

Visão e Visualização de Representações Geométricas de Futuros Professores de Matemática

Talisson Fernando Leiria^a ORCID iD (0000-0001-5721-0082)
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino^b ORCID iD (0000-0003-4276-8395)

^a Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Paranavaí, Colegiado de Matemática, Paranavaí, Paraná, Brasil.

^b Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, Paraná, Brasil.

RESUMO

Contexto: O estudo da Geometria Esférica, assim como das outras geometrias não euclidianas, associada ao desenvolvimento do pensamento geométrico na formação inicial de professores de matemática é uma temática promissora e que pode contribuir para o ensino de Geometria. **Objetivos:** Discutir elementos da visão e da visualização mobilizados por futuros professores de matemática na resolução de uma tarefa de Geometria Esférica. **Design:** Investigação de natureza qualitativa, de cunho interpretativo. **Ambiente e participantes:** Participaram treze futuros professores de matemática (FPMat) matriculados na disciplina Ensino de Geometria de uma universidade estadual paranaense. **Coleta e análise de dados:** As informações obtidas referem-se às gravações em áudio das discussões em pares e coletivas, à produção escrita dos FPMat promovida pela exploração da tarefa e aos registros em diário de campo. A análise incidiu na resolução e na discussão da tarefa pelos FPMat sobre a mobilização de elementos da visão e visualização, Duval (1999) e Gutiérrez (1996), para o desenvolvimento do pensamento geométrico. **Resultados:** Os resultados evidenciam a mobilização da percepção visual (visão) e de elementos da visualização, como a criação de imagens mentais e representações de objetos geométricos, representações externas e processos e habilidades de visualização (nomeadamente, interpretação visual de informações e de imagens mentais, percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais). **Conclusões:** A mobilização destes elementos desvela aprendizagens de conceitos de Geometria Esférica que permitiram compreender diferenças e semelhanças entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: Formação inicial de professores de matemática; visão; visualização; ensino de Geometria Esférica; pensamento geométrico.

Autor correspondente: Talisson Fernando Leiria. Email: talissonfleiria@gmail.com

INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria tem gerado considerável inquietação entre os pesquisadores na área da Educação Matemática. Diversos fatores contribuem para essa preocupação, dentre os quais se destacam o histórico de marginalização da Geometria nos currículos educacionais, a predominância de um ensino de caráter axiomático e a insuficiente exploração ou, em muitos casos, a negligência do tema por parte dos professores (Barros & Pavanello, 2022; Elia et al., 2018; Marmolejo & Astudillo, 2015; Pavanello, 1993; Silva & Cyrino, 2024).

Apesar de os atuais documento¹ norteadores das propostas curriculares da Educação Básica preverem o estudo das geometrias (euclidianas e não euclidianas) desde os anos iniciais², estes conhecimentos são pouco explorados nas aulas de matemática. As geometrias não euclidianas (GNE), inclusive, raramente são trabalhadas (Silva & Cyrino, 2024).

Pesquisadores, tanto no âmbito nacional como internacional, chamam a atenção para esse abandono, na Educação Básica e na formação inicial de professores de matemática (Blanco, 2014; Gonzato et al., 2011; Marmolejo & Astudillo, 2015, Marmolejo et al., 2017). A maioria das investigações se concentra em discutir conceitos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, no intuito de analisar o pensamento e as estratégias de resolução de estudantes da Educação Básica e de professores, além de provar teoremas e propriedades matemáticas, o uso de imagens e raciocínio geométrico no momento em que resolvem tarefas de Geometria Euclidiana (GE) (Blanco, 2014; Elia et al., 2018; Fujita et al. 2017; Marmolejo et al., 2017; Swoboda, 2008).

Identificamos poucas investigações que têm como foco a exploração de conceitos das GNE, tanto com estudantes da Educação Básica quanto em contextos de formação inicial e continuada de professores (Carvalho & Azevedo, 2020; Fonseca, 2020; Gomes, 2014; Reis, 2006; Silva, 2018), apesar de tais conceitos fazerem parte das propostas educacionais de alguns estados (como o Paraná) para a Educação Básica e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

¹ Atualmente, no Brasil, o currículo educacional que orienta os conteúdos a serem ensinados na Educação Básica é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) implementada no ano de 2018.

² O estado do Paraná confeccionou um currículo próprio a partir das orientações propostas pela BNCC, intitulado Currículo Estadual da Rede Paranaense, implementado a partir de 2019.

O Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (Gepefopem) tem se dedicado a investigar diferentes abordagens para o pensamento geométrico e seu desenvolvimento em contextos de formação de professores (Cybulski & Cyrino, 2022; Silva & Cyrino 2024; Vieira & Cyrino, 2022). Nessas pesquisas, os elementos associados à visão e à visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico chamaram nossa atenção, uma vez que são frequentemente mencionados pelos autores, mas carecem de aprofundamento nas discussões sobre a formação de professores e o ensino de Geometria Esférica.

Importante que haja estudos sobre esses elementos na formação inicial e continuada de professores de matemática, em que sejam promovidas discussões que os associem aos processos de ensino e de aprendizagem das geometrias para a mobilizar e desenvolver o pensamento geométrico, visto que a visão e a visualização podem contribuir no acesso aos objetos matemáticos por meio de representações verbais e gráficas (Blanco, 2014; Elia et al., 2018; Marmolejo et al., 2017; Swoboda, 2008; Torregrosa & Quesada, 2007).

Na presente investigação, analisamos elementos associados à visão e à visualização mobilizados por futuros professores de matemática (FPMat), matriculados na disciplina “O Ensino de Geometria” do 2.º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – *Campus* de Paranavaí, na resolução de uma tarefa³ de Geometria Esférica. Optamos por abordá-la, por reconhecer a sua relevância para compreender situações do cotidiano, interpretadas muitas vezes a partir do senso comum e divulgadas nas redes sociais, por exemplo que a Terra não é plana.

VISÃO E VISUALIZAÇÃO COMO ASPECTOS MOBILIZADORES DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

A visão não pode ser considerada como a única e mais relevante maneira de orientar os processos de ensino e de aprendizagem de matemática (Gutiérrez, 1992, 1996). O ato ou o efeito de ver possibilita uma percepção do mundo exterior a partir dos olhos, dentre tantos outros significados que lhe são atribuídos no nosso cotidiano.

³ Por tarefas, compreendemos ser aquelas como problemas e tarefas de exploração que se enquadram “nos níveis de demanda cognitiva com procedimentos com conexões com os significados e fazer matemática, categorizados em elevado nível de demanda cognitiva” (Jesus et al., 2018, p. 22).

A visão, especialmente quando compreendida como o sentido da vista, refere-se à percepção visual, a qual está diretamente associada ao desenvolvimento de uma imagem mental a partir do que é observado. No entanto, essa percepção visual frequentemente se limita ao que é captado pelo sentido da visão, o que implica uma apreensão imperfeita do objeto ou da situação em questão (Duval, 1999). Isso ocorre devido à nossa vivência em um mundo tridimensional, em que somos capazes de perceber apenas uma parte do objeto físico de cada vez. Para obter uma visualização completa da estrutura observada, é necessário realizar uma exploração adicional, seja por meio de movimentos do observador ou do objeto.

A percepção visual é um aspecto muito importante para as inúmeras tarefas do cotidiano das pessoas, incluindo aquelas relacionadas ao processo de aprendizagem de geometria. É preciso que o pesquisador, ao utilizar-se de tal termo, tenha ciência do significado que adotou para evitar confusões filosóficas e epistemológicas. Bem afirma Gutiérrez (1992) que: “O elemento básico central em todas as concepções de percepção visual são as imagens mentais, isto é, as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relacionamentos, conceitos, etc.” (p. 44, tradução nossa⁴).

O termo visualização na área da matemática e, em especial no campo da geometria, não está relacionado apenas ao que é possível enxergar e tocar com as mãos, tal como é concebido em sua definição nos dicionários de Língua Portuguesa^{5,6}. Segundo Arcavi (1999), os sujeitos não enxergam somente o que lhe é dado para ser visto, mas também aquilo que não é visível aos olhos. A capacidade de compreender e utilizar conceitos é essencial para desenvolver o conhecimento matemático e geométrico, tanto para estudantes, quanto para professores.

⁴ “*El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc.*”

⁵ Dicionário Aulete - Visualização. (vi.su.a.li.za.ção). sf. 1. Ação ou resultado de visualizar: Divertia-se em fazer a visualização de seu projeto de viagem. 2. Ato de transformar em imagem mental conceitos abstratos. 3. Ato de converter formas visíveis em conceitos. 4. Processo ou técnica de tornar algo perceptível à visão. <https://www.aulete.com.br/visualiza%C3%A7%C3%A3o>.

⁶ Dicionário Michaelis – visualização. (vi.su.a.li.za.ção). sf. 1 Ato ou efeito de visualizar. 2 Imagem formada na mente ou a que resulta desse processo; visualidade. 3 Ato de transformar em imagem mental conceitos abstratos. 4 Percepção nítida de algo.

Gutiérrez (1996) descreve a visualização “como um tipo de atividade de raciocínio baseada na utilização de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizado para resolver problemas ou provar propriedades” (p. 9, tradução nossa⁷). Tendo como base a definição de visualização, o autor a detalha e a descreve como

o conjunto de tipos de imagens, processos e habilidades necessários para que os alunos de geometria possam produzir, analisar, transformar e comunicar informações visuais relativas a objetos reais, modelos e conceitos geométricos. A informação visual produzida (imagens) pode ser tanto física (figuras ou diagramas) como mental (imagens mentais). A análise de informação visual refere-se tanto às imagens produzidas pelo próprio estudante como às recebidas do exterior (de estudantes, professor, texto, etc.). As transformações podem ser feitas entre uma imagem e informação verbal (oral ou escrita) ou de uma imagem em outra. A comunicação pode ser gráfica, verbal ou mista. (Gutiérrez, 2006, p. 27, tradução nossa⁸)

Gutiérrez (1996) argumenta que a visualização é constituída por quatro importantes elementos, sendo “imagens mentais, representações externas, processos e habilidades de visualização” (p. 9, tradução nossa⁹). Segundo o autor, a imagem mental é o elemento básico para a visualização e é tida como “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais” (p. 9, tradução nossa¹⁰).

⁷ “as the kind of reasoning activity based on the use of visual or spatial elements, either mental or physical, performed to solve problems or prove properties.”

⁸ “el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (imágenes) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (imágenes mentales). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el propio estudiante como a las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral o escrita) o de una imagen en otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta.”

⁹ “mental images, external representations, processes of visualization, and abilities of visualization.”

¹⁰ “any kind of cognitive representation of a mathematical concept or property by means of visual or spatial elements.”

A representação externa é “qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc., que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e a fazer raciocínio visual” (Gutiérrez, 1996, pp. 9-10, tradução nossa¹¹).

O processo de visualização, de acordo com Gutiérrez (1996), é “uma ação mental ou física em que as imagens mentais estão envolvidas” e que se constitui basicamente em dois processos: “interpretação visual de informações” e “interpretações de imagens mentais” (p. 10, tradução nossa¹²). A interpretação visual de informações está associada à conversão de relações abstratas e de dados não figurais em termos visuais, à manipulação de imagens visuais e à transformação de imagens visuais em outras imagens. Já as interpretações de imagens mentais estão associadas às convenções visuais e do vocabulário especial, utilizado em trabalhos geométricos, diagramas, tabelas, gráficos, além da interpretação e leitura de imagens visuais, mental ou física, na intenção de obter informações relevantes que possam contribuir para a resolução de um problema.

Gutiérrez (1996) descreve que as habilidades de visualização são um conjunto de habilidades que os indivíduos devem desenvolver para que possam realizar processos com imagens mentais para a solução de determinado problema. As principais habilidades destacadas pelo autor são: percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições espaciais, percepção de relações espaciais e discriminação visual, que os indivíduos utilizam, ao solucionar algum tipo de problema.

A habilidade de percepção figura-fundo está associada à capacidade de identificar e isolar uma figura específica de dentro de uma situação complexa. A constância perceptiva é a capacidade de reconhecer propriedades específicas de um objeto, seja físico ou mental, além de reconhecer quando um objeto é real ou uma representação e como é percebido em diferentes posições. A rotação mental está relacionada com a capacidade de construir imagens mentais e movimentá-las mentalmente, isto é, de criar um movimento mental para a imagem produzida na mente.

¹¹ “any kind of verbal or graphical representation of concepts or properties including pictures, drawings, diagrams, etc. that helps to create or transform mental images and to do visual reasoning.”

¹² “is a mental or physical action where mental images are involved. There are two processes performed in visualization: ‘Visual interpretation of information’ to create mental images, and ‘interpretation of mental images’ to generate information.”

A percepção de posições espaciais é a capacidade de o indivíduo relacionar um objeto, uma representação ou uma imagem mental para si mesmo (Gutiérrez, 1996). Já a percepção de relações espaciais diz respeito à capacidade de relacionar diversos objetos (ou representações ou imagens mentais) entre si ou simultaneamente consigo mesmo. Por fim, a discriminação visual é a capacidade de identificar semelhanças e diferenças, ao comparar diversos objetos (ou representações ou imagens mentais).

Assumiremos a visualização em geometria, baseados nos estudos de Gutiérrez (1996), pois ela é um processo que perpassa por construções de imagens mentais para a construção de argumentos matemáticos convincentes, que proporciona o fazer matemática e que pode colaborar para o desenvolvimento do pensamento geométrico do FPMat.

CONTEXTO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Desenvolvemos uma investigação¹³ de natureza qualitativa, de cunho interpretativo (Erickson, 1986, 2012), que envolveu treze FPMat¹⁴, regularmente matriculados na disciplina “O Ensino de Geometria” do 2.º ano do Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura, de uma universidade estadual paranaense. A disciplina foi ministrada no segundo semestre letivo de 2022, com início em setembro de 2022 e término em fevereiro de 2023¹⁵.

As aulas, ministradas pelo primeiro autor do artigo e professor regente da turma, foram realizadas no formato presencial, no período noturno, com duração de 4 horas/aulas semanais, totalizando uma carga horária de 72 horas/aulas. Para esta investigação, foram destinadas 8 horas/aulas semanais para o desenvolvimento da tarefa.

Antes de iniciar a investigação, foi desenvolvida com os FPMat uma tarefa que tinha o propósito de discutir elementos e características presentes nos sólidos geométricos associados à GE. Em seguida, com o objetivo de discutir elementos da visão e da visualização mobilizados por FPMat foi proposta uma tarefa intitulada *Conhecendo a Geometria Esférica*, a qual foi adaptada por

¹³ Aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina - UEL (Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231)

¹⁴ Para preservar a identidade dos FPMat no processo de análise, os participantes são identificados com nomes fictícios: Celeste, Aria, Luna, Órion, Zora, Aurora e Balthazar.

¹⁵ O calendário foi alterado por conta das restrições provocadas pela pandemia da Covid-19.

Gomes (2014) com base na publicação de Coutinho (2001), a qual readaptamos e a organizamos em três itens (Quadros 1, 2 e 3).

Quadro 1

Problema do urso, item 1. (Adaptado de Gomes, 2014)

1. Um urso partiu de sua toca em busca de alimento e percorreu uma distância de 10 km para o Sul. Em seguida, mudou de direção e percorreu mais 10 km para Leste. Por fim, novamente voltou a mudar de direção, indo agora para o Norte, percorrendo 10 km, chegando assim à sua toca. De posse dessas informações, desenhe o trajeto percorrido pelo urso:
- a) em uma folha de papel A4;
 - b) sobre a bola de isopor.
 - c) Após a construção dos desenhos, discuta com sua dupla e anote todas as observações feitas, apresentando uma explicação.

O objetivo do item 1 “*Problema do Urso*” era que os FPMat reconhecessem que, na geometria plana, não seria possível desenhar o caminho percorrido pelo urso de maneira que conseguisse retornar à sua toca, mas, sim, na geometria esférica.

O Quadro 2 mostra o enunciado do item 2, intitulado “*Construindo retas em superfícies plana e esférica*”. O objetivo desse item foi que os FPMat observassem que a reta representada na superfície plana cresce indefinidamente para ambos os lados, enquanto a reta representada na superfície de uma esfera, no caso a bola de isopor, sempre retornará ao ponto de partida.

Quadro 2

Construindo reta na superfície plana e esférica, item 2. (Adaptado de Gomes, 2014)

2. Em uma folha de papel A4, marque um ponto qualquer e, com o auxílio de uma régua, trace a representação de uma reta que passe por este ponto. Em seguida, marque um ponto qualquer sobre a bola de isopor e, com o auxílio de um elástico, trace uma trajetória que passe pelo ponto marcado. Em qual das situações, é possível retornar ao ponto de partida? Por quê? Descreva detalhadamente sua resposta, apresentando uma justificativa.

No Quadro 3, apresentamos o enunciado do item 3 intitulado “*Colagem de triângulos planos na superfície plana e esférica*”, com a intencionalidade de que os FPMat representassem dois triângulos em uma folha colorida, podendo ser triângulos de diferentes medidas. Na sequência, foi solicitado que eles os recortassem e colassem cada uma das representações, uma na superfície plana e outra na superfície esférica, anotando as observações deles com relação ao que estava acontecendo no momento de colá-las.

Quadro 3

Construindo triângulos planos na superfície plana e esférica, item 3 da tarefa I. (Adaptado de Gomes, 2014)

3. Você recebeu duas folhas de papel A4, sendo uma branca e uma colorida. Na folha colorida, desenhe e recorte a representação de dois triângulos quaisquer. Em seguida, cole uma dessas representações de triângulos recortadas na folha branca e a outra representação do triângulo cole sobre a bola de isopor. O que você observa que aconteceu com as representações dos triângulos após serem coladas? Discuta com sua dupla e descreva detalhadamente a conclusão a que chegaram.

Os FPMat foram orientados a trabalhar em duplas e anotar todas as suas estratégias de resolução, bem como os relatos pós aula e possíveis questionamentos relacionados ao conteúdo e aos conhecimentos pedagógicos envolvidos na resolução da tarefa, para serem apresentados na discussão coletiva (grande grupo).

Para a resolução de cada item da tarefa, destinamos 20 minutos e, quando necessário, foram acrescentados mais 10 minutos. Neste tempo, o formador orientou e incentivou as duplas no processo de resolução e discussão. Para tanto, analisou as estratégias e as resoluções dos futuros professores, questionando-os a respeito das suas intencionalidades com a resposta e os relatos descritos. Na sequência, foram selecionadas duplas para apresentar e explicar as suas resoluções no quadro, seguidas da discussão coletiva na busca de sistematizar as aprendizagens relacionadas aos conteúdos de geometrias, tanto plana quanto esférica.

A sequência de apresentação das duplas teve como critério primeiro as resoluções incorretas, seguidas das resoluções parcialmente corretas e as resoluções corretas, sendo desconsideradas aquelas tidas como semelhantes.

Optamos por iniciar pelas resoluções incorretas para que fosse possível chamar a atenção dos FPMat acerca de alguns teoremas e propriedades que estavam sendo utilizados de forma equivocada.

Os itens da tarefa foram entregues um a um, separadamente, de forma que os futuros professores pudessem anotar as estratégias de resolução de cada item, as suas conclusões e relatos de aula a respeito das discussões nas duplas e no grande grupo antes de receber o item seguinte. Cada uma das duplas de FPMat receberam materiais didáticos para a resolução de cada item da tarefa, especificamente folhas de papel A4 branca, folhas de papel A4 coloridas, bolas de isopor, régua, tesoura, cola, canetas coloridas, fita métrica e elásticos.

Para obter as informações, foram utilizados como instrumentos os registros escritos dos FPMat e do diário de campo do formador assim como as gravações em áudio que ocorreram em sala de aula durante o trabalho com a referida tarefa (ao todo oito horas/aula). Foram considerados os registros escritos, realizados durante a proposição, a exploração e a resolução da tarefa, bem como as anotações em seus respectivos cadernos referentes a dúvidas ou questionamentos particulares que não foram discutidos coletivamente.

As gravações em áudios envolveram as discussões de cada uma das duplas de FPMat durante a resolução da tarefa e as discussões coletivas. Foram selecionados e transcritos episódios que foram objeto de análise na investigação.

Nesta investigação, concebemos a aprendizagem como um processo de negociação de significados que se desenvolve no contexto da experiência cotidiana de participação no mundo. Aquela que promove interação entre um regime de competência e uma experiência de significado (Schneider, 2012; Wenger, 2003, 2013). Isto é, a competência é histórica e socialmente desenvolvida e em interação com a experiência de cada sujeito (Wenger, 2003).

No primeiro momento, identificamos elementos da visão e da visualização mobilizados pelos FPMat no conjunto de informações obtidas. Em seguida, segundo momento, selecionamos episódios em que esses elementos se encontravam evidentes. No terceiro momento, buscamos identificar semelhanças e diferenças nos elementos identificados. No quarto momento, realizamos agrupamentos em unidades de análise articuladas com a literatura adotada na investigação, especificamente estudos sobre visão e visualização de Gutiérrez (1996). Por fim, no quinto momento, fazemos inferências entre as informações e esses aportes teóricos para atender ao objetivo do artigo.

ELEMENTOS DA VISÃO E VISUALIZAÇÃO MOBILIZADOS NA TAREFA - CONHECENDO A GEOMETRIA ESFÉRICA

A análise das informações aponta que a resolução e a discussão da tarefa *Conhecendo a Geometria Esférica* oportunizou aos FPMat mobilizar aspectos relacionados ao pensamento geométrico, em específico, elementos da visão e visualização, nomeadamente: a percepção visual (visão) e elementos da visualização, como a criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos; as representações externas; e os processos e habilidades da visualização. Estes elementos se afiguram favorecedores ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

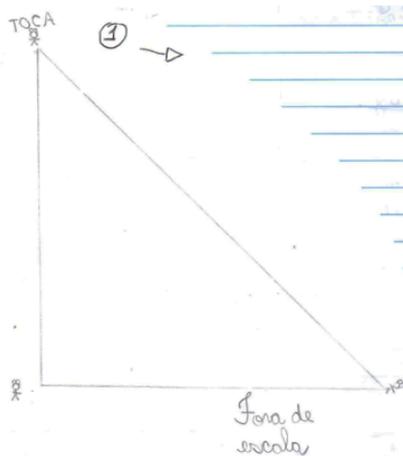
A Percepção Visual e a Aprendizagem de FPMat

A percepção visual é um dos elementos associados ao pensamento geométrico mais presente nas estratégias e resoluções apresentadas pelos FPMat. Trata-se de uma percepção global em que a atenção do sujeito foca nas características visuais e físicas das figuras geométricas, como a identificação dos lados, dos ângulos, dos vértices, a cor e a textura, atribuindo importância mais aos aspectos físicos do que aos matemáticos.

A partir da leitura do enunciado do item 1, Celeste fez **o desenho de um triângulo** para representar o caminho percorrido pelo urso (Figura 1). Esta ação se apresenta pelo **acesso direto ao enunciado**, tendo como ponto de partida a expressão “chegando assim à sua toca”.

Figura 1

Representação na folha de Papel A4 da Celeste. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)



Ao representar o caminho do urso na folha de papel A4, a condição de seguir para a direção norte não foi obedecida pela Celeste. Isto é, ao traçar o caminho do urso, ligando o ponto à leste onde ele se encontra com o ponto ao norte, está sendo tomada a direção noroeste (Figura 1) e não a direção norte, como solicitado no enunciado do item 1.

Esta estratégia nos possibilita questionar o **conhecimento geométrico da Celeste sobre GNE**, ao tentar representar no plano um triângulo, que seria o possível caminho do urso. Ou a pensar na **influência da GE** no modo que concebemos o mundo real, isto é, na forma que conduzimos as situações que vivenciamos (Quadro 4).

Quadro 4

Percepção visual da Celeste. (Registro em áudio do dia 31/10/2022)

Celeste: *Aqui, realmente, eu pensei em desenhar, porque eu fui na ideia do triângulo, foi a primeira coisa, mas aqui deu certo, as medidas no meu caderno não deram não, aí eu coloquei que estavam fora de escala.*

Formador: *Você pensou no triângulo, por que pensar no triângulo logo de cara? O que levou você a pensar diretamente no triângulo?*

Celeste: *Porque se ele vai para baixo, depois vai para a direita, para ele voltar para o lugar teria que ir na diagonal. [...]*

Celeste: *E aqui eu pensei a mesma coisa, só que já pensando na bola, o que me ajudou muito.*

Formador: *Isso na letra b?*

Celeste: Na letra b, marquei 10 para este ponto aqui, aí já marquei pra cá e, depois, marquei 10 de volta, só que meio arredondado.

Celeste fez o **desenho de um triângulo** na tentativa de representar o caminho percorrido pelo urso na superfície da bola de isopor, na folha de papel A4 (Figura 2). Ela acreditou que esta representação seria correta e que todos os lados da representação geométrica construída no plano **tinham as mesmas medidas**, e argumentou que **os lados do triângulo eram meio arredondados** pelo fato de estar na superfície de uma bola.

Figura 2

Representação plana da resolução na bola de isopor, Celeste. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)



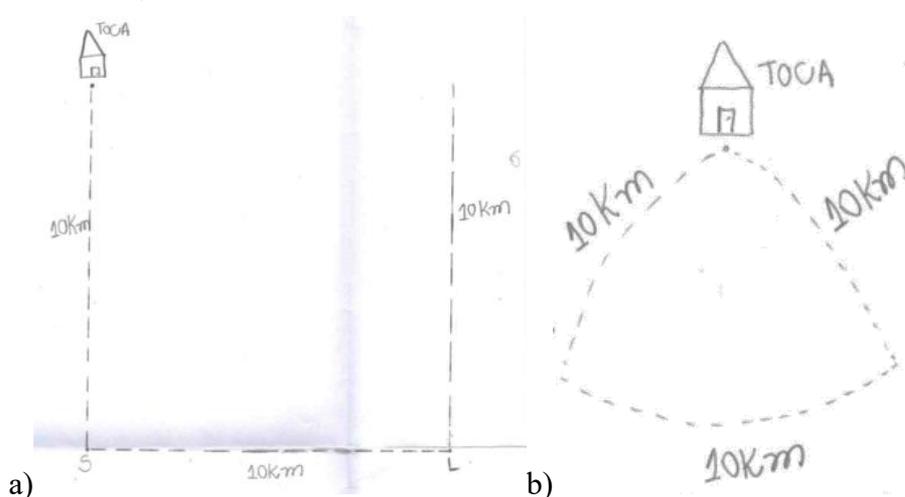
A percepção visual mobilizada pela Celeste também se fez presente no item 2, sendo que **a leitura do enunciado pode ter influenciado na construção da sua imagem visual** para uma possível solução. Outra possibilidade de influência é, por ter manuseado e explorado a bola de isopor no item 1, isso favoreceu o desenvolvimento de sua percepção visual, contribuindo para a construção de uma representação mental, ao notar que o

elástico percorre toda a superfície esférica da bola de isopor até retornar ao ponto de partida.

A situação relatada por Celeste se repetiu com Órion, quando argumentou que **o caminho percorrido pelo urso era um triângulo** (Figura 3), isso a partir da leitura do enunciado do item 1. A construção de uma **imagem visual** pode estar **associada ao seu conhecimento de GE**, com base na mobilização da sua percepção visual.

Figura 3

Representações construídas por Luna e Órion. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)



Luna ficou confusa e questionou Órion para onde que o urso iria após percorrer a distância de 10 km para o leste. Órion **explorou possíveis situações** para conseguir lhe explicar seu raciocínio, construindo **argumentos matemáticos**, para afirmar que o caminho percorrido **era um triângulo**.

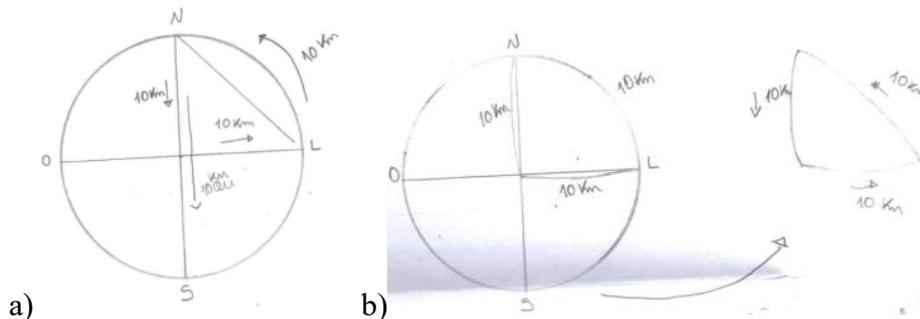
Ao explorar outras estratégias com a Luna, Órion realizou **movimentos com a imagem visual**, de forma que conseguisse responder à dúvida dela. Estas manipulações realizadas por Órion viabilizam desenvolver processos e habilidades que estão associadas ao pensamento geométrico, como os processos de interpretação visual de informações e interpretação de imagens

mentais, e as habilidades de percepção de figura-fundo, rotação mental e percepção de posições espaciais.

Aurora e Balthazar apresentaram outras possibilidades para representar o caminho percorrido pelo urso, para a situação da folha A4 e da bola de isopor (Figura 4).

Figura 4

Resoluções elaboradas pela Aurora. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)



Aurora argumentou que o urso deveria chegar na sua toca, mesmo tendo a orientação de que o caminho a ser seguido seria para a direção norte, simplesmente pelo fato de, **no enunciado do item 1, constar a expressão “chegando assim à sua toca”**.

Aurora afirmou que a resposta para a questão era a **mesma representação feita pela Celeste** (Figura 1), visto que o caminho traçado levava o urso até a sua toca, **discordando da resposta da Luna** (Figura 3a), na qual o urso seguiu pela direção norte sem chegar à sua toca.

Na discussão coletiva do item 1 da tarefa, Balthazar reconheceu ter havido uma **diferença entre as superfícies plana e esférica** e que a **representação de um objeto espacial em um plano** não era algo simples de se fazer. Balthazar disse à Aurora que seria preciso **ter um olhar em perspectiva** para compreender o caminho percorrido pelo urso (Quadro 5), olhar para o todo sem focar em algo específico, como ela estava fazendo.

Quadro 5

Olhar em perspectiva do Balthazar. (Registro em áudio do dia 31/10/2022)

Balthazar: *Agora a sua perspectiva é outra. Agora a sua perspectiva é aqui. O seu olhar em perspectiva! Você não está indo reto?*

Aurora: *Ah tá!*

Balthazar: *Entendeu?*

A representação e as explicações de Balthazar, durante a resolução do item 1 e nos diálogos com a Aurora, nos possibilitam dizer que houve a **mobilização da percepção visual além de conhecimentos de GE, inclusive indícios de conhecimento sobre GNE**, como a noção de profundidade e de projeção em Geometria Projetiva.

Elementos da Visualização mobilizados por FPMat

A seguir, descrevemos elementos da visualização mobilizados por FPMat na resolução e na discussão da tarefa *Conhecendo a Geometria Esférica*, nomeadamente: a criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos, as representações externas e os processos e habilidades da visualização.

CRIAÇÃO DE IMAGENS MENTAIS E REPRESENTAÇÕES DE OBJETOS GEOMÉTRICOS

Durante as resoluções da tarefa, os FPMat apresentaram dificuldades para a constituição de imagens mentais, principalmente no momento em que eles analisaram as possibilidades de solução para o que era proposto em cada item, em busca de **reconhecer e validar** alguma definição ou propriedade geométrica.

No Quadro 6, há um excerto representativo que ilustra o modo como os FPMat parecem mobilizar o elemento associado à visualização, no caso a imagem mental. Órion, em diálogo com Luna, afirmou que o caminho percorrido pelo urso era um triângulo. Tal elemento relacionado à visualização igualmente foi observado nas interações e nos diálogos entre outros FPMat.

Quadro 6

Imagem mental da Luna e do Órion. (Registro em áudio do dia 31/10/2022)

Órion: *O que é isso aqui? Por quê?*

Luna: *É para fazer a atividade do professor.*

Órion: *Vai ser um triângulo!*

Luna: *Ah, verdade isso?*

Órion: *Por precaução.*

Balthazar, ao representar o caminho percorrido pelo urso, apresentou um registro gráfico, que nos permite lembrar de um triângulo construído na superfície de uma esfera. Isto é, a representação de um triângulo esférico desenhado na superfície plana.

De acordo com Balthazar, esta representação se desenvolveu após **tentativas de desenhar** o caminho percorrido pelo urso por meio de conteúdos de GE, especificamente de **circunferência e distância**, (Quadro 7). Diante desta circunstância, o FPMat ressaltou a necessidade de trabalhar em uma dimensão superior na qual estava, isto é, construir uma representação na esfera e, conseqüentemente, obter a distância correta.

Quadro 7

Registro das discussões entre Balthazar e Formador. (Registro em áudio do dia 31/10/2022)

Balthazar: *A gente tentou representar na circunferência. Em vez de pegar a ideia delas na esfera, a gente tentou representar primeiro na circunferência. Então ele desceria, depois, ele vira aí para o lado e, em seguida, deveria chegar. Só que esse tamanho de chegar ele já não daria certo, e ele também não estaria indo diretamente para o norte, então já seria um erro em duas questões. Pra gente representar isso aí, de uma maneira certa, eu teria que representar na esfera, que daí daria para pegar à outra dimensão que falta para poder dar o tamanho e a distância certa.*

Formador: *Entendi!*

Aurora, ao registrar sua justificativa para a resolução do item 1, argumentou que “*as medidas desenhadas no papel não ficaram corretas, somente na esfera que não é plana*” (Registro do dia 31/10/2022). A justificativa da Aurora é referente às **tentativas de desenhos** que fizera para representar o

caminho percorrido pelo urso, afirmando não ser possível utilizar as medidas indicadas no item 1.

Para o item 2 da tarefa, Aurora respondeu que **só seria possível retornar ao ponto de partida na bola**. Percebe-se que a resposta produzida parte de uma construção mental, isto é, de uma imagem mental que é a **representação cognitiva a partir de um elemento visual**, que é a bola de isopor.

Na resolução do item 3, os FPMat argumentaram não ser possível representar um triângulo plano na superfície de uma esfera por ela estar em uma dimensão superior, espaço tridimensional (Figura 5).

Figura 5

Resolução do item 3 da Luna. (Registro fotográfico do dia 07/11/2022)



Na discussão em pares, Luna e Órion argumentaram não ser possível representar um triângulo plano sobre a superfície da bola de isopor. E disseram que a representação do triângulo plano não tocaria todos os seus pontos na superfície da bola de isopor (Quadro 8).

Quadro 8

Diálogo entre Luna e Órion. (Registro em áudio do dia 07/11/2022)

Órion: *Ok! Entendi. É impossível de representar um triângulo em uma bola, em uma esfera. Putz! Por que será?*

Luna: *Por que nem todos...*

Órion: *Por que será?*

Luna: *É porque o triângulo não toca todos os lados certinhos na esfera.*

Órion: *E por quê?*

Luna: *Porque ele não está na geometria plana, ele não está no plano. Ele está em uma esfera*

Órion: *É porque estamos tentando colar uma representação de um triângulo presente na geometria plana em uma esfera, na geometria espacial. Vamos colocar isso!*

Diante de tais discussões, os FPMat puderam constatar que **nem sempre é possível representar adequadamente uma situação que ocorre no espaço tridimensional em um espaço bidimensional**. Cabe, portanto, levar em consideração o sistema em que a representação é produzida.

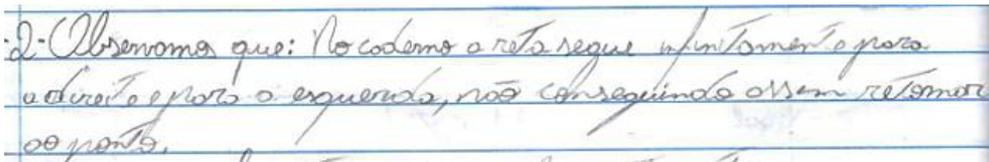
Baseados nas evidências apresentadas, podemos inferir que a **imagem mental e a representação geométrica** são elementos importantes no processo de aprendizagem de geometria, especialmente na construção do conhecimento geométrico, na intenção de criar ou transformar informações escritas ou gráficas em possíveis estratégias de resolução de problemas de geometria.

REPRESENTAÇÕES EXTERNAS

Aurora e Balthazar valeram-se da **representação verbal** para justificar sua resposta ao item 2, afirmando que a reta cresce indefinidamente para a esquerda e para a direita, o que retrata um dos conteúdos abordados na tarefa (Figura 6).

Figura 6

Representação verbal do item 2 do Balthazar. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)

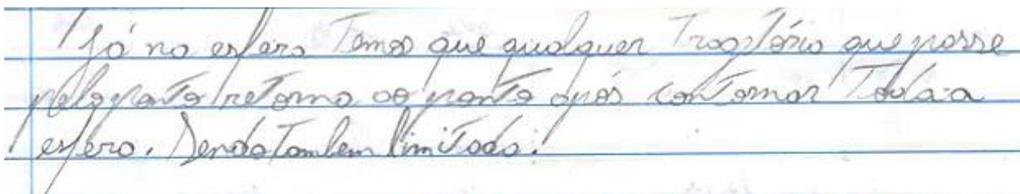


2- Observamos que: No mesmo a reta segue infinitamente para a direita e para a esquerda, não conseguindo assim retornar ao ponto.

Balthazar explicou que, ao passar o elástico sobre a superfície da bola de isopor, a reta retorna ao ponto de partida após contornar toda a bola de isopor, a que se trata de uma reta **limitada** (Figura 7). Isto é, uma **reta que tem um limite** (um comprimento, que corresponde a uma volta na superfície de uma esfera, tem um início e um fim), mas que podemos **dar tantas voltas nela quanto quisermos**.

Figura 7

Representação verbal do item 2 do Balthazar. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)



Hoje na esfera temos que qualquer trajetória que nosse volta para o ponto após contornar toda a esfera. Sendo também limitada!

Uma representação verbal que se assemelha ao registro escrito de Balthazar foi feito pela Celeste, ao observar o que acontece na folha de papel A4 e na bola de isopor, afirmando que a situação na qual permite retornar ao ponto de partida é na bola de isopor.

Celeste apresentou uma justificativa para sua resolução do item 2, que identificamos como uma representação verbal, escrita de maneira informal e sem empregar conhecimentos geométricos, sem definir que o elástico representa uma reta na superfície esférica e que se trata de uma reta limitada e infinita.

A resolução apresentada por Luna e Órion para o item 2 é semelhante ao que foi exposto por Balthazar e Celeste. Luna e Órion utilizaram uma representação verbal e gráfica e afirmaram que só seria possível retornar ao ponto de partida na bola de isopor e que, na Geometria Euclidiana Plana, não

seria possível retornar ao ponto de partida, porque a reta cresce indefinidamente para ambos os lados a partir de um ponto qualquer no plano.

Para o item 3, Celeste apresentou uma representação gráfica (colagem do triângulo plano na superfície plana) e uma representação verbal (sem empreender definições e teoremas) (Figura 8). Os argumentos utilizados por ela nos permitem inferir que ela reconheceu a imperfeição da colagem do triângulo plano sobre a superfície da bola de isopor.

Figura 8

Representação externa para o Item 3 - Celeste. (Registro no caderno do dia 07/11/2022)



Em um trecho do diálogo entre Celeste, Zora e Aria, em que Aria teve uma dúvida a respeito da colagem dos triângulos planos sobre as superfícies plana e esférica, Celeste ressaltou que **um dos triângulos estava no plano e o outro estava na superfície esférica** (Quadro 9). Aria identificou a **diferença entre as duas superfícies geométricas**, indagando que o passo seguinte seria somente escrever a resposta.

Quadro 9

Diálogo entre Celeste, Zora e Aria. (Registro em áudio do dia 07/11/2022)

Aria: *Eu não sei o que aconteceu.*

Zora: O que?

Celeste: Não viu que aqui colou certinho e aqui não cola oh, porque não é plano. A lógica é essa!

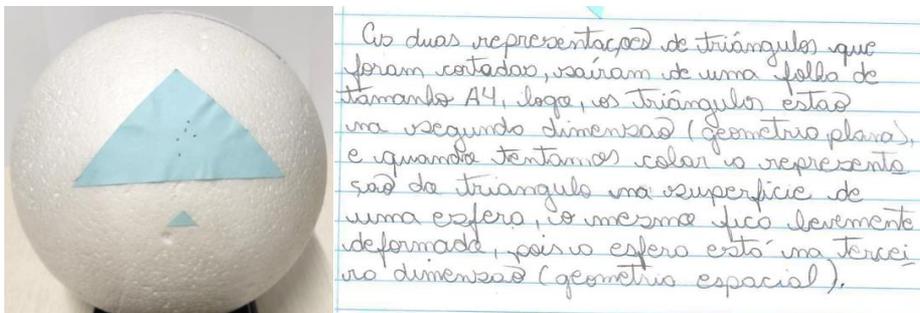
Aria: É só escrever.

Na intenção de provocar os FPMat, o formador os questionou sobre a possibilidade ou não de colar outros triângulos de tamanhos diferentes sobre a superfície da bola de isopor, e o que aconteceria com o triângulo plano. Aria argumentou que, se fosse um **triângulo menor**, com **os lados tendo medidas inferiores**, as quais elas tinham utilizado, a **representação plana do triângulo** na superfície da bola de isopor se **aproximaria de uma situação feita no plano**. Ou melhor, o triângulo não iria conter tantas deformidades, ao ser colado na superfície da bola de isopor.

Esta afirmação de Aria foi reiterada por Luna e Órion, **ao representarem** em uma bola de isopor **um triângulo plano suficientemente pequeno**, com **medidas menores** em relação ao triângulo plano representado inicialmente, ao ponto de se tornar quase impossível de manuseá-lo com as mãos, e **constatarem que não se observavam deformidades neste triângulo plano**, ao ser colado sobre a superfície da bola (Figura 9).

Figura 9

Representações externas do Órion. (Registro no caderno do dia 07/11/2022)



A exploração e os questionamentos produzidos por Luna nos permitem dizer que houve a mobilização da imagem mental, bem como sua articulação com a representação externa (verbal e gráfica), na intenção de constituir uma explicação se o fato identificado é válido ou não para qualquer que seja o

triângulo plano a ser colado sobre a superfície de uma bola de isopor, por maior ou menor que ele seja.

A exploração feita com os materiais utilizados na resolução da tarefa possibilitou aos FPMat **trabalharem a sua percepção visual**, por terem acesso ao enunciado da tarefa (uma representação externa), além de conseguirem articular o **registro escrito com a representação feita no papel e na bola** (representação verbal e gráfica), diretamente associado à imagem mental construída por eles.

Luna e Órion reconheceram a dificuldade de representar **objetos tridimensionais em um espaço bidimensional** e, conseqüentemente, a **diferença entre as superfícies plana e esférica** (Quadro 10).

Quadro 10

Diálogo entre Luna e Órion. (Registro em áudio do dia 07/11/2022)

Luna: *Por que uma está na geometria plana e a outra???*

Órion: *Uma está em duas dimensões e a outra em três. É, ué!*

[...]

Luna: *Simples! Uma é na geometria plana e a outra é na geometria esférica.*

Semelhantemente a Luna e Órion, Balthazar conseguiu articular a **imagem mental construída com a representação externa**, relatando sua dificuldade em colar o triângulo plano na superfície da bola de isopor. Pelo **triângulo ser plano**, é mais “*fácil*” de colá-lo na superfície plana do que querer colá-lo na superfície esférica.

Os indícios apresentados evidenciam a importância das **representações externas** (verbal ou gráfica) **no ensino de geometria**, por exigir processos de conversão e de tratamento entre as informações que são fornecidas e/ou construídas, seja elas verbais ou gráficas. Merecem destaque as conversões entre as informações verbais e gráficas, ao serem empreendidas pelos FPMat, que devem ter relações intrínsecas entre si, de forma que seja possível compreender o raciocínio e a estratégia de resolução que fora construída.

PROCESSOS E HABILIDADES DE VISUALIZAÇÃO

No que se refere aos processos e às habilidades da visualização, os FPMat mobilizaram: interpretação visual de informações e a interpretação de imagens mentais (processo de visualização), e percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais (habilidades de visualização).

Durante a resolução da tarefa, os FPMat realizaram **mudanças entre os registros de representação externa**. Isto é, eles modificaram suas estratégias, alternando entre registro gráfico e registro verbal, ora buscavam por uma justificativa que atendesse à imagem mental e/ou registro gráfico, ora buscavam compreender o registro verbal a partir do registro gráfico.

O subprocesso que foi mais mobilizado pelos FPMat na exploração da tarefa foi o subprocesso de “interpretação visual de informações”, que está associado à interpretação de relações abstratas e de dados não figurais em termos visuais, além de manipulação e transformações de imagens visuais.

No Quadro 11, temos o excerto do diálogo entre o formador e os FPMat (discussão coletiva), em que há indícios da presença do subprocesso de interpretação visual de informações.

Quadro 11

Interpretação visual mobilizada no Item 2. (Registro em áudio do dia 31/10/2022)

Formador: *Em qual das situações é possível retornar ao ponto de partida? Por quê? Descreva detalhadamente sua resposta apresentando uma justificativa. (Leitura do enunciado do item 2 da tarefa).*

Celeste: *Na bola!!!*

Formador: *Na bola, mas por que na bola é possível retornar?*

Andrieli: *Por aqui é plano!*

Formador: *É plano! E o que mais? Além do plano, o que acontece?*

Bruna: *Na situação da bola de isopor!*

Jhonatam: *São, sei lá. Pelo ponto são lados opostos, tipo não tem como se encontrarem se não for uma esfera.*

A interpretação visual de informações também é presenciada no diálogo entre Luna e Órion, quando Órion respondeu, ao término da leitura do enunciado do item 1, que o **caminho percorrido pelo urso seria um triângulo**.

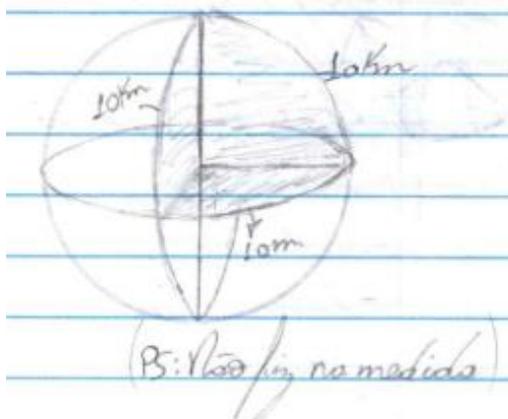
Trata de uma interpretação de um registro escrito em uma imagem mental que se tornará uma representação gráfica.

O subprocesso de “interpretação visual de imagens” está associado ao conhecimento de convenções visuais, ao uso de vocabulário espacial utilizado em trabalhos que envolvem conceitos de geometria, além de trabalhos com gráficos, tabelas e diagramas dos mais variados contextos, bem como a leitura e a interpretação de imagens mentais ou físicas.

Este subprocesso também pode ser identificado, quando Baltazar buscou por **outras estratégias para a resolução** do item 1, utilizando **imagens mentais e representações externas** (Figura 10).

Figura 10

Interpretação de imagens do Baltazar. (Registro no caderno do dia 31/10/2022)



Esta representação do Baltazar nos remete a um **objeto geométrico** específico da **Geometria Esférica**, que é o **triângulo esférico trirretângulo**. Ao ser questionado sobre as estratégias utilizadas que possibilitaram construir esta representação, Baltazar argumentou que **apenas se lembrou de fazer a representação de uma esfera na folha de papel A4** e, sobre ela, traçar o caminho percorrido pelo urso. Após as tentativas de desenhos para explicar o caminho percorrido pelo urso, Baltazar fez uma representação gráfica,

retratando uma esfera e o possível caminho do urso, havendo aí indícios da mobilização de processos e habilidades de visualização.

Aurora e Balthazar, quando discutiram sobre **o caminho pela direção norte a ser percorrido pelo urso**, mobilizaram o subprocesso de interpretação visual de imagens (Quadro 12).

Quadro 12

Diálogo entre Aurora e Balthazar. (Registro em áudio do dia 31/10/2022)

Balthazar: *A gente não sabe desenhar a esfera.*

Aurora: *Então nenhuma deles dá para o Norte se for assim!*

Balthazar: *Dá, aquela ali dá! Aquela ali é a representação de uma esfera. Eles pegaram uma parte da esfera. Como se eles tivessem pegado só isso aqui.*

Aurora: *Independente. Mesmo assim está indo para Oeste. Onde que está indo para o Norte? Não tem que subir reto?*

Balthazar: *Oh, desceu, depois que a gente desce...*

Aurora: *Não tem que ir reto?*

Balthazar: *Está reto!*

Aurora: *Não! Oh!*

Balthazar: *É que você olhando assim está vendo um triângulo e não é um triângulo, direto. Ele tem as retinhas aqui!*

Aurora: *Aqui por exemplo. Se aqui está em pezinho [vertical] pra cá, aí eu venho pra cá reto.*

Balthazar: *Agora a sua perspectiva é outra. Agora a sua perspectiva é aqui. Você não está indo reto?*

Aurora: *Ah tá!*

Nem todos os FPMat conseguiram mobilizar os processos de modificação de imagens e representações em suas estratégias de resolução. As habilidades de visualização mobilizados por eles foram percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental, percepção de posições espaciais.

As habilidades de visualização evidenciadas nos excertos das gravações em áudio e nas figuras que conservam os registros dos FPMat são identificadas como “percepção figura-fundo” e “constância perceptiva”, quando Órion **respondeu imediatamente ao término da leitura** do item 1 feita pelo formador.

A habilidade de “constância perceptiva” é observada nas falas e nos registros do Balthazar, assim como a habilidade de “rotação mental”, que foi mobilizada, quando ele proporcionou **diferentes registros gráficos a partir de sua imagem mental**, como podemos observar na Figura 10.

Outra habilidade de visualização mobilizada por Balthazar foi a “percepção de posições espaciais”, que ocorreu quando ele comentou com Aurora sobre **ter um olhar em perspectiva para reconhecer que o caminho percorrido pelo do urso sobre a bola de isopor seria um triângulo**, conforme excerto do Quadro 5.

A habilidade de “percepção de posições espaciais” também foi observada no momento em que Aurora e Balthazar **discutiram sobre o caminho pela direção norte a ser percorrido pelo urso**, de acordo com o excerto do Quadro 12.

Nos indícios apresentados, é possível identificar que apenas as habilidades percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais foram manifestadas por Balthazar e Órion. Durante a resolução da tarefa, nem todos os FPMat empreenderam as habilidades de visualização em suas estratégias.

VISÃO E VISUALIZAÇÃO E A MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Na exploração da Tarefa *Conhecendo a Geometria Esférica*, os FPMat tiveram a oportunidade de mobilizar **conhecimentos associados às geometrias** e ao **pensamento geométrico**, como a **percepção visual** relacionada à **visão** e elementos relativos à **visualização**, nomeadamente a criação de **imagens mentais e de representações de objetos geométricos, representações externas e processos e habilidades da visualização**.

No que se refere aos **processos de visualização**, os FPMat mobilizaram a **interpretação visual de informações** e a **interpretação de imagens mentais**. Quanto às **habilidades de visualização**, os FPMat mobilizaram **percepção figura-fundo, constância perceptiva, rotação mental e percepção de posições espaciais**.

Nas interações que aconteceram no decorrer das discussões coletivas da tarefa, buscamos identificar **conhecimentos sobre as geometrias** que foram mobilizados pelos FPMat, em especial aqueles que passaram por um **processo de ressignificação** a partir do engajamento e da participação deles.

No processo de negociação de significados, desencadeados a partir da resolução, discussão e sistematização das aprendizagens, foram identificadas **aprendizagens** dos FPMat quanto às:

- potencialidades observadas nas diferentes estratégias para a resolução da tarefa, algumas envolvendo Geometria Plana e Geometria Esférica, que evidenciaram a mobilização, por alguns FPMat, de elementos da visão e da visualização associadas ao pensamento geométrico;
- fragilidades, ao trabalharem com os conceitos de geometrias, ao elaborarem estratégias de resolução, indicando que alguns FPMat tinham pouca familiaridade com o conteúdo, ao lidarem com situações que envolvem as geometrias (por exemplo conceito de reta, noção de ângulo conceito de esfera);
- potencialidades dos materiais manipuláveis disponibilizados aos FPMat, como recursos potenciais para a exploração e a resolução da tarefa, com o apoio de registros escritos e gráficos;
- escolhas de representações verbais e gráficas adequadas para cada item da tarefa.

Os FPMat, a partir do processo de sistematização do item 2, mostraram-se mais **engajados e participativos**, ao trabalharem com a tarefa, e tiveram a oportunidade de **ressignificar conceitos de Geometria Euclidiana Plana** (por exemplo a noção de reta), e **compreender conceitos da Geometria Esférica**.

No item 2, os FPMat puderam representar uma reta na superfície plana de uma folha de papel A4, e na discussão afirmaram que a reta no plano era infinita e ilimitada. Na Geometria Esférica, puderam observar que a reta sobre a superfície da bola de isopor (representação de uma esfera) retornava ao ponto de partida ao contornar toda a sua superfície, sendo uma reta que apresenta início e fim, e também por permitir dar tantas voltas quanto quisermos.

Esse cuidado dos FPMat com o espaço geométrico, objeto de estudo, foi observado nas discussões em pares (entre as duplas) durante a resolução dos itens da tarefa, em específico nos itens 1 e 3, quando foram exploradas duas superfícies geométricas, uma plana e outra esférica. Na discussão coletiva, os FPMat puderam analisar que **situações que ocorrem no plano, dificilmente, acontecem na superfície de uma esfera**, e vice-versa.

A articulação entre objetos no espaço geométrico bidimensional com o espaço geométrico tridimensional se apresentou como uma dificuldade para os FPMat (Duval, 1999; Elia et al., 2018; Swoboda, 2008).

O **desconhecimento das GNE** pelos FPMat pode ter algum envolvimento nas dificuldades enfrentadas por eles na resolução da tarefa proposta. Em cada um dos itens, os FPMat buscavam **justificar suas estratégias** de resolução por meio de **conhecimentos de GE**, pelo simples fato de conhecerem apenas seus princípios.

Apesar de a GE ser um conteúdo estudado no 1.º ano da Graduação, os FPMat revelaram compreensões equivocadas em alguns conceitos (por exemplo conceito de reta, semirreta e segmento de reta, noção de ângulo na Geometria Euclidiana Plana, conceitos entre posições relativas entre retas), que foram esclarecidas durante a negociação de significados e a sistematização das aprendizagens.

À medida que as discussões avançaram, os FPMat não utilizaram os conceitos de forma errônea, empoderando-se dos novos significados e produzindo argumentos matemáticos convincentes. De acordo com Melo (2005), “esse domínio amplo e profundo da matéria de ensino pelo professor é fundamental e necessário, sobretudo quando se busca inovação curricular” (p. 39).

Os FPMat **participaram ativamente das negociações de significados, compartilhando informações e questionamentos** sobre as geometrias e **legitimando as estratégias de resolução** produzidas pelos colegas. O formador incentivou-os a compartilharem suas estratégias e raciocínios, conduzindo as discussões coletivas e a participação deles na legitimação do conhecimento produzido.

Durante o processo de negociação de significados, identificaram-se evidências de aprendizagens dos FPMat a partir dos **registros escritos e gráficos**, quanto aos elementos da visualização, nomeadamente: criação de imagens mentais e de representações de objetos geométricos, representações externas e processos e habilidades da visualização.

Segundo Elia et al. (2018), a **visualização** em geometria é um processo cognitivo essencial do pensamento geométrico, que envolve o reconhecimento de formas geométricas que podem ser identificadas em alguma unidade figural além da possibilidade de manipular e operar com essas figuras. Assim, a visualização viabiliza apreender simultaneamente um objeto geométrico por completo, distinguindo todas as suas unidades figurais e suas especificidades.

A visualização, assim como a representação, está no cerne da atividade matemática realizada por estudantes e professores. Ela não é intuição, porque não é mera percepção visual. A visualização em matemática é necessária, porque oportuniza organizar as relações entre as diferentes formas de registro para um mesmo objeto matemático (Duval, 2014; Elia et al., 2018)

Os FPMat utilizaram os registros verbais e gráficos, à medida que avançavam nas discussões em pares, na intenção de **elaborar estratégias geométricas** (representação de figuras planas e espaciais) **e/ou matemáticas** que proporcionassem a solução dos itens da tarefa (Gutiérrez, 1996). Os FPMat estabeleceram relações entre as **imagens mentais e as representações externas** e buscaram criar e/ou transformar imagens mentais em registros verbais ou gráficos de forma que pudessem expor suas ideias.

O acesso a registros externos pode ter contribuído para a constituição da **percepção visual** dos FPMat, sendo que alguns deles tiveram mais dificuldades que outros. Tais dificuldades podem estar relacionadas à maneira com a qual os FPMat interpretaram as informações contidas nos enunciados dos itens ou, até mesmo, à forma que elaboraram a imagem visual das situações.

De acordo com Gutiérrez (1992), a **percepção visual é o elemento básico para as representações mentais dos sujeitos**. Isto é, são as representações de objetos físicos ou de situações que as pessoas fazem a partir do que é observado.

Duval (1999) diz que a **percepção visual fixa imediatamente a visão de algumas formas** (objetos e situações), que essa evidência as torna firmes, e que o ensino de Geometria deve partir da **intuição geométrica** que se enfatiza na percepção.

A **percepção visual** tem limitações por vivermos em um mundo tridimensional, do qual só conseguimos apreender uma parte do objeto explorado. Quando acessamos qualquer representação visual de objetos físicos fora da matemática, só é possível focar apenas um lado específico deste objeto, podendo ser explorado por movimentos do objeto físico ou do sujeito que o está observando (Duval, 1999; Elia et al., 2018).

Os elementos da visão e da visualização, mobilizados pelos FPMat durante a resolução da tarefa desenvolvida, foram significativos e potenciais para a aprendizagem de conceitos da Geometria Esférica, inclusive para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Os FPMat puderam reconhecer a contribuição de outras geometrias, como as GNE, para a constituição do campo da Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação destaca a importante presença da Geometria Euclidiana (GE) na resolução das tarefas e na tomada de decisões relacionadas à construção das estratégias de resolução. Isso se deve, em grande parte, ao fato de os FPMat terem estudado conceitos de geometria desde o início de sua escolarização, com a geometria euclidiana sendo apresentada, até o século passado, como uma verdade absoluta, sem questionamentos.

No início do trabalho na disciplina, alguns FPMat afirmaram conhecer o básico de GNE por meio de seus professores da Educação Básica, os quais haviam comentado sobre a existência de outras geometrias. Outros FPMat relataram que nunca tinham estudado nada sobre as GNE, e que apenas conheciam as Geometrias Euclidianas Plana e Espacial.

O trabalho com a tarefa apoiada com materiais manipuláveis possibilitou aos FPMat ressignificarem aprendizagens sobre as geometrias, em especial a GE e a Geometria Esférica. Além do mais, oportunizou a mobilização de elementos associados à visão e à visualização, intrinsecamente relacionados ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

A exploração das tarefas com o auxílio dos materiais manipuláveis, que compuseram cada item em conjunto com as ações do formador, conduziu os FPMat a uma trajetória reflexiva sobre os conceitos e os processos de ensino e aprendizagem das geometrias. Esses materiais funcionaram como elementos motivadores, incentivando-os a identificarem o que ocorre na prática e a buscarem explicações e fundamentos para suas ações e interações. Durante a exploração das situações propostas, os FPMat tiveram a oportunidade de desenvolver elementos essenciais para o pensamento geométrico, como a visão e a visualização, que se refletem nos registros escritos nos cadernos e nos diálogos gravados.

Um questionamento referente aos materiais manipuláveis utilizados pelos FPMat é a sua limitação, por não possibilitarem uma abstração para além daquilo que é explorado em cada uma das situações propostas na tarefa. Talvez seja preciso que haja outras investigações que analisem as contribuições de *softwares* de geometria dinâmica para o desenvolvimento do pensamento geométrico e a contribuição da visão e da visualização no ensino de GE e GNE, em especial na formação inicial e continuada de PMat.

Ressaltamos a importância de se trabalharem com os PMat e os FPMat conceitos de GNE, que estão tão próximos de todos nós, atendendo às nossas necessidades tanto quanto a GE, uma vez que ela pode favorecer o ensino e a

aprendizagem de outros conceitos matemáticos, inclusive da própria GE com a possibilidade de promover o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A investigação foi realizada com um pequeno grupo de FPMat, com características bem particulares, visto que estavam vindo de um período pós-pandêmico, e a disciplina de GE tinha sido trabalhada totalmente assíncrona e de maneira axiomática. Considera-se relevante sua ampliação para outros grupos de FPMat e PMat com características diversas, o que poderá revelar aspectos complementares.

Em conclusão, a investigação envolvendo a Geometria Esférica desempenhou, portanto, um papel significativo no desenvolvimento do conhecimento geométrico dos FPMat, favorecendo o desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, essa investigação permitiu ressignificar os conhecimentos prévios sobre Geometria Esférica, proporcionando aos participantes a oportunidade de explorar situações por meio de materiais manipuláveis, o que, provavelmente, favoreceu o raciocínio geométrico.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos FPMat pelo engajamento neste estudo, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida a Talisson Fernando Leiria e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/Brasil) pela bolsa de produtividade em pesquisa concedida a Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

T.F.L. e M.C.C.T.C. conceberam a ideia apresentada e desenvolveram a teoria. T.F.L. coletou os dados. Os autores analisaram os dados, discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo encontram-se sob a responsabilidade de T.F.L. e podem ser disponibilizados mediante solicitação razoável de demais interessados pelo período de cinco anos, por meio da assinatura de um termo de responsabilidade.

REFERÊNCIAS

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In North American Chapter of the PME. *Proceedings...* <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>
- Blanco, T. F. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. In *Actas de 9.º Festival Internacional de Matemática*, Quepos, Puntarenas, Costa Rica. <https://www.cientec.or.cr/sites/default/files/drupal7/articulos/visualizacion-geometria-teresafernandez.pdf>
- Barros, E. C. P., & Pavanello, R. M. (2022). Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC?. *JIEEM*, 5(1), 11-19.
- Carvalho, O. A., & Azevedo, J. S. (2020). Geometria não-Euclidiana: aplicações na educação básica. In J. P. S. Porto, K. S. F. L. Rocha, & S. A. Nascimento (Orgs.), *Inovações educacionais em matemática no Recôncavo* (pp. 109-133). EDUFRB.
- Coutinho, L. (2001). *Convite às geometrias não-euclidianas*. Interciência.
- Cybulski, F. C., & Cyrino, M. C. C. T. (2022, set./dez.) Geometria e pensamento geométrico na formação inicial de professores que ensinam matemática: o que revelam as pesquisas brasileiras entre 2009 e 2020. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 11(26), 44-65. <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/5202>
- Jesus, C. C. de, Cyrino, M. C. de C. T., & De Oliveira, H. (2018). Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 20(2), 21-46. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p21-46>
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for Learning. In *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Cuernavacas, Morelos, Mexico. <https://eric.ed.gov/?id=ED466379>
- Duval, R. (2014). The first crucial point in geometry learning: visualization. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 1-

28. <https://www.cymsjournal.com/wp-content/uploads/2020/11/journal-Vol13Year2014.pdf>
- Elia, I., Ven den Heuvel-Panhuizen, M., & Gagatsis, A. (2018). Geometry learning in the Early Years: developing understanding of shapes and spaces with a focus on visualization. In V. Kinnear et al. (Eds.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (pp. 73-95). Early Mathematics Learning and Development. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7153-9_5
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). MacMillan. https://www.researchgate.net/publication/31640397_Qualitative_methods_in_research_on_teaching
- Erickson, F. (2012). Qualitative research methods for science education. Second international handbook of science education. In B. Fraser, K. Tobin, K., & C. McRobbie (Eds), *Second International Handbook of Science Education* (Springer International Handbooks of Education, Vol. 24, pp. 1451-1469). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9041-7_93
- Fonseca, J. A. (2020). *Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica*. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., & Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Gonzato, M, Blanco, T. F., & Godino, J. D. (2011, Julio). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 99-117. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1209239/Gonzato2011TareasNumeros77.pdf>
- Gomes, M. P. (2014). *Geometria esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal Fluminense, Niterói.

- Gutiérrez, Á. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial, en Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación em Educación Matemática: Geometría. *Cinvestav*, 44-59.
https://www.researchgate.net/publication/278785961_Procesos_y_habilidades_en_visualizacion_espacial
- Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: in search of a framework. In L. Puig, & Á Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: University of Valence, Spain.
<https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. In P. Flores, F. Ruiz, & M. de la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo* (Vol. 21, pp. 13-58). F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales.
<https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut06.pdf>
- Marmolejo, G.-A., & Astudillo, M. T. G. (2015, Noviembre.). Control visual em la construcción del área de superficies planas em los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*. 18(3), 301-328.
<https://doi.org/10.12802/relime.13.1831>
- Marmolejo, G.-A., Sánchez, N., & Londoño, S. (2017, Diciembre.). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 12(2), 18-28.
<https://doi.org/10.54343/reiec.v12i2.220>
- Melo, G. F. A. (2005). Saberes docentes de professores de Matemática em um contexto de inovação curricular. In D. Fiorentini, & A. M. Nacarato (Orgs.), *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática* (pp. 33-48). Musa Editora.
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, 1(1), 7-18.
- Reis, J. D'Arc S. (2006). *Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis*. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (SP).

- Schneider, E. I. (2012). *Uma contribuição aos ambientes virtuais de aprendizagem (ava) suportados pela Teoria da Cognição Situada (TCS) para pessoas com deficiência auditiva*. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Engenharia e Gestão do Conhecimento, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Silva, B. S., & Cyrino, M. C. C. T. (2024, jan./jun.). Geometrias não euclidianas na formação de professores de matemática: reflexões de professoras formadoras experientes no ensino de geometria. *Vidya*, 44(1), 325-350. <https://doi.org/10.37781/vidya.v44i1.5008>
- Silva, L. J. F. (2018). *Ensino de geometria projetiva e perspectiva: um olhar pelas fotografias*. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Swoboda, E. (2008). Space, geometrical regularities and shapes in children's learning and teaching. In *Annales of the 5.º Polish Mathematical Society* (pp. 11-122). Didactica Mathematicae. <https://bibliotekanauki.pl/articles/748800.pdf>
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometria. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa* 10(2), 275-300. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005&lng=es&tlng=es
- Vieira, A. F. M. & Cyrino, M. C. C. T. (2022, dez.). Pensamento geométrico: reflexões manifestadas por futuros professores de matemática em estudos do modelo de van Hiele. *Acta Scientiae*, 24(8), 286-314. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7164>
- Wenger, E. (2013). Uma teoria social da aprendizagem. In K. Illeris (Orgs.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (Trad. Ronaldo Cataldo Costa, pp. 246-257). Penso.
- Wenger, E. (2003). Communities of Practice and Social Learning Systems. In D. Nicolini, S. Gherardi, & D. Yanow (Eds.), *Knowing in Organizations: A Practice-Based Approach* (pp. 76-99). M.E. Sharpe. <https://doi.org/10.4324/9781315290973>