ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.64856/acta.scientiae.8306

Argumentação e prova no estudo das secções cônicas: a construção do conceito de parábola através da Resolução de Problemas

Mário Barbosa da Silva[a]
Norma Suely Gomes Allevato[b]

[a] Instituto Federal de São Paulo – campus Itaquaquecetuba, Colegiado de Matemática, Itaquaquecetuba, São Paulo, Brasil
[b] Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Londrina, Paraná, Brasil

RESUMO

Contexto: Documentos curriculares e as pesquisas em Educação Matemática valorizam o envolvimento dos alunos em atividades de resolução de problemas, articuladas à argumentação, prova e demonstração matemática. **Objetivo**: Analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático sobre o conceito de parábola e na dedução de sua equação. **Design**: Trata-se de uma pesquisa de natureza empírica, com abordagem qualitativa. **Ambiente e participantes**: A investigação foi realizada em duas turmas da 3ª série do Ensino Médio Profissionalizante, com alunos entre 17 e 19 anos. **Coleta e análise de dados**: Os dados foram obtidos por observação participante e análise documental, registrados em gravações, filmagens e diário de campo, e analisados por meio da Análise Textual Discursiva. **Resultados**: Os resultados indicam que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas favoreceu a construção e a compreensão do conceito de parábola, e da relação para gerar a cônica e a dedução de sua equação, empregando elementos dos raciocínios indutivo e dedutivo de forma consistente e coerente. O uso do GeoGebra potencializou a aprendizagem de forma reflexiva e crítica, mediante a coordenação de diferentes registros de representação e auxiliando na resolução do problema. **Conclusões**: A metodologia mostrou-se eficaz para promover a compreensão conceitual e a demonstração matemática. O processo avaliativo se constituiu em toda a atividade, permitindo orientar os alunos no decurso da resolução do problema, promovendo aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Argumentação e Prova; Parábola; Ensino Médio Profissionalizante; GeoGebra.

Argumentation and proof in the study of Conic Sections: the construction of the concept of the Parabola through Problem Solving

Corresponding Corresponding author: Mário Barbosa da Silva.
Email: prof.mariodasilva@outlook.com

ABSTRACT

Context: Curriculum documents and research in Mathematics Education highlight the importance of engaging students in problem solving activities, integrated with mathematical argumentation, proof, and demonstration. **Objective:** To analyse the contributions of the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving to the construction of mathematical knowledge regarding the concept of the parabola and the deduction of its equation. **Design:** This is an empirical study with a qualitative approach. **Setting and participants:** The research was conducted in two classes of the third year of a Vocational Upper Secondary School, involving students aged between 17 and 19. **Data collection and analysis:** Data were obtained through participant observation and documentary analysis, recorded via audio, video, and field diary, and analysed using Discursive Textual Analysis. **Results:** The findings indicate that the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving supported the construction and understanding of the concept of the parabola, the relation used to generate the conic section, and the deduction of its equation, through the consistent and coherent use of both inductive and deductive reasoning. The use of GeoGebra enhanced learning in a reflective and critical manner by coordinating diferente registers of representation and supporting problem solving. **Conclusions:** The methodology proved effective in fostering conceptual understanding and mathematical demonstration. The assessment process was integrated throughout the activity, allowing for student guidance during the problem-solving process and promoting mathematical learning.

Keywords: Problem-Solving; Argumentation and Proof; Parabola; Vocational High School; GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Diante da crescente complexidade do mundo atual, exigem-se dos indivíduos cada vez mais habilidades de pensamento crítico e de resolução de problemas, e a capacidade de adaptação a novas situações. Nesse contexto, o ensino da Matemática assume um papel fundamental na formação de cidadãos com elevado nível de conhecimento, aptos a contribuir tanto para o seu próprio desenvolvimento quanto para o da sociedade.

Documentos oficiais e de orientação curricular de vários países, como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), Princípios e Normas para Matemática Escolar (NCTM, 2000), Programa de Matemática (Portugal, 2013) e o *Mathematics Syllabuses Secondary One to Four* (Singapura, 2020), corroboram essa importância, destacando o desenvolvimento do raciocínio matemático como um dos principais objetivos da disciplina. Ademais, pesquisas em Educação Matemática têm evidenciado que o processo de aprendizagem por memorização e repetição pouco contribui para a compreensão conceitual dos conteúdos matemáticos, e demanda baixo nível de raciocínio matemático.

Os pesquisadores portugueses João Pedro da Ponte, Joana Mata-Pereira e Ana Henrique (2012, p. 356) salientam que, para desenvolver a capacidade dos estudantes de racionar matematicamente, é fundamental "[...] trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno".

Diante desses aspectos, consideramos que atividades fundamentadas na resolução de problemas podem ser uma estratégia de ensino eficiente para promover a compreensão tanto dos conceitos quanto dos conteúdos, trabalhados na disciplina de Matemática, além de desenvolver diversas habilidades cognitivas nos estudantes, as quais são relevantes para promover o raciocínio matemático para novas aprendizagens e para a vida.

A Resolução de Problemas, conforme salientaram os pesquisadores brasileiros Mário Barbosa da Silva, Ilda Pavret Silva, Norma Suely Gomes Allevato e Janaína Poffo Possamai (2023, p. 2), apresenta "[..] características notáveis em sala de aula, no sentido de promover a aprendizagem, despertar o interesse dos estudantes de forma contextualizada e dinâmica, e adequada ao cenário de complexidade em que se encontram as escolas".

Também a pesquisadora portuguesa Isabel Vale (2017, p. 131) destaca que a resolução de problemas se configura como uma necessidade cada vez mais presente na prática dos professores, em virtude dos seus benefícios no processo de ensino e aprendizagem. Isso se deve "[...] à necessidade de práticas em sala de aula onde se desenvolvam capacidades criativas dos estudantes, permitindo que todos participem ativamente na sua aprendizagem, onde possam fazer suas pesquisas e compartilhar suas descobertas".

Desse modo, neste trabalho, assumimos a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino que pode contribuir com a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático do estudante. Por meio deste estudo, objetivamos analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na construção do conhecimento matemático relacionado ao conceito de parábola e à dedução de sua equação, segundo as concepções de Allevato e Onuchic (2021). Para atingirmos nosso objetivo, propusemo-nos a responder à seguinte questão: Como ocorre a construção de conhecimento sobre parábola e a dedução de sua fórmula através da resolução de problemas? Esta é uma das questões respondidas a partir de práticas implementadas no âmbito de uma pesquisa maior desenvolvida pelos autores do presente trabalho.

Na sequência desta Introdução, desenvolveremos uma breve discussão teórica sobre Resolução de Problemas; posteriormente, abordaremos a Argumentação e a Prova matemática, apoiadas na literatura da Educação Matemática e sua relação com a Resolução de Problemas. Em seguida, apresentaremos os procedimentos metodológicos adotados e as análises dos dados decorrentes da atividade realizada. Explicitaremos, então, as Considerações Finais e, por fim, as Referências.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Resolução de problemas

Na atualidade, observa-se um consenso expressivo entre os educadores matemáticos quanto aos benefícios da implementação da Resolução de Problemas como metodologia de ensino no âmbito escolar. O pesquisador estadunidense John A. Van de Walle (2009, p. 9) salienta que, em um contexto de resolução de problemas, as atividades são centradas nos estudantes, além de promover o desenvolvimento de habilidades cognitivas e a plena compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, pois "[...] a compreensão e as habilidades são desenvolvidas melhor quando os estudantes têm a permissão para investigar novas ideias, criar e defender soluções para problemas e participar em uma comunidade de aprendizagem matemática".

A notoriedade dos benefícios de se trabalhar com a resolução de problemas no contexto escolar também é enfatizada pelos pesquisadores espanhóis Antoni Vila e Maria Luiz Callejo (2006), principalmente no que se refere à compreensão do conteúdo matemático, além do desenvolvimento da autonomia do aluno. Esses pesquisadores enfatizam que:

> [...] um problema não é apenas uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem que forme sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas (Villa & Callejo, 2006, p. 10).

De forma semelhante, os pesquisadores norte-americano Frank Lester e chinês Jinfa Cai (2016) enfatizam que as atividades centradas na resolução de problemas têm por finalidade propor desafios intelectuais aos estudantes, com o intuito de promover a compreensão dos conceitos e dos conteúdos matemáticos abordados. Além disso, durante a tentativa de resolução, o estudante poderá recorrer aos seus conhecimentos prévios para auxiliá-lo tanto na resolução quanto na construção de conhecimento acerca do novo conteúdo matemático. Esses pesquisadores acreditam que, no contexto da resolução de problemas, possibilita-se um processo dinâmico, no qual o aprendiz reformula suas ideias, conjecturas e aprendizado em cada resolução desenvolvida, pois "O poder da resolução de problemas reside no fato de que obter **uma solução bem-sucedida requer o aprimoramento, combinação e modificação do conhecimento que já adquiriu o estudante"** (Lester & Cai, 2016, p. 120, tradução e grifos nossos).

As pesquisas desenvolvidas pelas educadoras matemáticas brasileiras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato (2011) convergem com os aspectos das pesquisas supracitadas. Elas salientam que implementar a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, por elas intitulada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, contribui significativamente com a compreensão e a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos, pois:

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais aprimorado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série a ser atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema (Onuchic & Allevato, 2011, p. 85).

Para promover a aprendizagem através da Resolução de Problemas, as pesquisadoras sugerem dez etapas para o desenvolvimento dessa Metodologia em sala de aula:

> (1) proposição do problema; (2) leitura individual; (3) leitura em conjunto; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das resoluções na lousa; (7) plenária; (8) busca pelo consenso; (9) formalização e (10) proposição e resolução de novos problemas (Allevato & Onuchic, 2021, p. 52).

Essas etapas visam orientar os professores na promoção da compreensão e da aprendizagem em Matemática em sala de aula, segundo Allevato e Onuchic (2021). O trabalho através da Resolução de Problemas inicia com a proposição de um problema gerador, que pode ter sido elaborado, adaptado ou selecionado pelo professor com base nos objetivos de ensino; ou ainda, pode ser um problema sugerido pelos estudantes, com o intuito de promover a aprendizagem de conceitos ou conteúdos matemáticos ainda não aprendidos.

Na segunda etapa, os estudantes realizam uma leitura individual do problema e iniciam a resolução com base em suas interpretações e compreensões. Na terceira, trabalham em pequenos grupos para compartilhar seus conhecimentos e aprimorar ideias, interpretação e a linguagem matemática.

A quarta etapa é o momento em que os estudantes resolvem o problema. Nesse momento, é essencial que o professor acompanhe atentamente os grupos, mediando conflitos, auxiliando nas indagações e dúvidas que forem surgindo, além de incentivar os estudantes a usarem seus conhecimentos e questioná-los sobre a coerência dos procedimentos adotados. Na sexta etapa, ocorre a socialização das resoluções, momento em que cada grupo apresenta suas respostas, corretas ou não, para toda a turma, registrando-as na lousa.

Na sétima etapa, em sessão plenária, o professor estimula um grande debate para que todos se esforcem para chegar a um consenso sobre o resultado correto (oitava etapa), construir aprendizagens sobre as técnicas operatórias e a notação matemática, e aprofundar a compreensão dos conteúdos abordados pelo problema gerador. A penúltima etapa é dedicada à formalização, pelo professor, do conteúdo desencadeado pelo problema e, por fim, são propostos novos problemas visando consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores.

Esses aspectos são corroborados pelo documento normativo brasileiro BNCC (Brasil, 2018), enfatizando que:

> Os processos matemáticos de **resolução de problemas**, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como **formas privilegiadas da atividade matemática**, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e **estratégia para a aprendizagem** ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses **processos de aprendizagem** são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio,

> representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266, grifos nossos).

Em âmbito internacional, a Resolução de Problemas tem recebido importantes recomendações para ser introduzida como uma metodologia ou estratégia de ensino e aprendizagem. Nos Estados Unidos, destacam-se os *Principles and Standards for School Mathematics*, desenvolvido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). As orientações curriculares norte-americanas propõem uma visão relevante em relação à resolução de problemas, salientando que ela:

> [...] implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e, através deste processo, desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos. **A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática** (NCTM, 2000, p. 57, grifos nossos).

De forma similar, o documento curricular de Singapura (2020) também preconiza que a Resolução de Problemas não é apenas o objetivo final, mas também um processo de ensino que possibilita o uso de estratégias gerais e a heurística para abordar problemas de maneira sistemática e coerente. De acordo com esse documento, os estudantes do Ensino Médio precisam:

> • Adquirir conceitos e habilidades matemáticas para estudos avançados na área e para apoiar a aprendizagem em outras disciplinas, com ênfase nas ciências, mas não se limitando a elas;
> • **Desenvolver habilidades de pensamento, raciocínio, comunicação, aplicação e metacognição por meio de uma abordagem matemática, como a resolução de problemas**;
> • Conectar ideias dentro da matemática e entre a matemática e as ciências por meio de suas aplicações; e
> • Apreciar a natureza abstrata e o poder da matemática (Singapura, 2020, p. 14, tradução e grifos nossos).

Em um contexto de aprendizagem através da Resolução de Problemas a compreensão dos conceitos e dos conteúdos emergirão; ocorrerá a busca por justificativas embasadas em conceitos, para concordar com ou refutar a resolução apresentada. Além disso, será possível aprender diversas formas de resolução, desenvolver o raciocínio matemático e construir dados avaliativos em processo, ou seja, no decurso da aprendizagem. Esclarecidas essas ideias, na sequência, apresentaremos alguns aspectos teóricos sobre argumentação e prova matemática.

Argumentação e prova matemática

A literatura em Educação Matemática (Balacheff, 2019; Boavida, Gomes & Machado, 2002; Costa, 2023; De Villiers, 2010; Krakecker, 2022; Silva, 2016), bem como documentos oficiais (Brasil, 2018; França, 2015; Inglaterra, 2014; NCTM, 2000; Singapura, 2020) são contundentes em enfatizar a necessidade de desenvolver atividades de argumentação e prova matemática em todos os níveis de ensino, desde a Educação Básica. Essa importância refere-se ao desenvolvimento de habilidades cognitivas fundamentais para a constituição do cidadão reflexivo, crítico, criativo e com autonomia intelectual, como preconizado pela sociedade contemporânea.

O pesquisador francês Nicolas Balacheff (2019, p. 425, tradução e grifos nossos) salienta que as ações de "resolver, **argumentar**, **provar**, demonstrar, comunicar e convencer oralmente ou por escrito são todas dimensões da competência "raciocínio" que os programas[1] desejam que sejam adquiridas". No entanto, o pesquisador preconiza que, apesar de existir uma relação entre explicar, argumentar, provar e demonstrar, no contexto escolar, faz-se necessário esclarecer a distinção desses termos para promover uma compreensão coerente.

Segundo Balacheff (2019), a explicação visa esclarecer e validar um argumento a partir do entendimento do estudante, por meio dos seus conhecimentos prévios e sem regras, além de possibilitar a discussão, a rejeição ou a aceitação; a prova é uma explicação oferecida por meio de argumentos convincentes aceitos por uma comunidade; e, finalmente, a demonstração (matemática) expressa um conjunto bem definido de regras e atende aos padrões atuais estabelecidos pela comunidade de matemáticos.

De modo semelhante, a pesquisadora italiana Bettina Pedemonte (2007) considera a existência de uma unidade cognitiva para descrever as estruturas do raciocínio matemático do aluno, utilizadas para compreender, elaborar, comunicar e validar argumentos matemáticos. Segundo Pedemonte (2007),

[1] Refere-se aos documentos curriculares franceses *Ministère de L'Éducation Nationale de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche* (MENESR).

durante uma atividade de resolução de problemas matemáticos, os estudantes desenvolvem argumentos para justificar suas respostas e chegar a uma conjectura. Nesse contexto, “[...] a unidade cognitiva propõe que, em alguns casos, essa argumentação possa ser utilizada pelo aluno na construção da prova, através da organização, em cadeia lógica, de alguns argumentos previamente produzidos” (Pedemonte, 2007, p. 25, tradução nossa).

Para a educadora e filósofa canadense Gila Hanna (1990), devem-se considerar três aspectos da prova no âmbito da Educação Matemática: (1) prova formal; (2) prova aceitável; (3) ensino da prova. A prova formal foi desenvolvida para evitar erros graves e a necessidade de recorrer a evidências intuitivas e ao julgamento humano. A prova aceitável visa apresentar implicações relevantes para o ramo da Matemática e produzir conexões com outras áreas do saber. Por fim, o ensino de prova tem por objetivo utilizar ideias matemáticas para demonstrar a importância das propriedades aplicadas nesse processo para alcançar o resultado.

Segundo Hanna (1990), o ensino de prova pode apresentar duas características: as provas que provam e as provas que explicam. Elas não apresentam distinção quanto ao grau de rigor e ambas são aceitas pela comunidade matemática. As provas que provam têm por objetivo evidenciar que um determinado teorema ou resultado matemático é verdadeiro, enquanto as provas que explicam, além disso, pretendem evidenciar quais foram as propriedades, as ideias e os conceitos matemáticos empregados para comprovar a veracidade do teorema.

Também o educador matemático britânico Andrea Stylianides (2007) relaciona o conceito de prova matemática no contexto escolar com:

> [...] um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma reivindicação matemática, com as seguintes características: 1. Utiliza declarações aceitas pela comunidade de sala de aula (conjunto de declarações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem necessidade de justificativa adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modo de argumentação) que são válidas e conhecidas pela comunidade de sala de aula ou dentro do seu alcance conceitual; e 3. É comunicada com formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas pela comunidade de sala de aula ou dentro do seu alcance conceitual (Stylianides, 2007, p. 291, tradução nossa).

Em suma, as perspectivas desses pesquisadores evidenciam a complexidade e a importância de desenvolver atividades que fomentem a argumentação, a prova e a demonstração matemática, visando à capacidade de analisar, criticar, justificar, conjecturar, argumentar, provar e demonstrar, essenciais para a construção do raciocínio matemático do estudante, conforme salientou Balacheff (2019). Ademais, as atividades fundamentadas no trabalho através da resolução de problemas se constituem como um meio privilegiado, pois, além de desenvolverem as habilidades especificadas por Balacheff (2019), também desenvolvem a criatividade, a autonomia e a habilidade de explicação; e os "[...] processos sofisticados de pensamento matemático e o trabalho de ensino de Matemática acontecem em um ambiente de investigação [...]" (Allevato & Onuchic, 2021, p. 53).

Diante desses fatos, defendemos a existência de uma relação da resolução e proposição de problemas com a argumentação, prova e demonstração matemática, pois, além de ambas apresentarem aspectos ligados à construção de conhecimento e do raciocínio matemático, exigem do estudante um elevado nível cognitivo nesses processos. Com base nessas considerações, compreendemos que a relação entre elas ocorre por apresentarem aspectos comuns, quais sejam:

Figura 1

Aspectos comuns entre Resolução e Proposição de Problemas e Argumentação, Prova e Demonstração Matemática no contexto escolar (Silva, 2025, p. 98)

Aspectos	Criatividade
	Protagonismo
	Elaboração: de estratégia de resolução; de argumentação
	Investigação
	Conexões de conceitos e conteúdos internos à Matemática com outras áreas do saber
	Compreensão de conceitos e conteúdos
	Pensamento crítico
	Explicação da resolução
	Elaboração de conjecturas
	Desenvolvimento de diferentes formas de pensamentos: matemático; metacognitivo e de ordem superior
	Desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo
	Dimensão social
	Autonomia
	Múltiplas representações

De acordo com Silva (2025, p. 98):

> Ao ser empregada como uma metodologia de ensino em um contexto escolar, a Resolução e Proposição de Problemas pode promover a construção e compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021) e Van de Walle (2009). Além disso, essa abordagem favorece o desenvolvimento da argumentação, prova e demonstração matemática, conforme indicado por Balacheff (2019), De Villiers (2010), Hanna (1990), Pedemonte (2007) e Polya (1990).

Por essa razão, neste trabalho, concebemos a prova matemática no contexto escolar como um processo social, em que os interlocutores utilizam seus conhecimentos prévios para elaborar argumentos conectados, além de empregar conceitos e a escrita matemática para validar as respostas ao problema gerador. O problema gerador é proposto para desencadear e orientar a construção e a compreensão de novos conteúdos e conceitos matemáticos relacionados às secções cônicas, bem como para promover a oportunidade de argumentação e prova, e o raciocínio matemático na dedução de suas equações. Considerando esses aspectos, na próxima seção, apresentaremos a metodologia de pesquisa. Então, seguir-se-á o relato e a descrição da prática desenvolvida no contexto escolar.

METODOLOGIA

A investigação apresentada neste trabalho integra uma pesquisa de doutorado, na qual desenvolvemos uma sequência didática fundamentada na resolução de problemas, visando tanto à promoção da construção e compreensão de novos conceitos e conteúdos sobre as cônicas, quanto à demonstração das equações de cada uma. A prática aqui relatada, com foco específico na parábola, foi desenvolvida em seis encontros[2] com cada turma participante, nos meses de setembro e outubro de 2023. Participaram da atividade duas turmas da 3ª série do Ensino Médio Profissionalizante, perfazendo 74 estudantes. A escola está localizada em uma cidade da região metropolitana de São Paulo, Brasil[3].

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa que, conforme sugerem

---

[2] Cada encontro teve a duração de 90 minutos, ou seja, duas aulas de 45 minutos cada.

[3] Aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Cruzeiro do Sul em 20 de setembro de 2021, segundo o parecer de nº 4.985.806, conforme anexo em documento complementar.

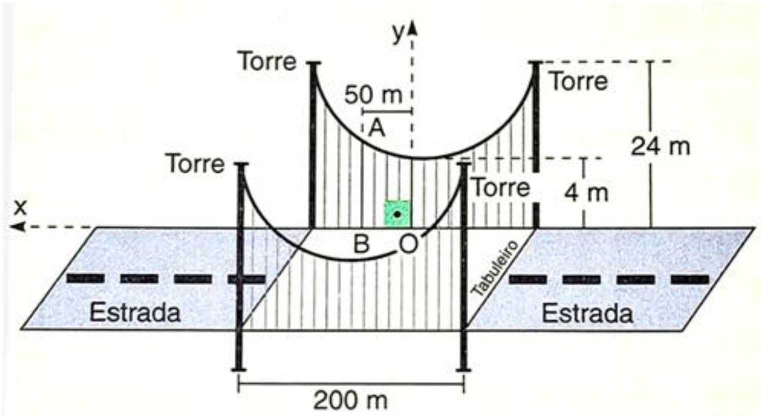
Borba, Almeida e Gracias (2018), prioriza a compreensão da dinâmica da sala de aula, as discussões e as produções dos estudantes participantes.

Para atingir o objetivo proposto, que foi analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático sobre o conceito de parábola e na dedução de sua equação, concordamos com Lester e Cai (2016, p. 122, tradução nossa) ao salientarem que "[...] problemas matemáticos que são verdadeiramente problemáticos e envolvem matemática significativa têm o potencial de fornecer os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos". Desse modo, reformulamos uma questão de livro didático relacionada ao conceito de parábola, apresentada na Figura 2.

Figura 2

Problema sobre conceito e conteúdo de parábola (Giovanni & Bonjorno, 2005, p. 131)

49 (UFMA) Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo dos y, perpendicular a x, determine o comprimento do elemento de sustentação $\overline{BA}$, que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.



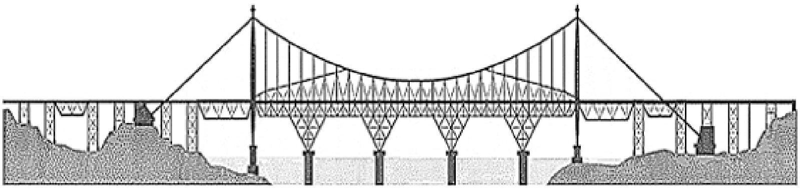
A seguir, na Figura 3, apresentaremos esse problema reformulado segundo as recomendações de Lester e Cai (2016), com o intuito de implementá-lo como problema gerador, ou seja, de provocar os estudantes e desencadear todo o processo de ensino e aprendizagem que pretendíamos sobre parábola.

Figura 3

Problema de Engenharia Civil (Adaptado de Giovanni & Bonjorno, 2005, p. 131)

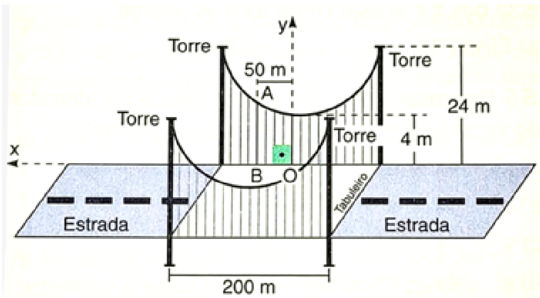
Atualmente, o desenvolvimento na área da construção civil possibilitou o acesso a diversas regiões, tanto no Brasil como em outros países, que, em época passada, só era possível por navegação. A engenharia desenvolveu um tipo de ponte suspensa, intitulada de 'Ponte Pênsil', que é sustentada por um sistema de cabos e mastros, visando não interferir no tráfego marítimo e transpor grandes distâncias. Os cabos de suspensão devem ser ancorados em cada extremidade da ponte, e qualquer carga aplicada à ponte é transformada em tensão nesses cabos principais. Os cabos principais continuam além das torres de suporte até os suportes no nível do convés e continuam ainda as conexões com as âncoras no solo, conforme a Figura 1:

Figura 1. Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis, com 821 metros de extensão e 15,92 metros de largura de vão central.



Fonte: [Conheça a história da Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis | Santa Catarina | G1 (globo.com)]

O engenheiro civil Leonardo Ibn Izzid Hassan Said, da empresa Plano&Plano, na construção da ponte pênsil precisou interromper os trabalhos devido a um problema no projeto. Ele iniciou um estudo detalhado do projeto e, para que a construção da ponte apresentasse exatidão no seu formato, os seus cálculos possibilitaram confirmar que as torres de suporte deveriam ter 24 m de altura e um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada conforme a imagem da Figura 2:



Considere o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo entre as duas torres da figura como sendo o eixo dos y, perpendicular a x e passando pelo ponto mais baixo da curva. O engenheiro Leonardo Ibn Izzid Hassan Said, querendo contribuir na formação profissional do estagiário Lucas Habdala Lamek, propôs o desafio de encontrar as respostas para os seguintes itens:

1) Qual o possível nome para a curva formada pelos cabos entre duas torres consecutivas? É possível obter o nome da curva usando o GeoGebra? Como?
2) Como podemos representar a curva entre as torres com o software de geometria dinâmica GeoGebra?
3) Quais os elementos que compõem a curva?
4) Determine o comprimento do elemento de sustentação $\overline{BA}$, que liga verticalmente o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.
5) Sabe-se que essa curva é simétrica em relação ao eixo y, neste caso é possível afirmar que o comprimento do elemento de sustentação vertical, que liga o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, agora do lado direito que está situado a 50 m do eixo y, tem o mesmo comprimento da haste $\overline{BA}$? Justifique sua resposta?
6) Determine a expressão que generalize a situação do problema? Justifique sua resposta?
7) Elabore um problema novo sobre o conteúdo que foi evidenciado nos itens anteriores para propor aos seus colegas.
8) Como você avalia a utilização do aplicativo GeoGebra nesse contexto? Quais os pontos positivos? Quais os negativos?

O principal objetivo desse problema gerador, constituído por este enunciado e mais oito questões, foi iniciar o estudo de um novo conteúdo matemático, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021), especificamente no que se refere à parábola, no âmbito da Geometria Analítica. Além disso, foi proposta a dedução formal da equação dessa cônica, mobilizada pela utilização do GeoGebra, associada à exploração matemática necessária à resolução do problema. Tal proposta visou valorizar as relações entre a resolução de problemas e a prova matemática, conforme preconizado por Balacheff (2019), Pedemonte (2007) e Silva (2025).

Na sequência, apresentaremos as respostas dos estudantes participantes do estudo às questões que compõem o problema gerador, bem como as análises e as interpretações dos dados que foram gerados por eles.

ANÁLISE E RESULTADOS

Para analisar os dados desta pesquisa, foi utilizada a Análise Textual Discursiva (ATD), conforme proposta pelos pesquisadores brasileiros Roque Moraes e Maria do Carmo Galiazzi (2016, p. 13), que a definem como “[...] uma metodologia de análise de informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos”. Trata-se de um processo cíclico, no qual os textos são desconstruídos e reinterpretados, permitindo a emergência de novas compreensões. A análise se desenvolve por meio de três etapas seguindo a ordem estabelecida: unitarização, categorização e o metatexto.

A primeira etapa, chamada unitarização, envolve a fragmentação dos textos a fim de identificar unidades de significado relevantes para os objetivos da pesquisa. No contexto deste estudo, foram analisados os protocolos dos estudantes (com resoluções escritas dos problemas propostos), as transcrições das entrevistas, os registros audiovisuais, fotografias e anotações do diário de campo. Após essa fragmentação, o pesquisador inicia a categorização, agrupando unidades semelhantes com base em regularidades e padrões, e nomeando progressivamente essas categorias com maior precisão.

A última etapa consiste na elaboração do metatexto, em que o pesquisador apresenta os resultados interpretativos alcançados ao longo das fases anteriores, descrevendo e teorizando os fenômenos investigados (Moraes; Galiazzi, 2016; Moraes, 2003).

> [...] Os metatextos são constituídos de descrição e interpretação, representando o conjunto um modo de compreensão e teorização dos fenômenos investigados. A qualidade dos textos resultantes das análises não depende de sua validade e confiabilidade, mas é, também, consequência de o pesquisador assumir-se como autor de seus argumentos (Moraes, 2003, p. 202).

Após serem oferecidas as orientações sobre a atividade, cada estudante recebeu uma cópia do problema gerador para uma leitura individual. Em seguida, em grupos, iniciaram a leitura e a discussão com os colegas, para desenvolverem as estratégias de resolução. Esperávamos que os estudantes, após a compreensão do problema, elaborassem uma representação da situação utilizando os recursos do GeoGebra ou papel e lápis, e, depois, utilizassem seus conhecimentos prévios para encaminhar uma possível resolução. Em seguida, cada grupo[4] apresentou sua resolução, registrando no quadro e explicando o que tinha pensado. A apresentação não teve uma ordem pré-estabelecida, ocorrendo conforme cada grupo se dispunha a apresentar os resultados obtidos aos seus colegas.

De maneira geral, os dezoito grupos conseguiram responder corretamente o item (1) ao especificarem que a curva entre as torres forma uma parábola, conforme é evidenciado na resposta dos estudantes do G3-3°A,[5] apresentada a seguir:

---

[4] Foram formados nove grupos em cada turma, sendo quatro estudantes por grupo no 3°A; e sete grupos com quatro e dois grupos com cinco estudantes no 3°B.
[5] Os grupos foram denotados por um número e pela sua turma, por exemplo: G3-3°A corresponde ao grupo 3 da turma do 3°A.

Figura 4

Resposta da questão 1 do G3-3°A (Dados do problema de Engenharia)

1) Qual o possível nome para a curva formada pelos cabos entre duas torres consecutivas? É possível obter o nome da curva usando o GeoGebra? Como?

O possível nome da curva é parábola. É possível construir no Geogebra digitando o comando Parábola [<ponto>, <reta>] na entrada com os devidos parâmetros

Ao ser questionado pelo pesquisador, o grupo informou que após a leitura do problema, concluiu que o formato dos cabos curvos da ponte só poderia ser uma parábola. Nesse momento, o grupo foi orientado pelo pesquisador sobre a importância de justificar suas respostas: ‘Como é possível justificar que o formato curvo dos cabos da ponte é uma parábola?’ Além disso, é possível evidenciar que o grupo utilizou um comando do GeoGebra para construir a parábola, ou seja, o grupo usou seus conhecimentos aprendidos na atividade sobre circunferência, a qual precedeu esta atividade, e respondeu corretamente esse item. Esses fatos contribuíram para o grupo responder corretamente também o item (2).

Figura 5

Resposta da questão 2 do G3-3°A (Dados do problema de Engenharia)

2) Como podemos representar a curva entre as torres com o software de geometria dinâmica GeoGebra?

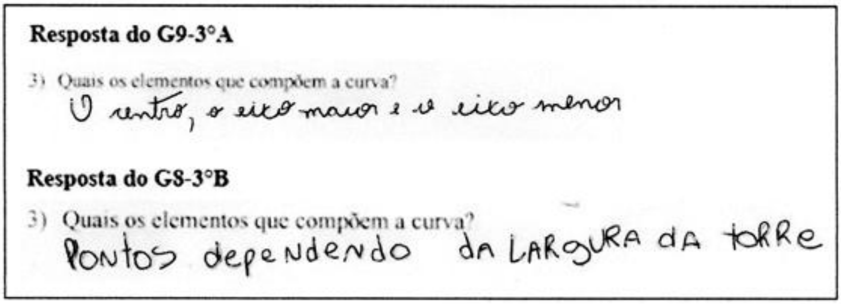
1°: criamos um ponto e uma reta

2°: utilizamos o comando "parábola"

No item (3), apesar de os estudantes conseguirem construir a cônica com o GeoGebra, evidenciamos a falta de compreensão sobre o que são os elementos que compõem a parábola. Esses fatos são apresentados na Figura 6, com as resoluções dos grupos G9-3°A e G8-3°B.

Figura 6

Resposta da questão 3 dos grupos G9-3°A e G8-3°B (Dados do problema de Engenharia)



Resposta do G9-3°A

3) Quais os elementos que compõem a curva?

O centro, o eixo maior e o eixo menor

Resposta do G8-3°B

3) Quais os elementos que compõem a curva?

Pontos dependendo da LARGURA da torre

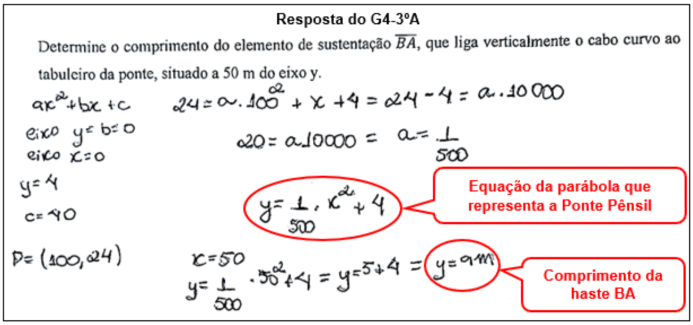
Apenas três grupos de cada turma responderam corretamente esse item, explicitando que os elementos são o foco, a diretriz, o vértice e o eixo de simetria. Ao serem questionados pelo pesquisador, durante o momento da plenária, sobre como encontraram os elementos da parábola, os grupos que responderam corretamente informaram que consultaram seu livro didático ou realizaram uma busca na internet, enquanto os outros grupos basearam suas respostas na intuição. Percebemos que aspectos de natureza investigativa são desenvolvidos durante as atividades de resolução de problemas, conforme salientaram os pesquisadores (Allevato & Onuchic, 2021; Van de Walle, 2009).

As três primeiras questões foram cruciais para fomentar questionamentos e promover a compreensão do conceito de parábola e a dedução da sua equação. Os estudantes relacionaram o formato curvo dos cabos da ponte com o formato do gráfico da função quadrática, além de identificarem os elementos da parábola e a sua expressão algébrica. Esses aspectos são evidenciados nas respostas à quarta questão, que solicitava o cálculo do comprimento da haste $(\overline{BA})$. Nosso objetivo era evidenciar como os estudantes desenvolveriam uma expressão algébrica para a parábola utilizando os valores fornecidos na Figura 2 do problema gerador. Essa expressão representa um caso particular da equação geral solicitada na questão 6, servindo como base para a sua dedução.

A resolução do G4-3°A foi realizada utilizando o conceito de função quadrática. O grupo deduziu a equação da parábola que representa o cabo curvo da ponte, calculou o comprimento da haste $(\overline{BA})$ e respondeu corretamente à questão 5 empregando o conceito de simetria. A argumentação elaborada pelo grupo para a expressão da parábola do problema gerador pode ser considerada uma prova matemática, pois apresenta uma lógica coerente e organizada, conforme salientou Pedemonte (2007), além de comprovar a veracidade da resolução, segundo Balacheff (2019). A figura a seguir ilustra essa situação.

Figura 7

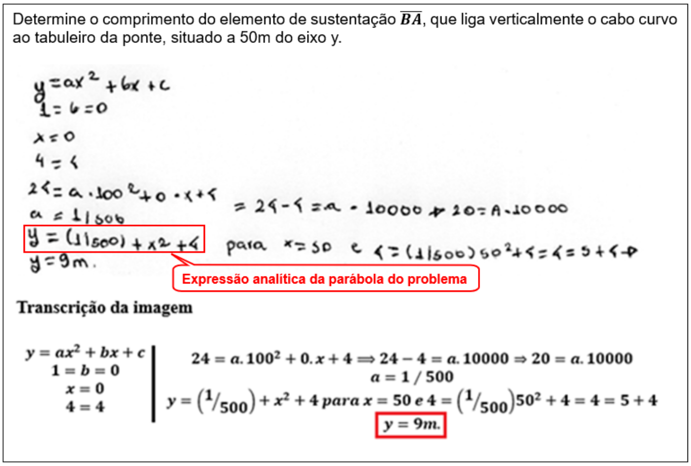
Resolução da questão 4 do G3-3°A (Dados do problema de Engenharia)



O grupo G7-3ºB e os demais grupos das duas turmas também utilizaram o conceito de função quadrática para calcular o comprimento da haste. Entretanto, encontramos algumas divergências na resolução desenvolvida por esses estudantes, conforme exposto pela Figura 8, que foram esclarecidas no momento da plenária.

Figura 8

Resolução da questão 4 do G7-3ºB (Dados do problema de Engenharia)



Quando o grupo foi questionado pelos seus colegas sobre o que significa 1 = b = 0, logo após a expressão $y = ax^2 + bx + c$, os estudantes explicaram que se referia à ordem na resolução: primeiro, determinaram o valor do coeficiente numérico b da variável x e o termo independente c, ao substituírem os valores do par ordenado (0, 4) em x e y da equação. Nesse momento, o pesquisador questionou o grupo sobre o nome desse ponto que eles utilizaram. Um membro do grupo mencionou que era o ponto mais baixo da curva e, após alguns momentos, um colega de outro grupo especificou que se tratava do ponto correspondente ao vértice da parábola. Em seguida, os estudantes calcularam o valor do coeficiente numérico a da variável x^2 utilizando o par ordenado (100, 24) para localizar uma das torres da ponte, e substituíram na expressão analítica $y = ax^2 + bx + c$, em que y vale 24, x = 100, b = 0 e c = 4. Embora os estudantes tenham utilizado o sinal de adição na penúltima linha, entre os termos $\left(\frac{1}{500}\right)$ $e\ x^2$, após a substituição dos valores, operaram corretamente a multiplicação. Nesse momento, os alunos de outros grupos levantaram dúvidas, pois não haviam compreendido o cálculo, uma vez que o grupo apresentador não havia identificado claramente qual incógnita estava sendo calculada, transformando a equação em uma expressão numérica. Um estudante do grupo 7 esclareceu que a medida da haste correspondia ao valor de y, completando, assim, a resposta com $y = 9m$.

Esses episódios atestam a relevância desse momento de partilha, colaboração e discussão para a aprendizagem matemática. De acordo com Allevato e Onuchic (2021, p. 50), o objetivo da plenária em um contexto de resolução de problemas é fazer com que "[...] o professor estimule os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução".

Pelas respostas dos estudantes, consideramos que eles desenvolveram a generalização ao obterem a expressão do problema por meio do raciocínio lógico, explicativo e coeso, além de empregarem a escrita matemática na dedução e para calcular o comprimento da haste. Conforme as orientações dos documentos oficiais, os estudantes precisam, no Ensino Médio:

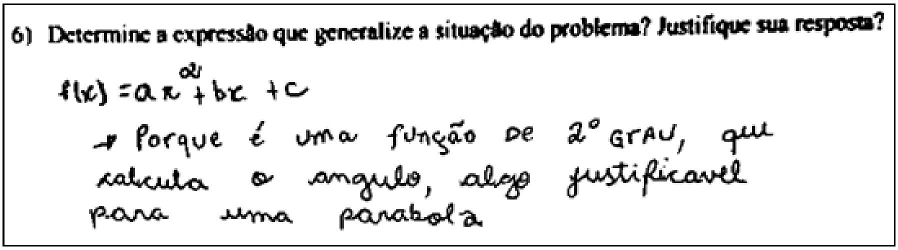
> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 531).

Esses fatos também são recomendados pelo documento francês ao salientar que “[...] é importante permitir a progressão no aprendizado da demonstração [...]” (França, 2015, p. 367). Esses aspectos também são preconizados pelo documento britânico, salientando que no Ensino Médio, os estudantes precisam “[...] raciocinar matematicamente seguindo uma linha de investigação, estabelecendo relações, desenvolvendo conjecturas, justificativas e generalizações ou uma prova usando linguagem matemática” (Inglaterra, 2015, p. 40, tradução nossa), e nas pesquisas de Allevato e Onuchic (2021), Balacheff (2019), Pedemonte (2007) e Stylianides (2007). Cabe ressaltar que os recursos do GeoGebra foram essenciais na promoção da visualização da parábola aos estudantes e no desenvolvimento e teste de suas conjecturas para encontrarem a resposta da questão.

Um dos grupos, o G4-3°A, não conseguiu relacionar a expressão da parábola determinada na resolução da questão 4 com a pergunta da questão 6. Assim, o grupo não soube elaborar a justificativa da sua resposta, informando apenas que se tratava de uma equação de 2° grau.

Figura 9

Resposta da questão 6 do G4-3°A (Dados do problema de Engenharia)


6) Determine a expressão que generalize a situação do problema? Justifique sua resposta?

$f(x) = ax^2 + bx + c$

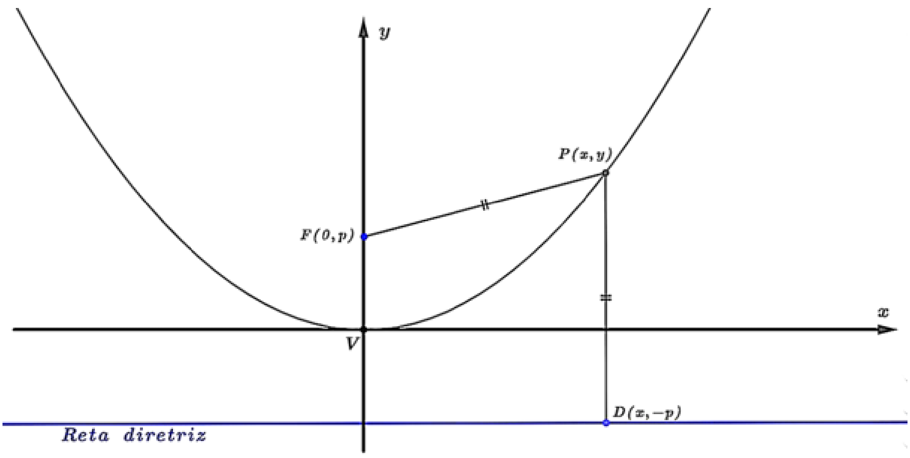
→ Porque é uma função de 2° GRAU, que calcula o angulo, algo justificavel para uma parabola

Apesar de alguns grupos de ambas as turmas apresentarem dificuldades na resolução do problema, evidenciamos que esses aspectos vão ao encontro das recomendações de Allevato e Onuchic (2021) e Vale (2017), ao mencionarem que a resolução de problemas pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem durante o desenvolvimento das resoluções dos alunos; promover a participação ativa em todo o processo de resolução e de apresentação de suas respostas; estimular o compartilhamento de descobertas e aprendizagem, além de desenvolver a capacidade criativa e de raciocínio matemático, como salientado pelos documentos oficiais (Brasil, 2018; Portugal, 2013; NCTM, 2000) e por Ponte et al. (2012). Além disso, foi possível evidenciar que os argumentos elaborados pelos estudantes contribuíram para promover uma sequência conectada e lógica de afirmações (Balacheff, 2019; Pedemonte, 2007; Stylianides, 2007) e para explicar quais foram os conceitos, propriedades e ideias empregadas na resolução, conforme preconizou Hanna (1990) sobre provas que explicam.

Diante das respostas dos grupos e com algumas intervenções realizadas pelo pesquisador durante os momentos de resolução e de plenária, foi elaborada outra atividade para que os grupos pudessem compreender e desenvolver a relação para deduzir a equação que generaliza a representação de famílias de parábolas.

Figura 10

Atividade para deduzir a equação da parábola com o vértice na origem do sistema de eixos ortogonais (Dados do problema de Engenharia)

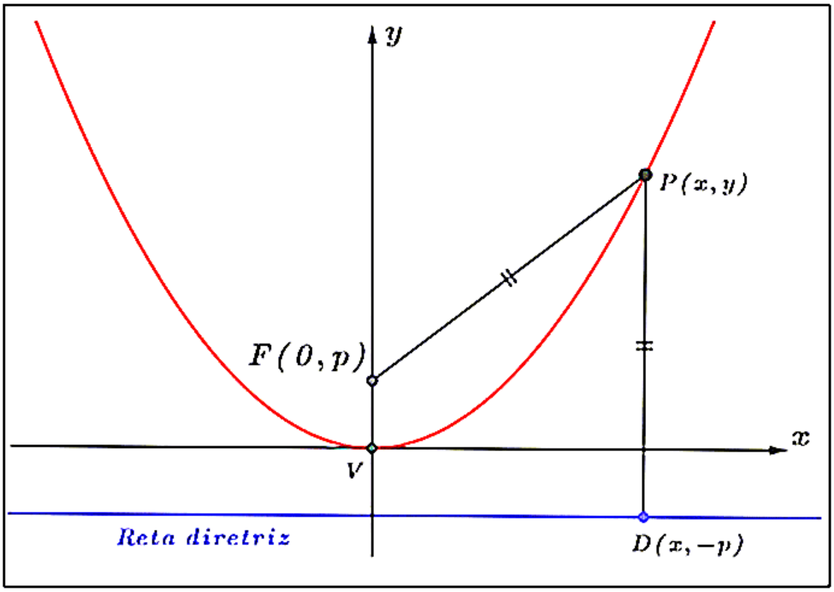


1) Analisando a Figura 3, qual é a relação para deduzir a equação da Parábola no sistema de eixos ortogonais?
2) Qual a relação que podemos fazer do ponto V (vértice da parábola) com o ponto F (foco) e a reta diretriz?
3) Utilizando a nomenclatura da Figura 1, demonstre a expressão que generalize a equação da Parábola.

Apresentamos a eles o gráfico a seguir, acessado por um *link* que lhes foi fornecido previamente:

Figura 11

Gráfico fornecido aos estudantes (Dados do problema de Engenharia)

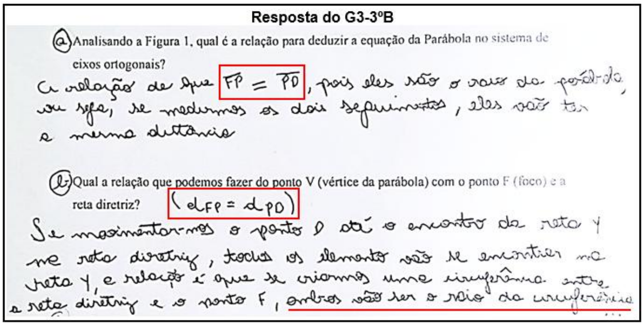


Solicitamos aos estudantes que, manipulando a construção da parábola no GeoGebra, analisassem a figura e tentassem determinar a relação necessária para deduzir a equação geral da parábola, no sistema de eixos ortogonais. O pesquisador relembrou aos estudantes a relação que havia sido utilizada para deduzir a equação da circunferência e, de modo similar, questionou qual seria a relação que levaria a deduzir a equação da parábola. Os grupos começaram a discutir e a manipular o ponto D na janela de visualização 2D e iniciaram as suas resoluções.

Os grupos conseguiram visualizar que a distância entre o ponto correspondente ao foco F até o ponto P é a mesma do ponto P até o ponto D e responderam corretamente os itens 'a' e 'b', conforme ilustra a imagem a seguir.

Figura 12

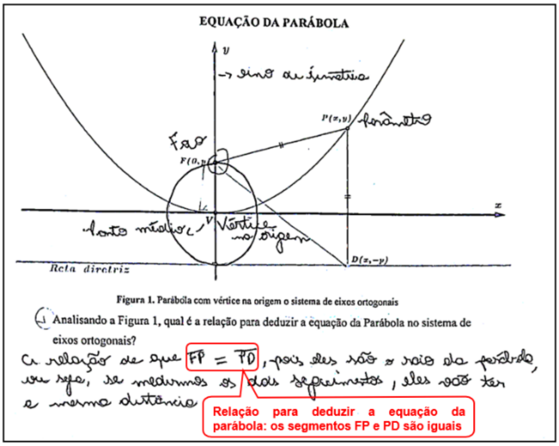
Resposta do G3-3ºB dos itens a e b da questão 8 (Dados do problema de Engenharia)



O grupo G3-3ºB especificou que esses segmentos são raios de uma circunferência de centro V, o vértice da parábola. Esse grupo estabeleceu uma conexão entre o conceito de circunferência e a relação entre as distâncias do vértice V da parábola ao foco F e à reta diretriz. Fizeram uma conexão entre dois conteúdos matemáticos abordados pelos problemas geradores da circunferência e da parábola, conforme salientado por Allevato e Onuchic (2019). A Figura 13 refere-se à representação do entendimento desse grupo.

Figura 13

Representação construída pelo grupo G3-3ºB (Dados do problema de Engenharia)

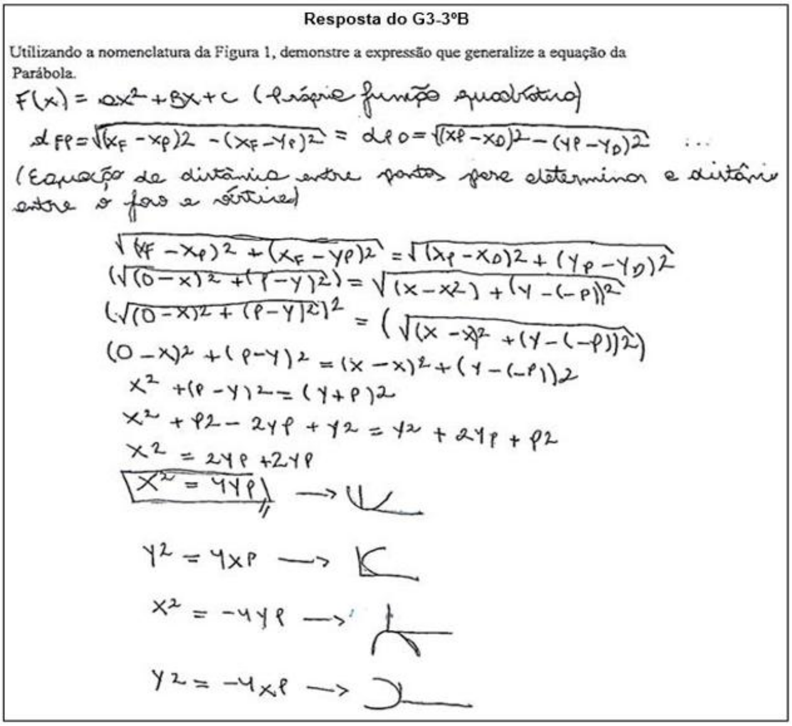


Diante desses fatos, ficou evidente que o *software* de geometria dinâmica contribuiu para a compreensão de conceitos e relações necessárias para a dedução matemática da equação da parábola pelos estudantes. Esses aspectos são evidenciados nos protocolos quando foi mencionado que a distância do foco (F) a um ponto (P) da curva é igual à distância do ponto (P) à reta diretriz ($\overline{FP} = \overline{PD}$).

Por fim, o item 'c' confirmou o que havíamos previsto: o problema gerador possibilitou tanto a construção de conhecimento quanto a compreensão do conteúdo matemático, além do desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Os estudantes desenvolveram uma prova matemática utilizando relações, conceitos, propriedades e a linguagem matemática. Esses aspectos são evidenciados na resolução do grupo G3-3°B, conforme a ilustração a seguir.

Figura 14

Dedução da equação da parábola do G3-3ºB (Dados do problema de Engenharia)



Resposta do G3-3ºB

Utilizando a nomenclatura da Figura 1, demonstre a expressão que generalize a equação da Parábola.

$F(x) = ax^2 + Bx + c$ (própria função quadrática)

$d_{FP} = \sqrt{(x_F - x_P)2 - (x_F - y_P)^2} = d_{PD} = \sqrt{(x_P - x_D)^2 - (y_P - y_D)^2}$ ...

(Equação de distância entre pontos para determinar a distância entre o foco e vértice)

$$\sqrt{(x_F - x_P)^2 + (x_F - y_P)^2} = \sqrt{(x_P - x_D)^2 + (y_P - y_D)^2}$$
$$(\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2}) = \sqrt{(x - x^2) + (y - (-p))^2}$$
$$(\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2})^2 = (\sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2})$$
$$(0-x)^2 + (p-y)^2 = (x-x)^2 + (y-(-p))^2$$
$$x^2 + (p-y)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + p^2 - 2yp + y^2 = y^2 + 2yp + p^2$$
$$x^2 = 2yp + 2yp$$
$$\boxed{x^2 = 4yp} \longrightarrow$$
$$y^2 = 4xp \longrightarrow$$
$$x^2 = -4yp \longrightarrow$$
$$y^2 = -4xp \longrightarrow$$

O grupo iniciou a dedução da equação especificando que as distâncias entre os segmentos $(\overline{FP})$ e $(\overline{DP})$ têm comprimentos iguais, e que pode ser calculada empregando a expressão para determinar a distância entre dois pontos, ou seja, $d_{FP} = d_{PD}$. Os estudantes, utilizando as coordenadas dos pontos F, P e D, escreveram:

$$d_{FP} = \sqrt{(x_F - x_P)^2 - (y_F - y_P)^2}$$

$$= d_{PD} \sqrt{(x_P - x_D)^2 - (y_P - y_D)^2}$$

Apesar de terem utilizado o sinal equivocado no início da dedução da equação supracitada, na sequência, os estudantes empregaram o sinal correto da adição e substituíram os valores correspondentes em cada coordenada; realizaram as manipulações algébricas envolvendo potenciação, produto notável, simplificação e agrupamento de termos semelhantes de forma consistente, apresentando a família de equações da parábola e suas representações gráficas quando seu ponto de vértice coincide com a origem do sistema de eixos coordenados.

A resolução elaborada pelo G3-3ºB e as de outros grupos apresentaram um raciocínio estruturado, explicitando ideias, conceitos e conteúdos matemáticos para validar sua resposta, conforme salientado por Hanna (1990). Ressalte-se que esses aspectos vão ao encontro do que enfatizaram Balacheff (2019) e Pedemonte (2007), pois, quando a argumentação apresenta uma organização em cadeia lógica que valida a resposta, esse argumento ganha *status* de prova matemática.

Apesar de alguns grupos não conseguirem desenvolver a dedução da equação da parábola, especialmente devido às dificuldades com as manipulações algébricas, os estudantes conseguiram compreender a lógica e o processo de dedução apresentados pelos colegas. Dessa forma, a atividade como um todo contribuiu para a construção dos conceitos e conteúdos, além da dedução da equação da parábola utilizando os aspectos formais tão preconizados pelos documentos oficiais e pelas pesquisas em Educação Matemática (Allevato; Onuchic, 2021; Balacheff, 2019; Pedemonte, 2007; Stylianides, 2007).

Em consenso, os alunos perceberam que os equívocos ocorridos durante a resolução do problema estavam relacionados a conhecimentos prévios, conteúdos que haviam esquecido ou não aprendido, ou a aspectos que estavam aprendendo naquele momento. Porém, eles foram fundamentais para sanar dúvidas, levar a aprender novos conceitos e conteúdos, além de relembrar outros que, supostamente, já haviam sido aprendidos anteriormente. Apesar das dificuldades, os estudantes demonstraram esforço e curiosidade para encontrar uma resposta, aumentando sua autoconfiança para enfrentar desafios e superar os obstáculos configurados nesse problema e na aprendizagem matemática por meio dessa abordagem, nova para eles.

Quando questionados pelo pesquisador sobre a aprendizagem matemática proporcionada pela resolução desse problema, os participantes responderam de forma assertiva e clara, destacando a aquisição de diversos conhecimentos matemáticos sobre: desenvolvimento de uma prova matemática; conteúdos relacionados à parábola; manipulações algébricas; produto notável; regras de potenciação e radiciação; estratégias de resolução de problemas e outros. Além disso, o processo avaliativo ocorreu em toda a atividade. Apesar de não ser o foco deste estudo, destacamos que a avaliação contribuiu para perceber as dúvidas e os equívocos dos estudantes no decurso da resolução do problema, possibilitando ao pesquisador realizar mediações que auxiliassem os alunos a corrigirem e compreenderem seus erros e avançarem na construção do conhecimento, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021).

Por fim, destacamos que os participantes apresentaram uma evolução significativa na construção do conhecimento matemático, pois não foi necessário realizar tantas intervenções como as feitas no problema das Emissoras, que fora resolvido anteriormente, envolvendo a circunferência. Ou seja, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuiu para a construção e a compreensão de conceitos e conteúdos sobre a parábola e para a dedução formal de sua equação quando seu vértice coincide com a origem do sistema de eixos ortogonais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático relacionado ao conceito de parábola e à dedução de sua equação, desenvolvida com estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola profissionalizante da região metropolitana de São Paulo. Em seu desenvolvimento, tivemos em vista responder: Como ocorre a construção de conhecimento sobre parábola e a dedução de sua fórmula através da resolução de problemas?

As discussões realizadas durante a atividade, bem como as análises dos protocolos produzidos pelos participantes, permitiram identificar as contribuições dos momentos de elaboração das resoluções e da plenária, na implementação da Metodologia, que visa conduzir os estudantes na construção consciente, responsável e criativa do conhecimento matemático, alinhada aos objetivos estabelecidos pelo professor para a aula.

Destacamos a valorização do protagonismo dos estudantes – expressa nas diferentes abordagens elaboradas, nos processos de raciocínio e nas justificativas apresentadas – bem como a interação e a aprendizagem promovidas em plenária e na busca pelo consenso, além da aceitação do erro como um caminho para a construção do conhecimento, que foram fundamentais para o desenvolvimento da compreensão do conteúdo nesse processo de aprendizagem. Nesse contexto, o professor pôde, ainda, avaliar e identificar os avanços, as compreensões e as dificuldades apresentadas pelos estudantes, auxiliando-os em sua aprendizagem. Além disso, cabe salientar que a mediação do professor, associada à utilização do *software* de geometria dinâmica GeoGebra e à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, bem planejadas e implementadas, foram cruciais para a construção dos conceitos e conteúdos e da dedução, nesta pesquisa, da equação da parábola.

Apesar das dificuldades apresentadas pelas duas turmas, ficou evidente que os estudantes conseguiram construir conhecimento e compreender tanto o conteúdo de parábola quanto a importância da elaboração da prova matemática, num contexto de desenvolvimento de habilidades cognitivas elevadas e na promoção da compreensão e da prova matemática no contexto escolar, conforme preconizado pelos documentos oficiais (Brasil, 2018; França, 2015; Inglaterra, 2014; NCTM, 2000; Portugal, 2013; Singapura, 2020) e pelas pesquisas (Allevato; Onuchic, 2021; Balacheff, 2019; Pedemonte, 2007; Ponte et al., 2012; Stylianides, 2007).

As reflexões apresentadas mostram, portanto, que é possível proporcionar ao estudante da Educação Básica oportunidades para a construção e a compreensão de conteúdo matemático, bem como para o desenvolvimento da criatividade, da generalização, da prova e da demonstração matemática, e do raciocínio matemático, auxiliados pelo GeoGebra, em um contexto fundamentado no trabalho através da resolução de problemas. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem o potencial de promover esses aspectos.

REFERÊNCIAS

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. In L. R. Onuchic, N. S. G. Allevato, F. C. H. Noguti, & A. M. Justulin, (Orgs.), *Resolução de Problemas: Teoria e prática (2ª ed.,* pp. 37–58). Paco Editorial.

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2019). As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*(2), 1–14

Balacheff, N. (2019). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet, & C. Vendeira. (Orgs.): *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 423-456). ARDM & IREM de Paris-Université de Pari Dioderot.

Boavida, A. M., Gomes, A., & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de matemática: olhares sobre um projecto de investigação colaborativa. *Educação e Matemática: revista da Associação de Professores de Matemática*, (70), 18-26.

Borba, M. C., Almeida, H. R. F. L., & Gracias, T. A. S. (2018). *Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação*. Autêntica.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. Brasília, DF: Ministério da Educação.

Costa, V. M. (2023). Utilizando argumentações, provas e refutações em sala de aula de geometria como contribuições ao desenvolvimento do senso crítico do educando. *Boletim de Educação Matemática*, 37(75), 352-370.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. In G. Hanna, & H. N. Jahnke, & H. Pulte. (Orgs.). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-220). Springer.

França. Ministère de L'éducation Nationale et de la Jeunesse. (2015). *Programme Mathematiques cycle 4*.

Giovanni, J. R., & Bonjorno, J. R. (2005). *Matemática completa* (2ª Ed. 3º ano do Ensino Médio). FTD.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange,* 21(1), 6-13.

Inglaterra. Department for Education. (2014). *National Curriculum in England. Mathematics programs of study*, London: Department for Education.

Krakecker, L. (2022). *Validações matemáticas produzidas por alunos do nono ano do ensino fundamental: Desafios e possibilidades*. (Tese de doutorado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul).

Lester, F., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In P. Felmer, & E. Pehkonen, & J. Kilpatrick. (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (pp. 117-135). Springer.

Moraes, R., & Galiazzi, M. C. (2016). *Análise Textual Discursiva*. Unijuí.

Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva. *Ciência & Educação*, 9(2), 191-211.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática, 25*(11), 73–98.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics* 66(1), 23-41.

Polya, G. (1990). Mathematics and plausible reasoning. Induction and analogy in mathematics. (Vol. 1). Princeton University Press.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henrique, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377.

Portugal. Ministério da Educação e Ciências. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*.

Silva, M. B. (2025). *Demonstrações e Provas em Geometria Analítica através da Resolução de Proposição de Problemas*. (Tese de doutorado, Universidade Cruzeiro do Sul).

Silva, M. B., Silva, I. P., Allevato, N. S. G., & Possamai, J. P. (2023). Uma abordagem para o ensino de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas. In *Anais do XVI Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-9).

Silva, M. B. (2016). *O ensino da demonstração: um Estado da Arte das pesquisas realizadas nos programas de pós-graduação em Educação Matemática no período de 2005 a 2015*. (Dissertação de mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo).

Singapura. Ministry of Education. (2020). *Mathematics syllabuses: Secondary one to four – G2 and G3 additional mathematics syllabuses secondary three to four.*

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics*, 38(3), 289-321.

Vale, I. (2017). Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. In L. R. Onuchic, L. C. Leal Junior, & M. Pironel. (Orgs.), *Perspectivas para resolução de problemas* (pp. 131–162). Livraria da Física.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino Fundamenta: Formação de Professores e Aplicação em Sala de aula*. (6ª ed., Colonese, Trad.). Artmed.

Vila, A.; & Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas* (E. Rosa, Trad.). Artmed.