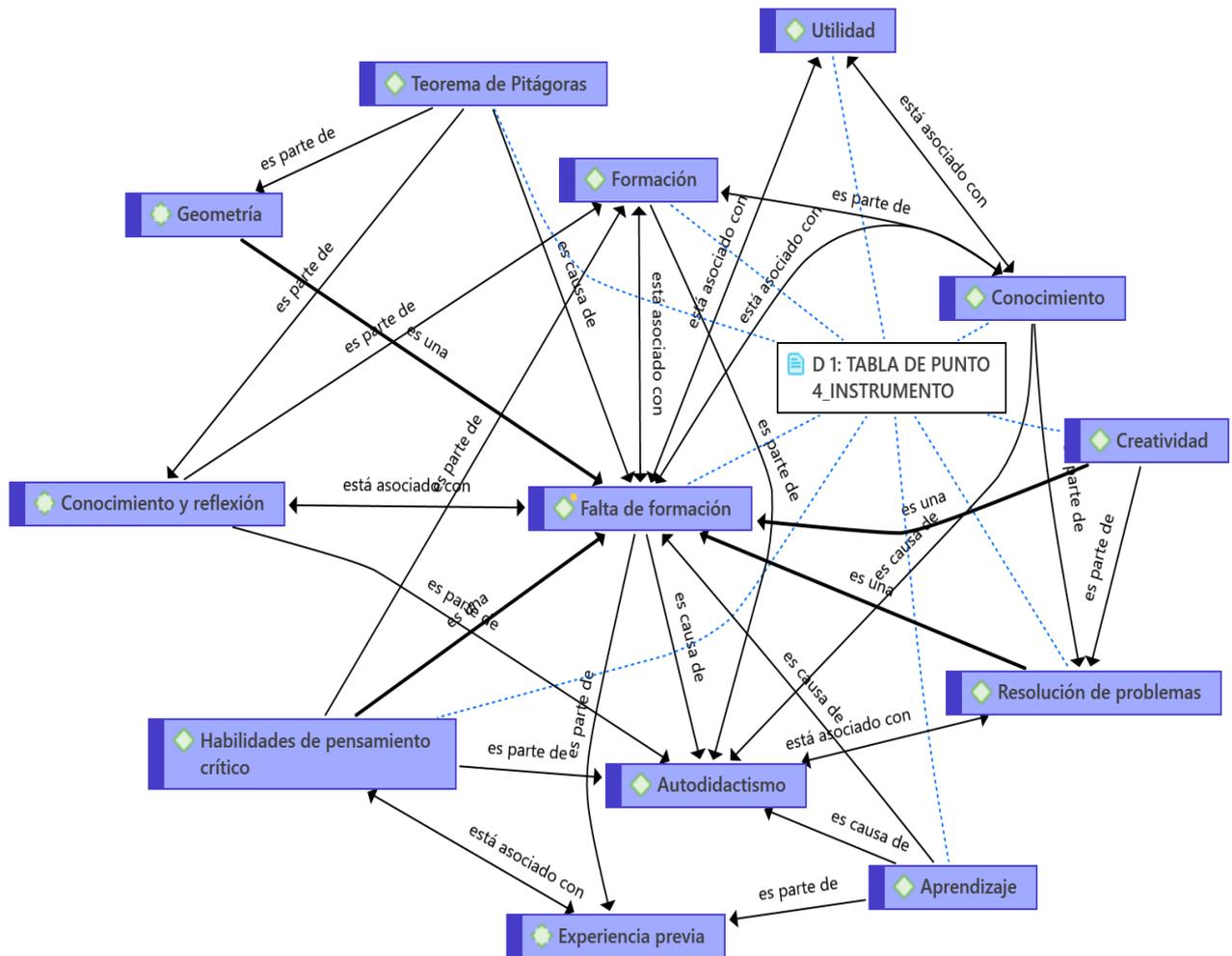


Esta codificación fue depurada teniendo en cuenta la densidad y se obtuvieron las siguientes redes cuyo núcleo será el punto de atención al responder la pregunta planteada: ¿Cuáles son los conocimientos, prácticas, procesos y finalidades individuales de los profesores de Educación Básica Primaria (EBP) para la

enseñanza de la geometría del triángulo? En las Figuras 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 y 23 se muestran las redes asociadas a las categorías resultantes de la codificación depurada, con más alta densidad, usando el software ATLAS TI.

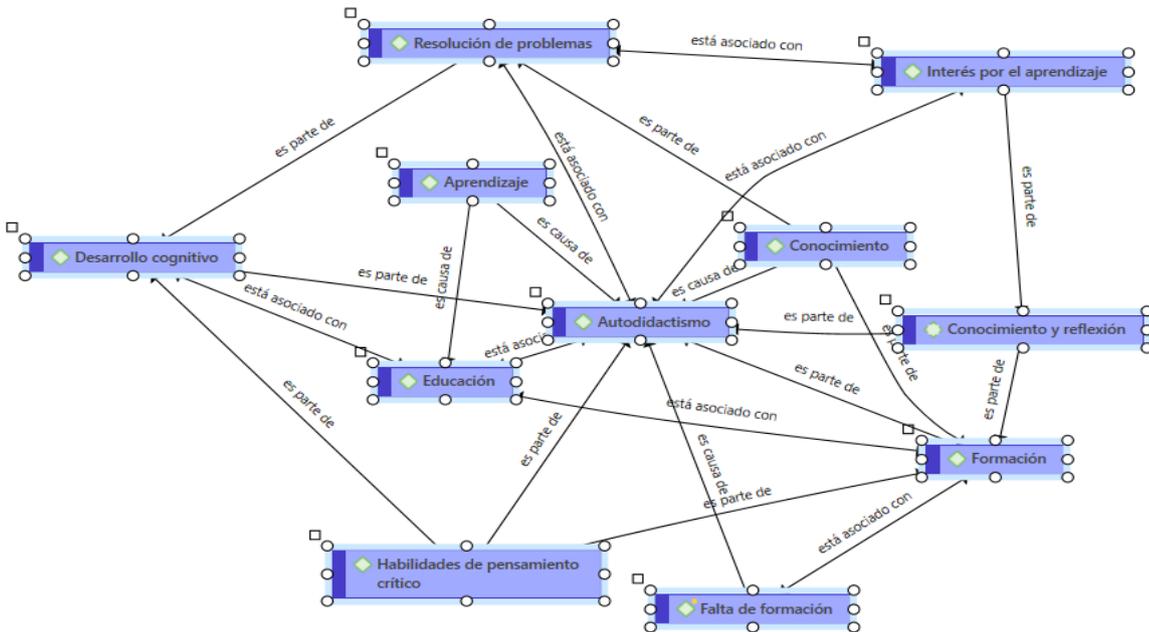
**Figura 14**

*Red Asociada con la Categoría Falta de formación (Densidad: 12)*



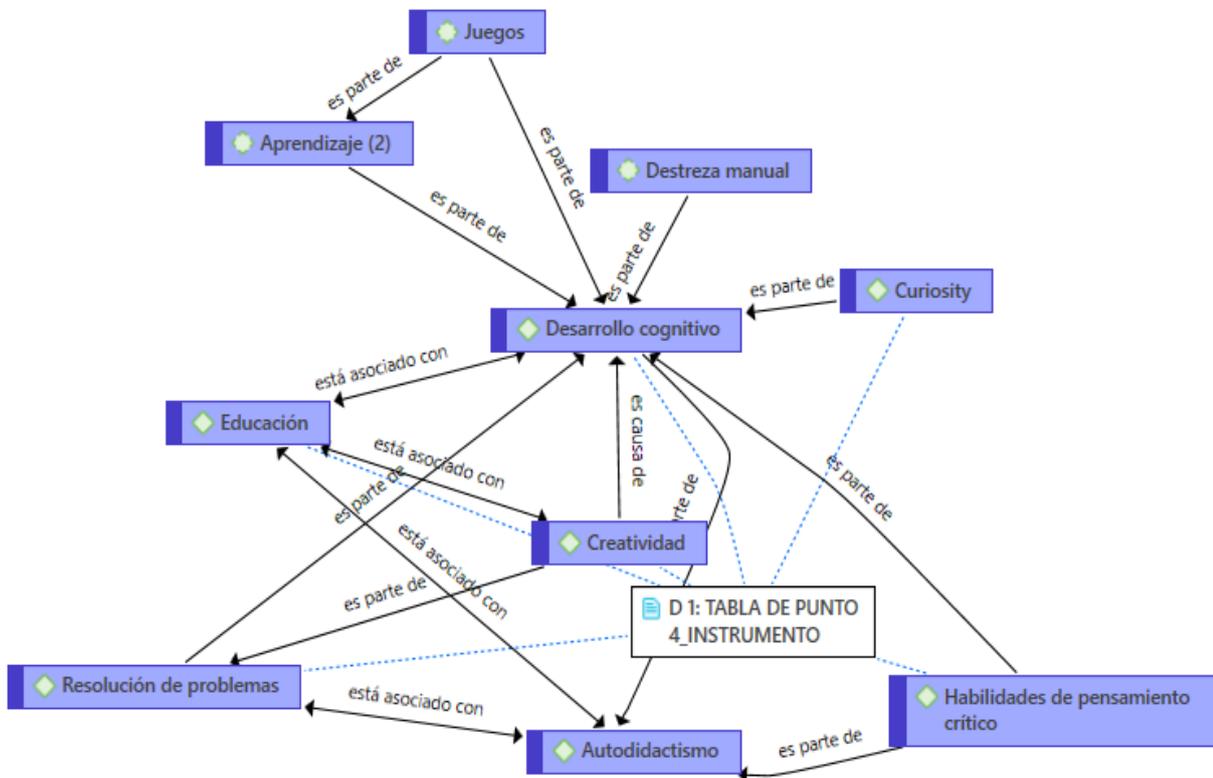
**Figura 15.**

*Red Asociada con la Categoría Autodidactismo (Densidad: 10)*



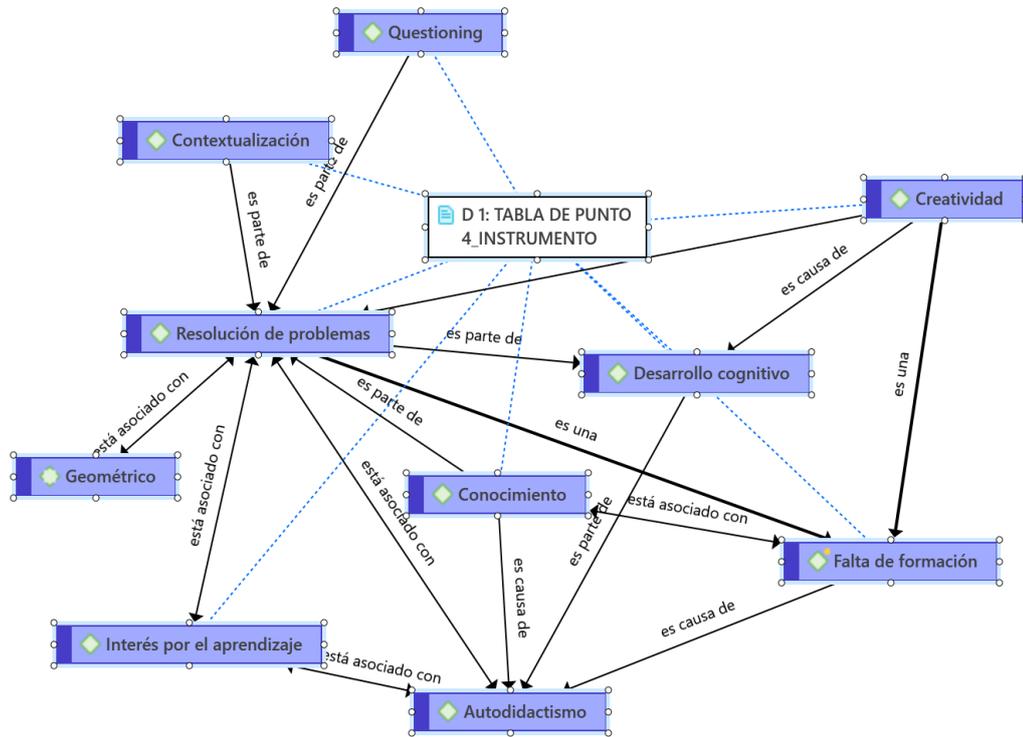
**Figura 16**

*Red Asociada con la Categoría Desarrollo cognitivo (Densidad: 9)*



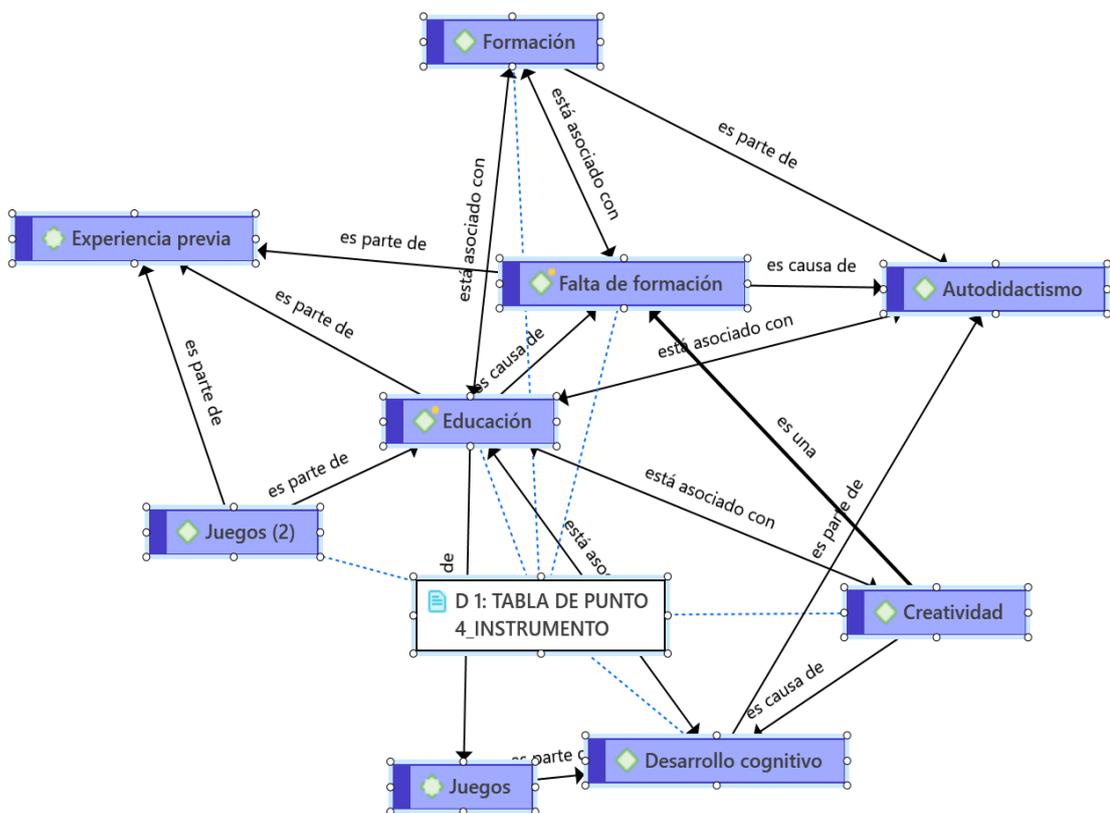
**Figura 17**

*Red Asociada con la Categoría Resolución de problemas (Densidad: 9)*



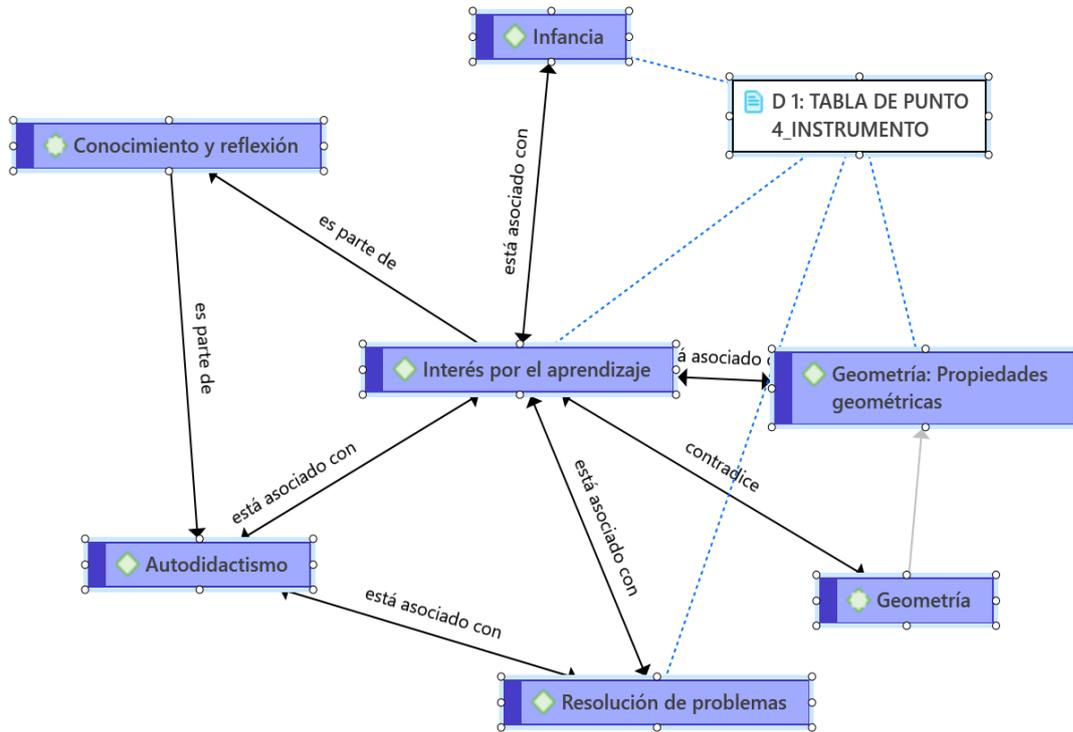
**Figura 18**

*Red Asociada con la Categoría Educación (Densidad: 6)*



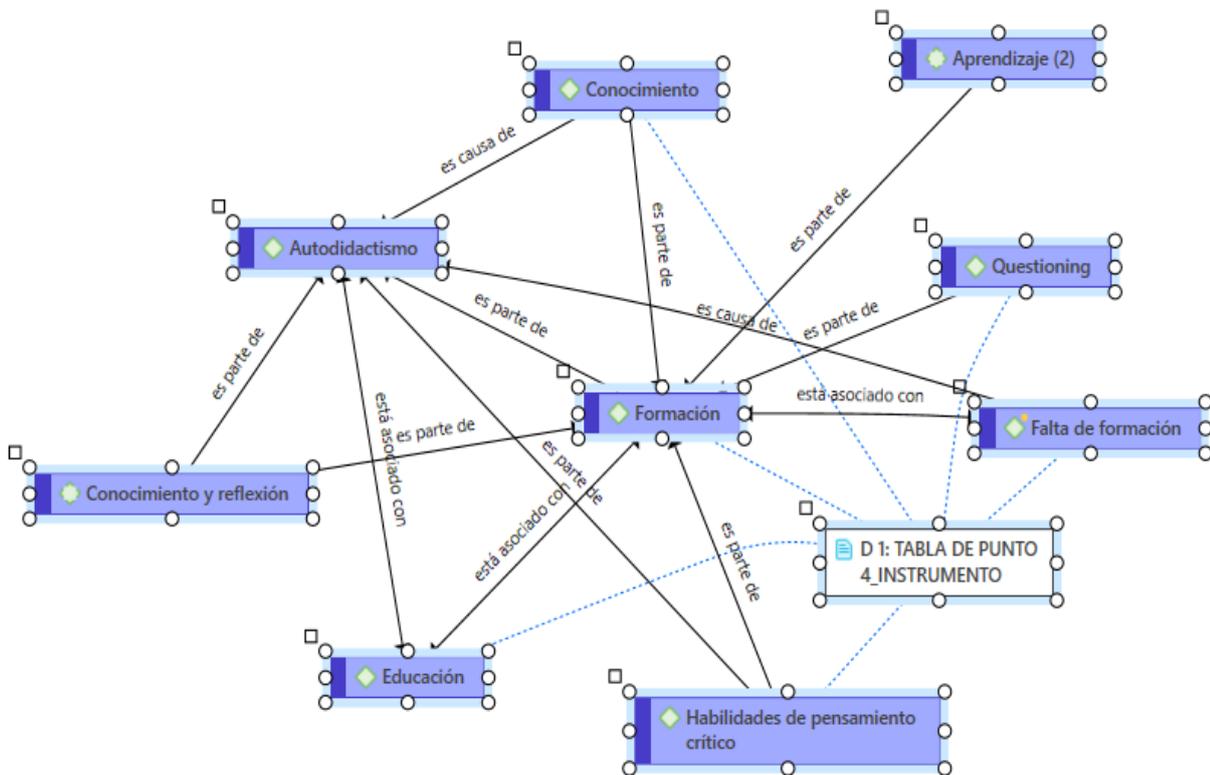
**Figura 19**

Red Asociada con la Categoría Interés por el aprendizaje (Densidad: 9)



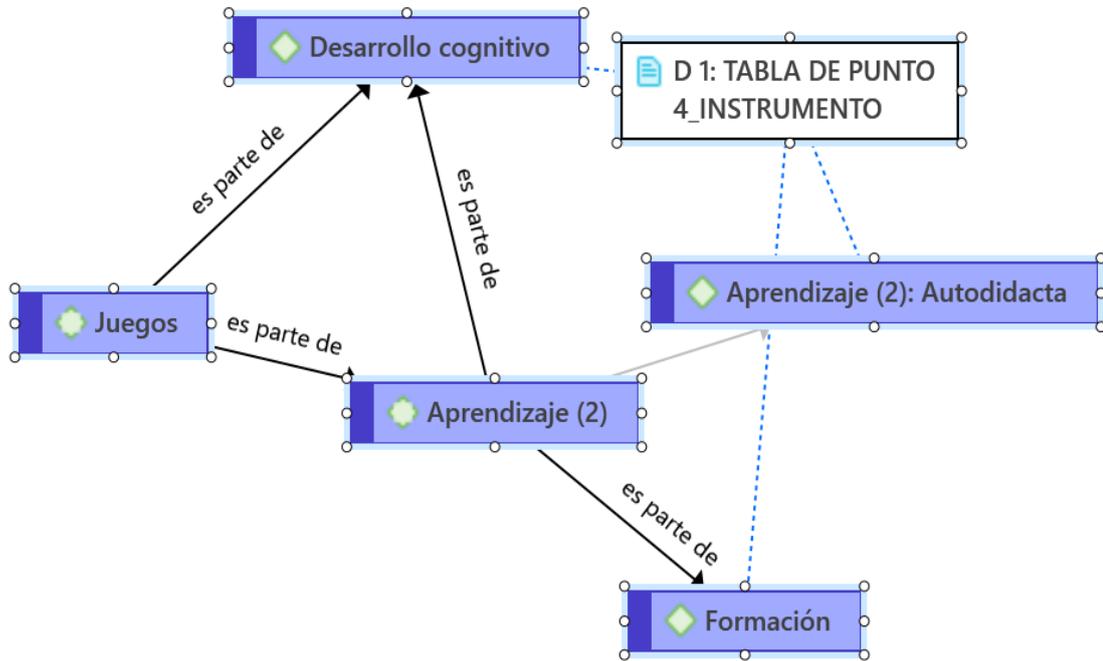
**Figura 20**

Red Asociada con la Categoría Formación (Densidad: 9)



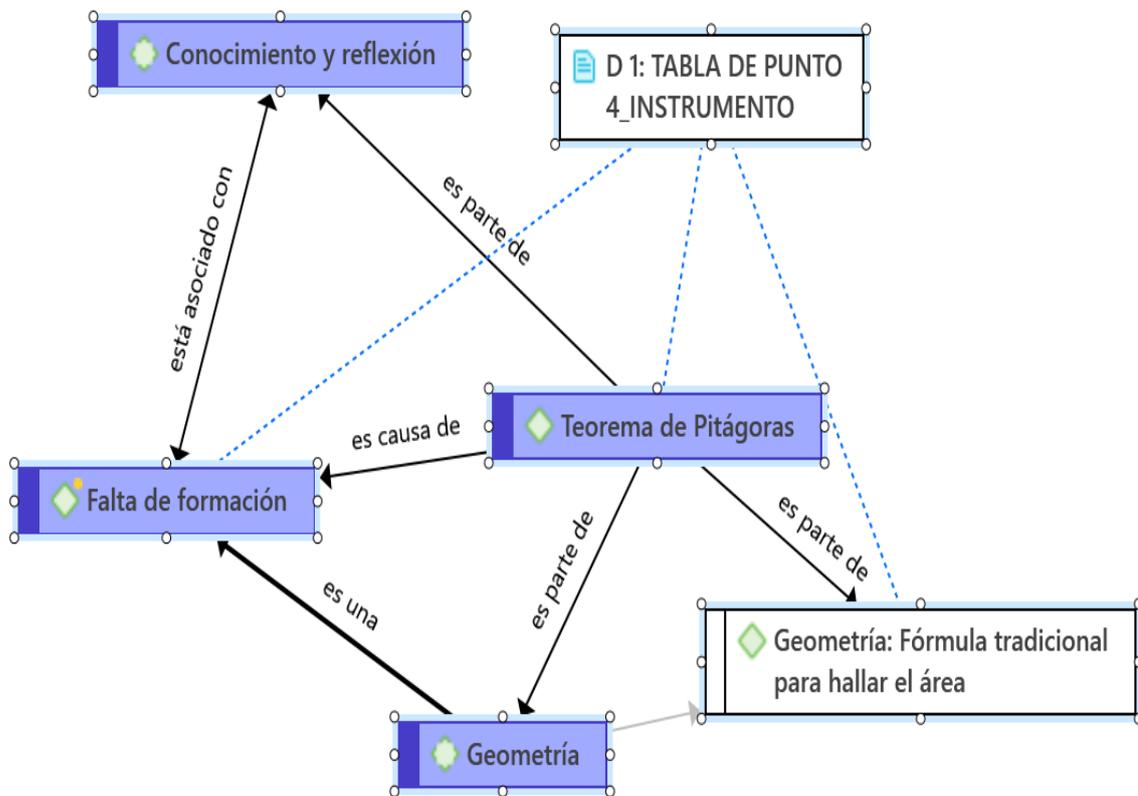
**Figura 21.**

*Red Asociada con la Categoría Aprendizaje (Densidad: 5)*



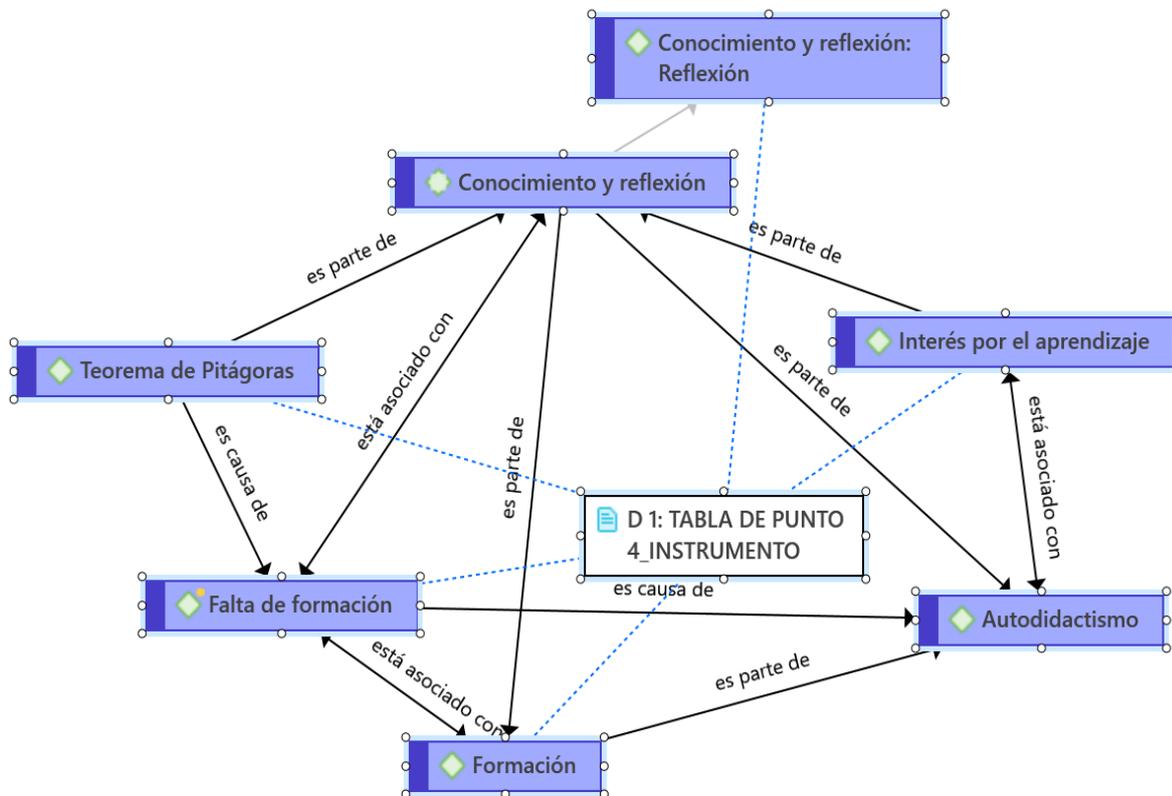
**Figura 22**

*Red Asociada con la Categoría Teorema de Pitágoras (Densidad: 5)*



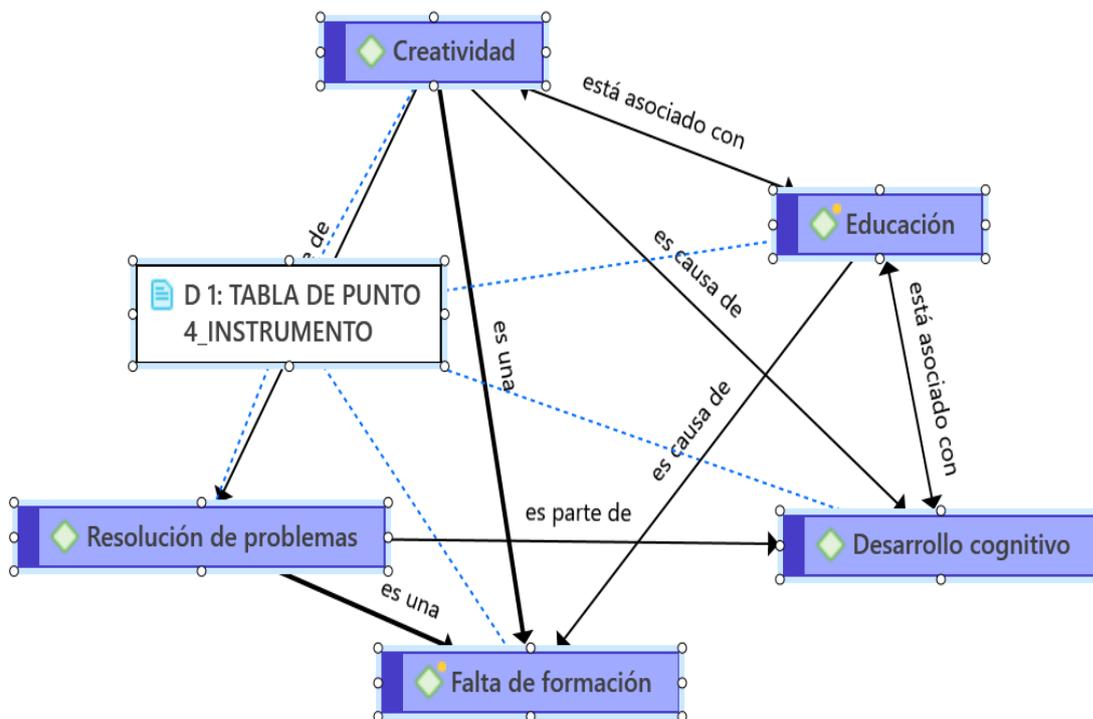
**Figura 23**

Red Asociada con la Categoría Conocimiento y Reflexión (Densidad: 5)



**Figura 24**

Red Asociada con la Categoría Creatividad (Densidad: 5)



Las 11 redes mostradas en las Figuras 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24, tienen como núcleo los códigos más densos y las relaciones entre ellos; se destaca el *Autodidactismo* y la *Falta de Formación*

*Disciplinar*, se infiere que el primero surge del segundo; también se destaca el *Conocimiento, la Resolución de Problemas, el Desarrollo Cognitivo*; y algo muy puntual que se destaca es la asociación del *Teorema de Pitágoras* al *Tema de los Triángulos*. Dado que estos códigos surgieron de la codificación abierta, en una etapa posterior de la pesquisa, serán contrastados con una codificación axial de otros documentos y, finalmente, se realizará la codificación selectiva que permitirá resultados concretamente ajustados a la investigación.

## DISCUSIÓN

Tanto en la construcción de los triángulos, como en la asignación de sus elementos y en el discurso para describirlos, los docentes presentan algunas dificultades y errores que se convierten en obstáculo (Barrantes y Zapata, 2008). Uno de las más sobresalientes es el hecho de no identificar las alturas de los triángulos cuando éstos no se encuentran contruidos de manera convencional, y poner en juego el rol de las definiciones (Vinner, 1991). Las representaciones y concepciones coinciden en varias oportunidades con las expuestas por los estudiantes.

Ninguno de los participantes usó fórmulas alternativas para determinar el área, como por ejemplo el Teorema de Pick (Nortes Checa, 2019) o la Fórmula de Herón (Delgado de Brandao *et. al.*, 2023). Esto condujo a que quienes no determinaron correctamente las alturas incurrieran en un error de cálculo. Por lo tanto, es necesario orientar a los docentes sobre otras alternativas para calcular el área, hacer énfasis en el uso de las unidades de medida, en el uso de la regla y el compás para construir triángulos y precisar medidas. Se deben proponer tareas nuevas que causen desequilibrio cognitivo y permitan a los docentes cuestionarse sobre sus conocimientos y sus prácticas.

Durante la sesión surgieron algunos interrogantes que no son frecuentes en el aula: ¿la posición de la superficie, donde se realice la construcción, puede considerarse una variable didáctica? ¿es posible que esta variable se convierta en un obstáculo para la comprensión y enseñanza de algunas propiedades del triángulo?

Es indispensable que los docentes comprendan que aunque ciertos conceptos no se enseñen, es importante ampliar la información y conocimiento que se tiene sobre el triángulo (en este caso particular), reconocer que la enseñanza de los triángulos requiere que se tengan en cuenta los saberes previos adquiridos en la formación primaria y secundaria, y que puede despertar el interés de los estudiantes por las formas y características de los objetos del entorno, permitiendo reforzar temas anteriores y contextualizar a los estudiantes en la resolución de problemas con el uso de operaciones matemáticas. Lo anterior les permitirá abordar con mayores facultades la enseñanza.

Por su parte, los libros de texto son un elemento al que se le debe dar más importancia, pues normalmente los docentes organizan la enseñanza a partir de ellos y si no tienen el conocimiento suficiente para ser críticos y cuestionar los procesos, las definiciones y las construcciones, aún los errores que puedan aparecer (Jaime, 1996), seguirán replicándose sin cuestionamiento ni retroalimentación acertada, solamente comparando con la guía de manera mecánica.

Según Gutiérrez (2011), el modelo de Van Hiele ha sido el modelo más usado para trabajar la enseñanza de la geometría, esto en sentido teórico, pues en las aulas no todos lo conocen, ya que confunden las fases con los niveles y no tienen claro en qué consiste cada uno. Aunque el modelo es apropiado, también los docentes pueden organizar su clase considerando otros esquemas. Se sugieren los *Cores and Papers*, los cuales serán objeto de otro artículo. Se enfatiza la necesidad de proporcionar a los estudiantes experiencias prácticas y significativas para desarrollar una comprensión profunda de los triángulos y su aplicabilidad en la vida real.

En resumen, la enseñanza del triángulo implica desarrollar la comprensión de sus elementos, su clasificación, sus propiedades y sus aplicaciones prácticas. Al utilizar estrategias efectivas, los docentes pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar un conocimiento profundo y significativo de los triángulos y su importancia en diversos campos

## CONCLUSIONES

A partir de las observaciones realizadas en los acompañamientos en aula y el análisis de la actividad acá discutida, se puede establecer que las condiciones y restricciones que tiene el profesorado de Educación Básica Primaria sobre el conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) ante situaciones de enseñanza de la

geometría de los triángulos se reducen a que en la ciudad de Tunja no ha sido objeto de estudio destacado, particularmente en la geometría del triángulo y en investigaciones fundamentadas en el conocimiento didáctico del contenido. Por otra parte, la mayoría de la planta docente que orienta matemáticas en EBP no cuenta con formación disciplinar en el área, es decir, su formación es en otras disciplinas del conocimiento, por lo tanto, los docentes orientan los aprendizajes relativos a las matemáticas de manera empírica, basados en videos, juegos, uso de material lúdico y otras formas declaradas por ellos mismos como autodidácticas. Al realizar este estudio se encontró que los docentes carecen de conocimientos fundamentales para lograr una enseñanza más eficiente, no han dejado de lado los modelos memorísticos y mecánicos, el uso del lenguaje geométrico es reducido, así como el manejo de medios digitales, de software, incluso de técnicas de dibujo con regla y compás.

En este estudio parcial se han empezado a hallar categorías que se continuarán contrastando y ampliando, a partir del análisis de la información recolectada y posterior a la aplicación que aquí se analizó. Con los hallazgos que se lograron, tras el análisis de las respuestas que dieron los docentes, se logró hacer un acercamiento a las dudas, las dificultades, los vacíos conceptuales y así pensar en un mecanismo de formación que permita a los docentes mejorar su práctica desde el autocuestionamiento. Las categorías halladas orientan hacia dónde ampliar la investigación, aunque se deban depurar hasta llegar a la saturación de códigos. Se puede reconocer la necesidad que tienen los docentes de ampliar su CDC. Los resultados acá condensados orientan a reconocer el CDC no solamente como herramienta teórica en trabajos de investigación sino a convertirlo en contenido para la enseñanza y para la formación continua de los docentes de EBP, como lo hicieron Muñoz-Catalán *et. al.* (2013) en su trabajo con el MKT.

### **DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES**

Fredy y Yetza desarrollaron la investigación, organizando la parte teórica, el diseño metodológico, así como la recolección y análisis de datos. Finalmente, Fredy escribió el artículo para esta investigación.

### **DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS**

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el Yetza previa solicitud razonable.

### **REFERENCIAS**

- Abell, S. K. (2007). Research on Science Teacher Knowledge. En S. Abell, k. Appleton y D. Hanuscin (Eds.), *Handbook of Research on Science Education* (p.1105 – 1150). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203824696>
- Acuña, V. M. (2015). La codificación en el método de investigación de la Grounded Theory o Teoría Fundamentada. *Innovaciones Educativas*, 17(22), 77-84. <https://doi.org/10.22458/ie.v17i22.1100>
- Adam, B. (2014). ‘CoRes and PaP-eRs as a strategy for helping beginning primary teachers develop their pedagogical content knowledge. *Educación Química*, 25(3), 292–303. [https://doi.org/10.1016/s0187-893x\(14\)70545-2](https://doi.org/10.1016/s0187-893x(14)70545-2)
- Arrieche, B., Arrieche, M. J., e Iglesias, M. (2018). Significados institucionales de la geometría del triángulo en la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Paradigma*, 39(1), 434–454. <http://funes.uniandes.edu.co/16285/1/Arrieche2018Significados.pdf>
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. [Tesis de Doctorado, Michigan State University]. <https://static1.squarespace.com/static/577fc4e2440243084a67dc49/t/579a38e6ebbd1a621986ed6a/1469724904244/Knowledge+and+reasoning+in+mathematical+pedagogy.pdf>
- Barrantes, M., y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55–71. [https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/4576/1/0213-9529\\_27\\_1\\_55.pdf](https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/4576/1/0213-9529_27_1_55.pdf)
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model\*. *Research in Mathematics Education*,

- Cirillo, M. (2008). *On becoming a geometry teacher: A longitudinal case study of one teacher learning to teach proof*. [Unpublished doctoral dissertation, Iowa State]. University <https://dr.lib.iastate.edu/entities/publication/773bc73d-d015-4818-950b-3210373f0fc9>
- Cirillo, M. (2009). Challenges to teaching authentic mathematical proof in school mathematics. En F. –L. Lin, J.-H Feng, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: ICMI Study 19 Conference Proceedings*, (Vol. 1, pp. 130-135). National Taiwan Normal University. <https://udspace.udel.edu/items/c21de1cb-c9b9-4f3d-a5a5-9da0af9b23a6>
- Delgado de Brandao, A. M., Rodríguez, Y. del. C., Sandoval, U., y Zeballos, T. (2023). Triángulos Perfectos. *Visión Antataura*, 7(2), 52-65. <https://doi.org/10.48204/j.vian.v7n2.a4562>
- Escudero Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/11456>
- Falconí-Procel, X. Y. (2021). Modelo de Van Hiele y su utilización para la enseñanza de la geometría. *Polo del Conocimiento*, 6(3), 2261-2278. <https://polodelconocimiento.com/ojs/index.php/es/article/view/2505>
- Franco, J., y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7–16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16>
- Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-14). Universidad Pedagógica Nacional. <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut11.pdf>
- Higueras, L. R. (1998). *La gestión de las variables didácticas en las situaciones de aprendizaje matemático en la escuela infantil: su incidencia en la formación de profesores*. <https://www.semanticscholar.org/paper/a758cc5fb2c89d1650e4a3977d806ef509ad0cb0>
- Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, 23, 49–62. <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiChaGut92.pdf>
- Jaime, A. (1996). Use of Language in Elementary Geometry by Students and Textbooks. En H. Mansfield, N. A. Pateman, y N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children* (pp. 248–255). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/978-94-017-2211-7\\_16](https://doi.org/10.1007/978-94-017-2211-7_16)
- Joya, C. A., y Suárez, P. (2020). Aprendizaje por descubrimiento en sistemas de puntos y rectas notables del triángulo. *Praxis & Saber*, 11(26), e9880. <https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9880>
- Martínez, M. B., Llinares, S., y Moreno, M. (2017). *Desarrollo de la comprensión del triángulo en educación primaria*. Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, II <http://funes.uniandes.edu.co/18783/1/Bernabeu2017Desarrollo.pdf>
- Muñoz-Catalán, M. C., Montes Navarro, M. Á., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L. C., y AguilAr González, Á. (2013). *La clasificación de las figuras Planas en primaria: Una visión de progresión entre etapas y ciclos*. [https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/41124956/La\\_clasificacin\\_de\\_las\\_figuras\\_planas\\_en20160114-17490-17thb0u-libre.pdf?1452782234=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DLa\\_clasificacion\\_de\\_las\\_figuras\\_planas\\_e.pdf&Expires=1704692669&Signature](https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/41124956/La_clasificacin_de_las_figuras_planas_en20160114-17490-17thb0u-libre.pdf?1452782234=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DLa_clasificacion_de_las_figuras_planas_e.pdf&Expires=1704692669&Signature)
- Nortes Checa, A. (2019). El teorema de Pick o el teorema de Pitágoras, ¿cuál aplicar? *Números: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 100, 73-77. <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/224188/Nortes.pdf?sequence=1>
- Rabanedo, P., Llanos, V. C., Otero, M. R., y Paz, M. (2023). Un REI para la enseñanza de la geometría en la

formación de profesores de matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 18(2), 12–21. <https://doi.org/10.54343/reiec.v18i2.407>

- Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: the Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Shulman, L. S. (1986a). *Paradigms and research programs for the study of teaching*. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). Macmillan, New York.
- Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf>
- Shulman, L. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. Harvard educational review, 57(1),
- Strauss, A., y Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Universidad de Antioquia. [https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/56136172/Bases\\_de\\_la\\_investigacion\\_cualitativa\\_Strauss\\_y\\_Corbin-libre.pdf?1521764822=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DBases\\_de\\_la\\_investigacion\\_cualitativa\\_Te.pdf&Expires=1705976207&Signature=IktPocU](https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/56136172/Bases_de_la_investigacion_cualitativa_Strauss_y_Corbin-libre.pdf?1521764822=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DBases_de_la_investigacion_cualitativa_Te.pdf&Expires=1705976207&Signature=IktPocU)
- Verdugo-Perona, J. J., Solaz-Portolés, J. J., y Sanjosé-López, V. (2017). El conocimiento didáctico del contenido en ciencias: estado de la cuestión. *Cadernos de Pesquisa*, 47(164), 586–611. <https://doi.org/10.1590/198053143915>
- Vergara Díaz, C., y Cofré Mardones, H. (2014). Conocimiento Pedagógico del Contenido: ¿el paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, 40(Especial), 323–338. <https://doi.org/10.4067/s0718-07052014000200019>
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1\\_5](https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5)