ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.64856/acta.scientiae.8427

Parametrización de Curvas un Estudio de caso, desde una Modelización sobre Funciones de Variable Compleja

Enrique Mateus-Nieves[a]

[a]Universidad Distrital de Bogotá, Facultad de Educación, Bogotá. Colombia.

ABSTRACT

Antecedentes: Los efectos del proceso académico se han convertido en un factor de repitencia y continua perdida de asignaturas, situación que motiva a los estudiantes a abandonar su formación profesional. La modelación matemática en la formación de ingenieros se ha convertido en una herramienta que permite representar, manipular y comunicar objetos del mundo real, desde la aplicación de contenidos matemáticos que lo facilitan. **Objetivos**: Simular procesos que para el estudiante resultan complicados; brindar elementos conducentes a generar hipótesis y sugerir experimentos o métodos de validación. **Diseño:** se planea y desarrolla una modelación matemática desde uso de hipermedia. **Entorno y participantes:** estudiantes de quinto y sexto semestre (pregrado), de tres ingenierías: eléctrica, mecánica, industrial, que en sus mallas curriculares toman la asignatura matemáticas avanzadas. **Recopilación y análisis de datos:** La estrategia implementada buscó solventar la necesidad de mostrar y manipular aplicaciones de contenidos que involucran funciones de variable compleja desde ejemplos concretos propios de la formación académica para ingenieros y cuya solución involucra la aplicación de integrales. **Resultados:** La investigación mostró avances académicos en al menos tres cuartas partes de la muestra seleccionada. **Conclusiones:** la experiencia mostró lo importante de integrar tecnología al currículo. El hipermedio planeado y aplicado resultó adecuado para que los alumnos superen dificultades identificadas y logren distinguir el efecto que producen las diferentes parametrizaciones de un mismo lugar geométrico. Por ello, se recomienda no brindar demasiada información, pero si usar diferentes formatos, verbal, analítico, videos, gráficos, y organizar una hiper vinculación adecuada para no perderse.

Keywords: Parametrización de curvas; Funciones de variable compleja; Modelización matemática.

Parametrização de curvas: um estudo de caso, a partir de uma modelagem sobre funções de variável complexa

RESUMO

Antecedentes: Os efeitos do processo acadêmico tornaram-se um fator de repetência e perda contínua de disciplinas, situação que motiva os alunos a abandonar sua formação profissional. A modelagem matemática na formação de engenheiros tornou-se uma ferramenta que permite representar, manipular e comunicar objetos do

Corresponding author: Mateus-Nieves, Enrique. Email: jeman124@gmail.com

mundo real, a partir da aplicação de conteúdos matemáticos que o facilitam. **Objetivos:** Simular processos que são complicados para o aluno; fornecer elementos que conduzam à geração de hipóteses e sugerir experimentos ou métodos de validação. **Design:** planeja-se e desenvolve-se uma modelagem matemática a partir do uso de hipermídia. **Ambiente e participantes:** alunos do quinto e sextos semestres (graduação) de três cursos de engenharia: elétrica, mecânica e industrial, que têm a disciplina de matemática avançada em seus currículos. **Coleta e análise de dados:** a estratégia implementada buscou atender à necessidade de mostrar e manipular aplicações de conteúdos que envolvem funções de variáveis complexas a partir de exemplos concretos próprios da formação acadêmica de engenheiros e cuja solução envolve a aplicação de integrais. **Resultados:** a pesquisa mostrou avanços acadêmicos em pelo menos três quartos da amostra selecionada. **Conclusões:** a experiência mostrou a importância de integrar a tecnologia ao currículo. O hipermeio planejado e aplicado revelou-se adequado para que os alunos superassem as dificuldades identificadas e conseguissem distinguir o efeito produzido pelas diferentes parametrizações de um mesmo lugar geométrico. Por isso, recomenda-se não fornecer demasiada informação, mas sim utilizar diferentes formatos, verbais, analíticos, vídeos, gráficos, e organizar uma hiperligação adequada para não se perder.

Palavras-chave: Parametrização de curvas, Funções de variável complexa, Modelagem matemática

INTRODUCTION

El uso de matemáticas durante el desarrollo de la vida cotidiana fomenta habilidades y destrezas en el desempeño de las personas, entre ellas: razonamiento lógico, desarrollo de competencias y creatividad. Elementos que permiten a los estudiantes de ingeniería introducir estrategias matemáticas durante su formación profesional, donde pueden experimentar una matemática aplicable a su contexto y observarla como una disciplina útil y eficaz. Por ello, la modelización matemática se convierte en puente entre experiencias cotidianas de los estudiantes y las matemáticas. A pesar de esto, en el entorno educativo colombiano en la última década, los docentes de educación superior hemos venido percibiendo una promoción casi automática de estudiantes de diversas carreras, en asignaturas propias del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), que al llegar a cursos como matemáticas avanzadas, en los que se utiliza análisis numérico como estrategia para afrontar ciertas situaciones propias de ingeniería o problemas matemáticos que requieren métodos numéricos para obtener soluciones eficientes, aproximadas y rápidas, tales como: sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones no lineales con raíces reales o complejas, integración numérica, sistemas de ecuaciones no lineales o ecuaciones diferenciales por nombrar algunas; y que están ubicadas en la malla curricular de las diversas ingenierías mínimo en el cuarto semestre de formación en pregrado. Posición que sugiere la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué nivel de dominio llegan los estudiantes en temas propios de las matemáticas que son prerrequisito, tales como cálculo diferencial, integral, multivariado, vectorial y geometría analítica, entre otras? Dado que para afrontar

satisfactoriamente cursos como el llamado “matemáticas avanzadas” qué se encuentra en la malla curricular de diversas ingenierías; se requiere de los estudiantes que manifiesten uso y manejo adecuado de conceptos, que debieron ser aprendidos en los cursos de primeros semestres. La realidad observada en el aula manifiesta una situación contraria que dio origen a la presente investigación.

Mateus-Nieves (2023a) expone que la cotidianeidad docente permite observar la presencia de estudiantes con bajos niveles de formación, manifiestan poco desarrollo de competencias matemáticas que resultan claves para su desarrollo profesional como ingenieros. Ante este panorama que parece generalizarse surge la necesidad de investigar al respecto en aras de determinar posibles factores que impiden el normal desarrollo de asignaturas como la ya mencionada: matemáticas avanzadas y que por su carácter de rigor poco se les presta atención descuidando la alta deserción escolar por repitencia o perdida continua de este tipo de cursos. Es por ello que, este trabajo pretende mostrar, desde una modelización matemática de 10 situaciones propias de la formación de ingenieros, las dificultades detectadas durante el desarrollo de la investigación y que ratifican la escasa formación adquirida en los cursos prerrequisito como una de las causas de dicha deserción y fracaso escolar.

Se considera importante que los docentes de educación superior seamos conscientes que en la era de la globalización el uso y manejo de ordenadores ha facilitado y también complicado los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas superiores porque inconscientemente se les ha atribuido características que no les son intrínsecas, como pensar que el software hará lo que se le solicite, desconociendo que si no se sabe usar, éste no pasará de ser un artefacto más en las manos del docente o del estudiante. La práctica docente ha permitido observar escasa alfabetización digital tanto en docentes como en estudiantes para usar de manera correcta ordenadores, dispositivos electrónicos o programas informáticos especializados de ingeniería cuyos algoritmos de análisis ya incorporan métodos numéricos, que son esenciales en el campo de la simulación de procesos y proporcionan una respuesta rápida cuando una solución analítica se vuelve compleja. Situación que se agudiza cuando se detecta escasa formación disciplinar en matemáticas superiores en los estudiantes que llegan a los cursos avanzados sin la debida formación previa o cuando no alcanzan a reconocer que el análisis numérico se encarga de realizar un estudio de algoritmos numéricos con la finalidad de controlar el error asociado por la aproximación matemática, y obtener un resultado muy aproximado a la solución exacta del problema a estudiar. Parafraseando a Blomhøj (2004), es lograr que se convierta en una precondición epistemológica, que dicho estudiante sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y

la matemática en juego, como dos objetos separados, pero al mismo tiempo interrelacionados. Finalmente, se realizan conclusiones que se interpretan en el escenario del problema, considerando que la implementación de estrategias didácticas, dependen del docente que es, quien tiene el control sobre lo que sucede respecto al modelo, lo que permite caracterizar y diferenciar la modelización matemática a nivel de investigación.

ANTECEDENTES

Trigueros (2009) plantea que una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problema reales a la cotidianeidad del estudiantado, factibles de representar mediante modelos matemáticos y que permitan responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es imperativo hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales y sociales. Indica que la modelación matemática presume que el argumento trabaja como fuente del proceso de aprendizaje, ya que conforme se trabaja en ese contexto, los alumnos están dispuestos a desarrollar herramientas matemáticas y conocimiento; cuestionar e investigar situaciones que brindan una oportunidad para discutir tanto el papel de estas en la sociedad, como la naturaleza de los modelos matemáticos.

Blomhøj (2004) plantea que la matematización y el análisis del modelo se constituyen en un problema matemático para el que modela y, en consecuencia, el proceso de modelización incluye resolución de problemas matemáticos. Mateus-Nieves & Font (2021) indican que la resolución de problemas por modelación matemática en el escenario educativo universitario permite al estudiantado afrontar experiencias de aprendizaje en las que integra no solo conocimiento previo, sino que, a través de investigación, logra profundizar, adquirir y proponer nuevas rutas de aprendizaje. De ahí que se propone como reto que, en cursos de matemáticas básicas universitarias, se incorporen situaciones problema que reflejen el uso de conceptos y cálculos para dar interpretación a las soluciones, lo que a su vez favorece el desarrollo de competencias matemáticas, conocimientos y valores fundamentales para su quehacer profesional.

Mateus-Nieves & Hernández (2021) diseñaron y aplicaron una propuesta donde articulan la modelización matemática con uso de software, desde una secuencia de diez situaciones seleccionadas, propias de la formación de ingenieros y que involucran integrales impropias. Destacan la importancia de la modelización como recurso didáctico-dinámico porque ayuda a los estudiantes a alcanzar y comprender situaciones reales que involucran

integrales impropias en diferentes contextos. Concluyen que, a pesar de los errores detectados en los estudiantes, la estrategia permitió evidenciar desarrollo de competencias matemáticas en los jóvenes, manifiestas en progreso de habilidades del pensamiento matemático avanzado.

Mateus-Nieves (2022a) relaciona resultados de investigación con estudiantes universitarios que manifiestan dificultades para identificar la topología como una herramienta que admite modelar situaciones cotidianas propias de la labor de un ingeniero. Elaboró e implementó una propuesta de modelización matemática, donde involucró la topología como una manera de conectar el mundo real con las matemáticas. En dicha modelación destaca la importancia de estudiar invariantes topológicas porque permiten encontrar diferencias y similitudes en trayectorias tridimensionales cerradas, elementos que conforman la estructura de una superficie. Resalta la importancia de: relacionar espacios métricos con topología; necesidad de institucionalizar un lenguaje claro, preciso y propio de topología como componente que permite al estudiante reconocer que las propiedades topológicas de los nudos (invariantes), están directamente relacionadas con las propiedades de las superficies que se pueden generar a partir de ellos. Elementos que permitieron a los estudiantes identificar que dicha optimización puede resultar en una estructura con un número de espacios vacíos donde puede haber ausencia de material. Identificando que la modelación permitió, desde el uso de esta geometría, usarse como una guía práctica para identificar áreas de tracción y compresión de la estructura original.

Mateus-Nieves (2023b) presenta resultados de investigación con estudiantes de ingeniería en quienes detectó dificultades para relacionar y aplicar contenidos trigonométricos al solucionar situaciones problema que involucran integración trigonométrica. Relaciona ausencia de significados trigonométricos, que no les permiten hacer conexión con el entorno y con situaciones problema propias de su formación profesional. Muestra el diseño y aplicación de una modelación matemática de tres situaciones problema seleccionadas, que permitieron a los estudiantes reconocer la importancia de la trigonometría como herramienta matemática que permite modelizar diversas situaciones problema, con múltiples aplicaciones en su contexto profesional. Al momento de evaluar la intervención relaciona desarrollo de competencias matemáticas en los jóvenes, manifiestas en progreso de habilidades propias del pensamiento matemático avanzado, entre ellas: abstraer, generalizar, sintetizar, definir y demostrar**.**

REFERENTES TEÓRICOS

Este trabajo de investigación está sustentado en dos ejes: conceptos previos a la formalización de función de variable compleja desde tres referentes de la bibliografía del curso: Angulo (2012), Catsigeras (2006) y Pérez (2004), y modelización matemática. Para el primero fue necesario repasar la definición de algunos conceptos previos a la formalización de función de variable compleja, entre ellos: curvas o caminos, curvas homotópicas, función de variable compleja, conjuntos simplemente conexos y parametrización de curvas, este último formalizado al detalle en la sección de resultados.

Curvas o caminos: $\gamma: z = z(t),\ a \leq t \leq b \sqsubset \mathbb{R}$ denota una curva paramétrica con parametrización $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ de variable real t, orientada para t creciente. Siempre supondremos que γ es C^1a trozos, es decir $z(t)$ es continua y excepto en una cantidad finita de puntos, existe la derivada $\dot{z}(t)$, que es continua y que tiene límites laterales finitos en los puntos donde no existe. (Nota: $\dot{z}(t)$ se define como $\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$). Se dice que la curva $\gamma: z = z(t),\ a \leq t \leq b$ va del punto z_1 al punto z_2 (o que tiene extremo inicial z_1 y extremo final z_2) si $z(a) = z_1, z(b) = z_2$.

Dado que se identificó en la muestra que, cuando el objeto se representa regularmente mediante una función con dos variables (x, y), les resultó difícil de comprender y no sabían cómo tratarlo dado que no relacionaban que este tipo de situaciones es posible simplificarlas cuando se usan ecuaciones paramétricas. De ahí que se definió: si γ una curva parametrizada $\gamma: z = z(t), t \in [a, b]$ se dice que es cerrada si $z(a) = z(b)$, es decir su extremo inicial es el mismo que su extremo final. Donde γ^* denota el conjunto de puntos del plano complejo recorridos por la curva γ, en otras palabras γ^* es el recorrido de la parametrización $z = z(t), t \in [a, b]$ de la curva paramétrica γ. Se observa que el conjunto γ^* es compacto y se denota $\gamma \sqsubset \Omega$ cuando $\gamma^* \sqsubset \Omega$ y $z \in \gamma$ cuando $z \in \gamma^*$; esto es, cuando la curva γ pasa por el punto z. Aquí fue necesario notar que dada una curva γ se define $-\gamma$ como la curva γ orientada en sentido opuesto. Es decir, si $\gamma: z(t), t \in [a, b]$ está orientada para t creciente, entonces $-\gamma: z = z(-\tau), \tau \in [a, b]$ está orientada para $t = -\tau$ decreciente.

Se definió: Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 tales que el extremo final de γ_1 es el extremo inicial de γ_2, se define $\gamma_1 + \gamma_2$ como la curva que se obtiene recorriendo γ_1 primero y luego γ_2, en el mismo sentido en que ambas están orientadas. Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 tales que tienen el mismo extremo final se define $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ como la curva que se obtiene recorriendo γ_1

en el mismo sentido en que está orientada y luego γ_2 en sentido opuesto al que está orientada.

Curvas homotópicas: una curva cerrada γ contenida en Ω es homotópica a un punto en Ω si existe una deformación continua de γ que, sin salir de Ω, la transforma en un punto. Es decir, existe $z = z_s(t) \in \Omega$ definida para todo , $t \in [a, b]$ y para todo $s \in [0,1]$, que es continua respecto a (s, t), que para cada s fijo es una curva cerrada en Ω, y que para $s = 0$ es la curva γ y para $s = 1$ es una curva constante (igual a un punto). Esa función $z = z_s(t)$ se llama homotopía.

Conjuntos simplemente conexos: un abierto Ω es simplemente conexo si es conexo y toda curva cerrada contenida en Ω es homotópica a un punto. Dos curvas γ_1 y γ_2 contenidas en Ω, ambas con el mismo extremo inicial y ambas con el mismo extremo final, se dicen homotópicas en Ω, si la curva $y_1 - \gamma_2$ es homotópica a un punto en Ω.

Función compleja: $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es una función compleja $f = f(z)$ de variable compleja $z \in \mathbb{C}. u(x, y)$ y $v(x, y)$ denotan $Ref(x + iy) = u(x, y)$ y $Imf(x + iy) = v(x, y)$. Entonces $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Donde u_x, u_y, v_x, v_y denotan, cuando existen, las derivadas parciales de u y v respecto de x e y respectivamente.

Modelización matemática

Se hizo una adaptación a lo planteado en Mateus-Nieves (2022b) desde la postura de Blum y Borromeo (2009, p. 1) que definen la modelización como "el proceso de traducción entre el mundo real y las Matemáticas en ambos sentidos", con el objeto de identificar habilidades asociadas a este proceso que deben potenciarse en la formación de los estudiantes. El desarrollo de dichas habilidades implica mayor comprensión de la realidad, fortalecer las conexiones entre conceptos matemáticos y hacer evidente la utilidad de las matemáticas en situaciones contextualizadas. Para materializar este proceso, se adaptó el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007) en términos de siete transiciones: 1° el problema o la situación propuesta debe ser entendida por el estudiante, esto es, debe construir un modelo de la situación (transiciones: comprensión y construcción); 2° la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisa (transiciones: simplificación y estructuración), dando lugar a un modelo real de la misma; 3° matematización, transforma el modelo real de la situación en un modelo matemático; 4° trabajo matemático, la puesta en práctica del modelado debe producir resultados matemáticos; que, 5° deben ser interpretados en el mundo real (transición: interpretación); 6° validación y

verificación de resultados, aquí es posible que sea necesario reiniciar un ciclo donde sea preciso repetir alguna(s) transición (es). 7°exposición del problema por el alumno y su posible solución. Para ello se consideró lo ya encontrado y expuesto en Mateus-Nieves (2022, p. 760) quien propone que "un individuo puede resolver un problema, pasando por diferentes transiciones del ciclo sin seguir, necesariamente, el orden expuesto anteriormente", e indica que este ciclo de modelización puede no definir una trayectoria lineal de pensamiento.

METODOLOGÍA

Se trató de un trabajo exploratorio, de tipo descriptivo, analítico-interpretativo. De naturaleza exploratoria porque buscó facilitar la comprensión del tema planteado; de tipo descriptivo, analítico-interpretativo porque busca especificar propiedades y características que muestran los estudiantes frente a la integración de funciones de variable compleja donde debían construir la integral desde la parametrización de la curva compleja que las determina; para ello se eligieron diez situaciones problema propias de la formación de ingenieros. Se determinó una muestra de 70 estudiantes que cursan diversas carreras de ingeniería (eléctrica, mecánica, industrial), en una institución universitaria no estatal; cuya selección se dio desde la creación de un instrumento, una prueba escrita relacionada con integración de funciones de variable compleja. Se eligieron aquellos estudiantes cuyo desempeño fuera inferior a la media esperada (50 puntos sobre 100). Se nomenclaron como E1, E2, … E70 con el objeto de hacer seguimiento exhaustivo en su trabajo y determinar si la intervención ofrecía algún tipo de mejora en su desempeño académico evidenciado en el desarrollo de competencias matemáticas propias de un ingeniero. Cada estudiante firmó un consentimiento informado que permitió su participación en la investigación, en el que se garantizó su anonimato en la presentación de resultados. La facultad de ingeniería que coordina los tres programas mencionados abaló el desarrollo de la investigación durante un año lectivo.

La investigación se desarrolló en dos fases. Primera: *de aprestamiento*, donde se consideran las cuatro primeras transiciones. Conforme a los resultados obtenidos en la prueba inicial, fue necesario repasar y reconstruir conceptos previos que se suponía ya manejaban los estudiantes, pero que al entrar en contacto con ellos se observaron falencias. Por ejemplo, parametrización correcta de curvas y superficies, comenzando por $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ hasta llegar a cómo generalizar una parametrización en $\mathbb{R}^n$; definir qué es una curva de clase C^1 a trozos; cuándo hay una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos, trabajo expuesto en la sección de resultados. Segunda fase: *de formalización* que contempla las

tres transiciones restantes, se realizaron modelizaciones matemáticas a diez situaciones propuestas de las que en este informe solo se presentan algunas de ellas, dado que se consideran aportan mayor relevancia al desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes y elementos didáctico-metodológicos a los docentes. En algunas de ellas fue necesario hacer bosquejo de superficies convencionales y no convencionales usando definiciones matemáticas propias del cálculo vectorial, específicamente al realizar parametrización de curvas y superficies. Se usó hipermedia como conjunto estructurado de diversos medios, textos y gráficos como elementos de apoyo para visualizar, analizar, categorizar, generalizar y sintetizar las situaciones propuestas. Los instrumentos usados en esta fase fueron diseñados, piloteados, ajustados y aplicados por el equipo de docentes que lidera el director de investigación y autor del presente manuscrito. Los resultados fueron tabulados y triangulados por categorías, considerando que se propuso pruebas con ejercicios donde el estudiante debía parametrizar una curva en $\mathbb{R}^2$, otras en $\mathbb{R}^3$; debía indicar cómo lo hace y qué resultado encuentra y si tuvo o no dificultades para ejecutar las acciones pedidas.

En otro instrumento se les propuso ejercicios donde debían encontrar una parametrización para diferentes sólidos, entre ellos: una esfera de radio *r,* elipsoide, cilindro circular, cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, paraboloide hiperbólico, paraboloide circular, hiperboloides de una y de dos hojas, cono y toro. Se les indicó que para las respetivas respuestas debían usar integrales sobre caminos parametrizados por una curva. La información recopilada permitió triangular datos que condujeron a observar serias dificultades en manejo de preconceptos que se esperaba ya fueran conocidos por los estudiantes, y que al parecer no los sabían o los habían olvidado. En el apartado resultados se muestran al detalle algunas de estas situaciones. Cabe resaltar que por cuestión de espacio no es posible mostrar al detalle en este manuscrito, dos situaciones relacionadas con parametrización de superficies usando coordenadas esféricas y que para los estudiantes representó una dificultad considerada mayor. Tema que queda abierto para otra investigación.

Las sesiones de clase fueron grabadas y trascritas en unidades de análisis, información emitida de un diario de campo, donde se registraron datos que el investigador observó y que se consideraron relevantes para el desarrollo de la investigación. Otro instrumento usado fue la creación de unidades de análisis que permitieran triangularse con los datos del diario de campo, y los resultados encontrados en las pruebas aplicadas. Información que permitió hacer seguimiento detallado al desempeño de cada estudiante y así lograr obtener resultados y conclusiones.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Los resultados de la modelización matemática aquí compartida están centrados en identificar dos categorías: *uso y manejo de integración de funciones de variable compleja* como aplicación de conceptos matemáticos propios de la formación de ingenieros. La primera, *uso*, porque los estudiantes de ingeniería modelan para diseñar y/o analizar el trabajo de diferentes situaciones propias de su quehacer profesional. La segunda, para identificar el manejo que dan a conceptos matemáticos con el objeto de aportar en didáctica, particularmente del PMA; que ayuden a entender, cómo se articula este conocimiento matemático propio de la educación superior.

Como primer instrumento se diseñó, piloteó y aplicó una prueba a la población de 135 estudiantes. Constaba de 10 parametrizaciones, de tres situaciones distintas, se reitera, propias de la formación de ingenieros, enfocadas a responder dos preguntas centrales: ¿qué lugar geométrico representa cada una de las parametrizaciones expuestas? y ¿qué diferencias tienen las mismas? La muestra seleccionada fue de 70 estudiantes, el 55,8% de la población, cuyas respuestas fueron calificadas como "mal" de acuerdo con el siguiente criterio:

- correcta cuando la respuesta fue completa, indicando sentido, punto de inicio y velocidad de recorrido.
- parcialmente correcta, cuando fue omitido alguno de estos aspectos y
- mal, cuando lo realizan en forma incorrecta.

La sistematización de resultados permitió evidenciar que solo el 28.3% de la población relaciona de forma correcta, animaciones, vistas previamente, para generalizar a parametrizaciones similares usando las funciones seno y coseno. El 15.9% de forma parcialmente correcta. Lo que permitió inferir que la muestra no pudo expresar en forma correcta la expresión analítica de la parametrización pedida. Preocupados por el alto índice de estudiantes que presentan debilidades serias para realizar este tipo de trabajo; para la fase *de aprestamiento* fue necesario repasar a la muestra la forma correcta de parametrizar una curva. Se les recordó que existen parametrizaciones consideradas "*clave*" que deben aprenderse, entre ellas: circunferencias y elipses**.** También fue necesario repasar que una ecuación paramétrica es una forma de *mapear varias variables* en términos de una sola. De ahí que, en lugar de usar coordenadas x y y, regularmente se usan coordenadas en términos de otra variable, aquí se usó t. Por ejemplo, al considerar $y = x^2$, ecuación cartesiana con coordenadas (x, y) es posible cambiarla, al suponer que $x = t$ y

$y = t^2$. De donde se tienen las coordenadas (t, t^2) que representan la *forma paramétrica***.**

Para la *ecuación paramétrica de una circunferencia*: cuya ecuación general cartesiana es una expresión de la forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, con centro $C(a,b)$ y radio r. Se resaltó que la primera identidad pitagórica es clave para elevar al cuadrado dos valores diferentes, como la de la circunferencia unitaria, expresada como: $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$. Se mostró una parametrización de esta circunferencia, tomando la identidad antes mencionada, como estrategia para encontrar una forma de escribir: $9\ sen^2\theta + 9\ cos^2\theta = 9$. Se consideró que el cuadrado de x sea igual a: $x^2 = 9\ cos^2 t$ significa que: $x = 3\ cos\ t$. De forma análoga, se consideró que el cuadrado de y sea: $y^2 = 9\ sen^2 t$, lo que significa que: $y = 3\ sen\ t$. Se encontró que la parametrización queda en términos de: $x = 3\ cos\ t$ y $y = 3\ sen\ t$.

Para la *ecuación paramétrica de la elipse:* se consideró su ecuación general, expresión algebraica de la forma: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \mathbf{1}$. Donde $\boldsymbol{a}$ se considera la distancia en dirección $\boldsymbol{x}$ (eje mayor) y $\boldsymbol{b}$ como la distancia en la dirección $\boldsymbol{y}$ (eje menor). Se mostró que también es posible parametrizarla usando la identidad usada en la circunferencia. Para facilitar la comprensión se hizo uso de un ejemplo; se pidió encontrar una parametrización adecuada para la elipse $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \mathbf{1}$. Se procedió en términos similares al usado en la circunferencia. Lo que permitió afirmar que $\boldsymbol{x^2 = 9\ cos^2 t}$ y $\boldsymbol{y^2 = 4\ sen^2 t}$, lo que significa:

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = cos^2 t + sen^2 t = 1$$

de donde es posible inferir, $x = 3\ cos\ t$ y $y = 2\ sen\ t$, que representa *una parametrización* de la elipse.

Posteriormente se formalizó que una parametrización de una curva *C* es una función vectorial $C: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con la propiedad que, al variar el parámetro $t \in I$, su imagen *C*(*t*) va describiendo los puntos de *C*. Como estrategia se estableció que una interpretación física es pensar que el parámetro *t* representa el tiempo y *C(t)* indica en qué posición del plano o del espacio se encuentra la partícula en el instante *t*. Posteriormente se presentó un instrumento (guía), con una serie de ejemplos cuya intención era aportar ideas y métodos para describir paramétricamente algunas curvas; veamos algunos de

ellos que aportan elementos didáctico-metodológicos útiles para el profesor que desea mejorar su práctica docente.

Se mostró en el software una parametrización para la curva C_1 expresada como

$$C_1 = \begin{cases} 2x - 3y - z = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

Luego de graficar los estudiantes pudieron identificar que C_1 es una recta en $\mathbb{R}^3$, la intersección de los planos $\pi_1: 2x - 3y - z = 2$ y $\pi_2: 2x + y = 1$. Al despejar *y* de la ecuación de π_2 se tiene $y = 1 - 2x$, al reemplazarlo en la ecuación $\pi_1: 2x - 3(1 - 2x) - z = 2$, al simplificar se alcanza $4x - z = 5$ al despejar en función de *z* se tiene $z = 4x - 5$, de donde los puntos de C_1 son los (*x, y, z*) tales que $y = 1 - 2x$ y $z = 4x - 5$. Con lo que $(x, y, z) = (x, 1 - 2x, 4x - 5)$ que equivale a:

$$= (0, 1, -5) + (x, -2x, 4x)$$
$$= (0,1, -5) + x(1, -2, 4)$$

es decir, C_1 es la recta dirigida por el vector $(1, -2, 4)$ que pasa por el punto $(0, 1, -5)$. Lo que permite inferir que una parametrización de C_1 es

$$C_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$C_1(x) = (x, 1 - 2x, 4x - 5)$$

Este ejemplo permitió visualizar la forma en que se puede parametrizar una curva con relación a dos planos. Sin embargo, algunos estudiantes presentaron dificultad para identificar la intersección de estos planos como una curva en $\mathbb{R}^3$, para el caso el grupo de estudiantes E30, E25 y E67, manifestaron: "*si la intersección es una recta, ¿por qué este se menciona como una curva?*" [trascripción unidad de análisis 289 diario de campo]. Lo que permite inferir que para este grupo de estudiantes aun no es claro qué tipo de representación se da en el plano, en el espacio y más aún, en $\mathbb{R}^n$. Olvidando que, en el curso de geometría diferencial, ya visto por ellos, se considera que el espacio es curvo, y en el curso de cálculo vectorial se supone aprendieron a operar vectores en $\mathbb{R}^3$.

Se evidenció que no reconocen que una *curva* Γ tiene una interpretación geométrica directa, como subconjunto del plano o del espacio, mientras que un *camino* γ es una función que proporciona una forma de parametrizar la curva Γ, puesto que cada punto de la curva aparece en la forma γ(t) para algún valor del

parámetro *t.* Esto permite inferir que su pensamiento matemático está anclado únicamente en $\mathbb{R}^2$. Se explicó al detalle con el ánimo de superar esta dificultad y así se logró evidenciar que ese vacío era una de las causas que no les permitía comprender que si γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^3$ es un *camino* en el espacio, es posible escribir: $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)i + y(t)j + z(t)k,$ con $a \leq t \leq b,$ donde x, y, z son funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Y por tanto el *camino*: γ tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = t(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b \quad \triangleq$$

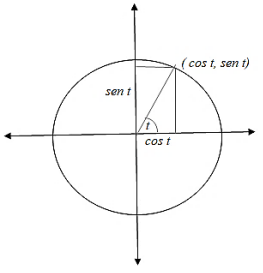
Otra situación por resaltar fue cuando se buscó que los estudiantes determinaran si la función expresada como:

$$C_2: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$C_2(t) = (cost, sent)$$

representa una parametrización de la circunferencia C_2 esbozada en la Figura 1, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$

Figura 1

Representación paramétrica de la circunferencia.

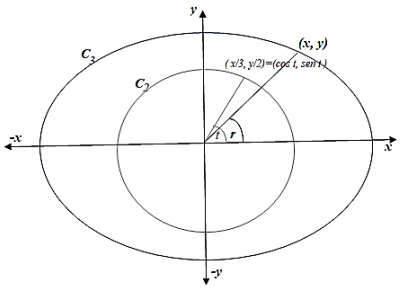


Al explorar la situación con los estudiantes se observó que miraban a *t* como el parámetro que representa un tiempo determinado; por ello, fue necesario explicar al detalle que, para este ejemplo, el parámetro *t* representa el ángulo que forma el vector de origen (0, 0) y extremo (*x, y*) con el semieje positivo de las abscisas. Lo que permitió identificar falencias con el uso y manejo de vectores en $\mathbb{R}^2$. Como estrategia para superar esta dificultad se interpuso una elipse sobre $\mathbb{R}^2$ donde *t* ya no tiene la misma interpretación que en la circunferencia, esto es: Sea C_3: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ representada en la Figura 2

con la condición de que, la gráfica de la elipse quede sobre el mismo plano que la circunferencia de radio 1, compartan el centro y que éste quede sobre el origen del plano.

Figura 2

Representación: una parametrización de la elipse sobre una circunferencia.



Elementos que les permitió identificar que una parametrización de esta elipse cuya ecuación se puede escribir en la forma: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$, significa que un punto $(x, y) \in C_3$ si y solo si $\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right) \in C_3$. Se les orientó a considerar que, en caso de que esto se dé, se tiene $\frac{x}{3} = \cos t$ y $\frac{y}{2} = sen\ t$ para algún $t \in [0, 2\pi]$. De tal manera que al despejar *x* e *y* se obtiene una parametrización de esta elipse, que evidentemente es la función expresada como:

$$C_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$C_3(t) = (3\cos t, 2\ sen\ t)$$

Superada la dificultad en $\mathbb{R}^2$ se pudo formalizar que una curva parametrizada de clase C_1 en $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C_1, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, tal que $\gamma'(t) \neq 0, \forall\ t \in [a, b]$. Aquí surgió otra dificultad relacionada con la capacidad para definir de manera correcta el vector tangente $\gamma'(t)$ a la curva γ en cada punto γ(t) de la misma. Dado que para $t = a$ se entiende que existen y sus límites son iguales, esto es: $\gamma'_+(a) = \lim_{t \to a^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a} = \lim_{t \to a^+} \gamma'(t)$, de manera análoga también se da en $t = b$. Situación nada fácil de comprender para la muestra dado que a pesar de haber ya tomado y aprobado el curso cálculo vectorial y que el uso del software les

permitió visualizar la existencia e igualdad de los limites mencionados no les fue tan sencillo de entender y aplicar.

Ahora bien, en la fase de formalización, se mostró a la muestra que es importante reconocer lo que usualmente se dice: la circunferencia $C(o,r) = \{z: |z| = r\}, r > 0\ fijo$ es una curva, cuando en realidad, es la *traza de la curva* γ dada por la función $\gamma(t) = re^{it} = rcos\ it + ir\ sent \cong (rcos\ t, r\ sen\ t), t \in [0, 2\pi]$. En otras palabras, lo que en realidad se tiene es que $C(o,r) = \{\gamma\}$. Esto sin especificar la función γ, dado que se desconoce cómo se recorre la traza en el tiempo. Elementos que les permitió identificar que se reconoce que $\gamma_1(t) = re^{-it} = r\cos t - ir\ sen\ t \cong (r\ cost, -r\ sent)$, con $t \in [0, 2\pi]$, representa otra curva diferente, porque no es la misma función; pero que tiene la misma traza que $\gamma: C(0,r) = \{\gamma_1\}$. De esta forma identificaron que la función γ describe el movimiento, con velocidad uniforme, a lo largo de la circunferencia de radio *r* centrada en el origen en el sentido positivo mientras que γ_1 describe el movimiento, también con velocidad uniforme, a lo largo de la misma circunferencia, pero en sentido negativo, el de las manillas de reloj.

Es esta parte de la investigación resultó clave y fundamental el uso del software. Sirvió para superar las dificultades antes descritas, lo que permitió formalizar y generalizar que una curva parametrizada $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es equivalente a otra curva parametrizada $\sigma: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sí existe una biyección $\phi: [c,d] \to [a,b]$ de clase C^1 tal que $\phi'(t) > 0$ y $\sigma(s) = \gamma(\phi(s))$ para todo $s \in [c,d]$. Que de inmediato comprueba que la relación $\gamma \Re \sigma \leftrightarrow \gamma$ es equivalente a σ; y es efectivamente una relación de equivalencia en el conjunto X de las curvas parametrizadas de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$. Comprendido esto se formalizó que el *conjunto cociente* X/ ℝ como el conjunto de las curvas orientadas de clase C^1en $\mathbb{R}^n$.

Lo que hasta aquí se adelantó sirvió para que la muestra aprendiera a estimar el valor de la integral a lo largo de una curva, destreza básica que les será esencial al momento de adelantar demostraciones y soluciones a situaciones propuestas. Fue necesario profundizar la diferencia entre *parametrizaciones* (caminos), *curvas* y *trazas,* con el objeto de repasar definiciones y propiedades básicas; también para acostumbrarse a la notación compleja, que para estos estudiantes era nueva.

Fue necesario definir que cada curva orientada Γ = [γ] de clase C^1 permite observar cómo la traza $\gamma[a,b]$ de una curva parametrizada $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 representa la clase de equivalencia [γ], con la orientación inducida por γ. Aquí fue necesario observar que esa misma traza $\gamma[a,b]$ admite

dos orientaciones: una dada por γ, que recorre $\gamma[a,b]$ empezando en $\gamma(a)$ y terminando en $\gamma(b)$, y otra dada por la curva opuesta a γ, definida por $\gamma^-:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ donde $\gamma^-(t)=\gamma(a+b,t)$, que recorre $\gamma[a,b]$ empezando en $\gamma(b)$ y terminando en $\gamma(a)$. La curva orientada de clase C^1 representada por esta curva opuesta γ^- fue denotada $\Gamma^-=[\gamma^-]$. Análogamente fue posible definir *curvas de clase C^1a trozos*. Fue dable decir que una aplicación continua $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada de clase C^1 a trozos si existe $a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b$ partición de $[a,b]$ tal que la restricción de γ a cada subintervalo $[a_j,\ a_{j+1}]$, con $j=0,1,\cdots,m-1$, define una curva parametrizada de clase C^1 donde γ admite un único vector tangente $\gamma'(t)$ en cada punto $\gamma(t)$ con $t\neq a_j$ para todo *j*, mientras que en los puntos $\gamma(a_j)$ tienen una tangente a la izquierda y otra tangente a la derecha de $\gamma(a_j)$, definidas respectivamente por los vectores $\gamma_-(a_j)=\lim_{t\to a_{j^-}}\frac{\gamma(t)-\gamma(a_j)}{t-a_j}$ y $\gamma_+(a_j)=\lim_{t\to a_{j^-}}\frac{\gamma(t)-\gamma(a_j)}{t-a_j}$ posiblemente diferentes.

Situación que permitió a los estudiantes comprender que una curva parametrizada $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos es equivalente a otra curva parametrizada $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos si existen particiones $a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b$ de $[a,b]$ y $c=c_0<c_1<\cdots<c_m=d$ de $[c,d]$ tales que la restricción $\gamma|_{[a_j,a_{j+1}]}$ es una curva parametrizada de clase C^1 equivalente a la restricción $\sigma|_{[c_j,c_{j+1}]}$, para cada $j=0,1,\cdots,n-1$. Lo que les permitió observar que se trata de una relación $\gamma\ \Re\ \sigma\leftrightarrow\gamma$ equivalente a σ en el conjunto de las curvas parametrizadas de clase C^1a trozos en $\mathbb{R}^n$.

Posteriormente se formalizó el conjunto cociente resultante como el: *conjunto de curvas orientadas de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}^n$*, que permitió definir de forma general, que una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos representada por una curva parametrizada $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, permite definir a Γ^-como la clase de equivalencia representada por $\gamma^-(t)=\gamma(a+b,t),t\in[a,b]$. Donde en cada curva parametrizada $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1 a trozos la función $\|\gamma'(t)\|$ es integrable en $[a,b]$, al estar bien definida salvo en una cantidad finita $a_0,a_1,\cdots a_m$ de puntos de $[a,b]$, y ser continua y acotada en $[a,b]\setminus\{a_0,a_1,\cdots a_m\}$. Que define la longitud de γ por $long\ (\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$.

Al usar el teorema del cambio de variable los estudiantes pudieron notar que si γ y σ son (curvas parametrizadas de clase C^1) equivalentes entonces $long\ (\gamma)=long\ (\sigma)$, que $long\ (\gamma)=long\ (\gamma^-)$; por tanto, dada una curva orientada Γ de clase C^1 a trozos permite definir $long\ (\Gamma)=long\ (\gamma)$, donde γ es cualquier parametrización de dicha curva. Lograron observar que la

curva Γ es la clase de todas las curvas equivalentes a γ. Aquí es importante resaltar la unidad de análisis 487 donde se puede inferir que uno de los subgrupos de estudiantes, E24, E13 y E35, identificaron de manera correcta que [*una parametrización orientada Γ de clase* C^1 *a trozos en* $\mathbb{R}^n$ *tiene tres opciones:*

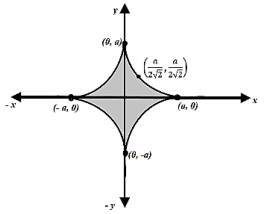
- Una curva cerrada en $\mathbb{R}^n$ si admite una parametrización $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Una curva simple si admite una parametrización $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$que es inyectiva;
- Una curva cerrada simple si admite una parametrización $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ y la restricción de γ al intervalo $[a, b)$ es inyectiva].

Lo que permite inferir que para esta parte de la muestra fue claro identificar cuándo una curva es rectificable y suaves a trozos. Se les mostró que a pesar de que sólo con la hipótesis $\gamma \in C[a, b]$ no siempre se puede obtener lo que se corresponde intuitivamente con la noción de curva. por ejemplo, existen curvas tales que $\gamma: [a, b]$ es un cuadrado u otros conjuntos similares, comúnmente llamadas curvas de Peano. Se recalcó que usualmente se suelen pedir más condiciones que una curva ha de cumplir; entre ellas: pedirse que γ tenga derivada en todos los puntos de $[a, b]$ salvo en un conjunto finito de puntos, aunque eso no evita todos los problemas posibles, porque es viable que la derivada pueda no estar acotada cerca de algunos puntos. Se resaltó la importancia de observar que, al considerar dos parametrizaciones equivalentes, γ y Γ, de la misma curva que, es o bien suave o bien C^1 a trozos, siempre es posible suponer que la función α, que representa un cambio de parámetro, es también una función suave o C^1 a trozos. Lo que les facilitó ver que la longitud es la misma para cualquier otra parametrización de una curva suave; en efecto, notaron que la fórmula alcanzó la misma forma después de un cambio monótono de variable. Aquí se formalizó que con frecuencia se usa la palabra *contorno* para referirnos a una curva C^1 a trozos, simple y cerrada.

Otra situación que se propuso a los estudiantes y que realizaron de forma correcta fue calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, usando la parametrización $x = a\,cos^3\,\theta$, $y = sen^3\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se ofreció la Figura 3 como guía.

Figura 3

Gráfico guía de la hipocicloide.



El hecho de entregar la parametrización y la gráfica de la situación ayudó a los estudiantes a comprender cómo se debía realizar el ejercicio. Les fue más sencillo comprender la situación e identificar el tipo de integral doble que usarían. Sin embargo, esto no sucedió en situaciones donde debían encontrar parametrizaciones; se observó que les cuesta construirlas porque no manejan preconceptos que ya deberían saber porque fueron estudiados en cursos anteriores. Se presenta la unidad de análisis 456 que describe el producto entregado por dos subgrupos que identificaron el área A definida por:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx \quad \text{equivalente a}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\,cos^3\theta)(3a\,sen^2\theta\cos\theta) - (a\,sen^3\theta)(-3a\,cos^2\theta\,sen\,\theta)]\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(sen^2\theta\,cos^4\theta + cos^2\theta sen^4\theta)\,d\theta = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} sen^2\theta\,cos^2\theta\;\,d\theta$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} sen^2\,2\theta\,d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)\,d\theta$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\cos 4\theta\,d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2\,. \;\triangleq \text{[unidad de análisis 456]}$$

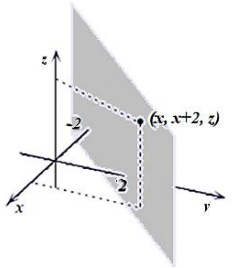
Al formalizar una parametrización a superficies $S \subset \mathbb{R}^3$ se observó dificultad para identificar que la variación de los parámetros $s \in [a, b]$ y $t \in [c, d]$, su imagen $\phi(x, t)$ describe los puntos de la superficie *S*. En esta situación fue evidente que los estudiantes no relacionan que la superficie en $S \subset \mathbb{R}^3$ es una aplicación $\phi: [a, b]$ x $[c, d] \to \mathbb{R}^3$. Lo que dirigió el trabajo a la necesidad de formalizar:

- Sea $S: y - x = 2$ representa un plano vertical. Los puntos de *S* se caracterizan por tener vinculadas sus dos primeras coordenadas por la

relación $y = x + 2$ mientras que la última coordenada puede tomar cualquier valor, ver Figura 4.

Figura 4

Representación de la superficie de un plano vertical en el espacio $\mathbb{R}^3$

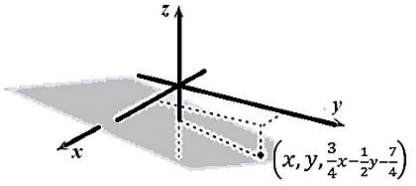


luego, la aplicación $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x, z) = (x,\ x + 2, z)$ es una parametrización del plano *S*.

- Si *S* representa un plano no vertical por ejemplo $S: 3x - 2y + 4z = 1$, el coeficiente de *z* siempre será no nulo, lo que permite despejar *z* de la ecuación que define a *S* en los siguientes términos: $z = \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{7}{4}$ (Figura 5).

Figura 5

Representación de la superficie de un plano horizontal en el espacio $\mathbb{R}^3$



de donde es posible deducir que un punto $(x, y, z) \in S$ sí y sólo si $(x, y, z) = \left(x, y, \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{7}{4}\right)$ donde x, y son números reales cualesquiera. Luego, la aplicación $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x, y) = \left(x, y, \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{7}{4}\right)$ representa una parametrización de *S*.

Como ejercicios complementarios y de práctica se propuso encontrar una parametrización para diferentes sólidos: una esfera de radio r, elipsoide, cilindro circular, cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, paraboloide hiperbólico, paraboloide circular, hiperboloide de una hoja y de dos hojas, cono, toro. También se pidió calcular $\int_\gamma f(z)dz$ para los siguientes casos:

a. $f(z) = \overline{z}$ con γ la circunferencia de centro 0 y radio 2 positivamente orientada;
b. $f(z) = \mathcal{R}z$ con γ la semicircunferencia unitaria que pasa por $-i, 1, i$ en ese orden;
c. $f(z) = \frac{1}{z}$ con γ la poligonal que une los puntos $1, -i, -1, i$ en ese orden.

Se resalta la capacidad alcanzada por varios subgrupos de estudiantes de la muestra, quienes en varias de sus respuestas usaron integrales sobre caminos parametrizados por una curva, veamos la propuesta presentada por el subgrupo de los estudiantes E39, E45, y E68, manifiesta en la unidad de análisis 524 en los siguientes términos:

Si $\gamma: [a, b] \to C$ es un camino parametrizado y *f(z)* una función compleja continua sobre la trayectoria del camino, donde la integral de la función *f* a lo largo del camino γ es

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

es suficiente parametrizar los tres caminos que se proponen. Para el 1°, una parametrización sería $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, por tanto

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\, 2ie^{it}\, dt = 4i \int_0^{2\pi} dt = 8\pi i.$$

En el 2° la parametrización $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puesto que $\mathcal{R}(e^{it}) = \mathcal{R}\,(\cos t + i\, sen\, t) = \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$. En este caso se tiene la parametrización $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y como $\mathcal{R}(e^{it}) = \mathcal{R}\,(\cos t + i\, sent) = \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ se obtiene:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} ie^{it} dt = i\frac{\pi}{2}.$$

Para el 3° se puede decir que es una forma ligeramente distinta a los dos anteriores. Porque se debe escoger un corte de rama del plano complejo de manera que la poligonal γ quede en el complemento de dicho corte. Para esto consideramos *r* como la semirrecta cuyo origen está en 0 y forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje real. En $C \setminus r$; la función $f = \frac{1}{z}$ tiene una antiderivada: es $l(z) = \log|z| + i\theta$; siendo$z = |z|e^{i\theta}$ con $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} + 2\pi$. De donde:

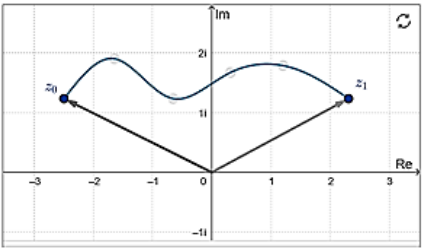
$$\int_{\gamma} f = l(i) - l(1) = \left(0 + i\tfrac{\pi}{2}\right) - (0 + 2\pi i) = \frac{3\pi i}{2}.$$

Que es contradicción ≜. [trascripción unidad de análisis 524]

Al validar el trabajo adelantado por estos dos subgrupos ante el pleno de la muestra, se observó que resultó difícil de comprender para algunos de sus compañeros, dado que no tenían claro aún, la forma correcta como se puede parametrizar una curva, por ello fue necesario reforzar a través de suponer que las funciones de valor real $x = x(t)$, y $y = y(t)$, con $a \leq t \leq b$ son ecuaciones paramétricas de una curva C en el plano complejo. Y que al considerar estas ecuaciones como las partes real e imaginaria en $z = x + iy$ permite describir los puntos z en C por medio de la función de valor complejo de una variable real t. Lo que permitió formalizar una *parametrización* de C en los siguientes términos: $z(t) = x(t) + iy(t)$, con $a \leq t \leq b$. Donde el punto $z(a) = x(a) + iy(a)$, o el punto $z_0 = (x(a), y(a))$ denominado como *punto inicial* de C y $z(b) = x(b) + iy(b)$, o $z_1 = (x(b), y(b))$ como el *punto final*. Algunos estudiantes lograron identificar que la expresión $z(t) = x(t) + iy(t)$ es posible interpretarse como una función vectorial de dos dimensiones. Y de forma análoga que $z(a)$ y $z(b)$ es posible identificarlos como los vectores posición. Así que, cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$ se puede observar la curva C trazada por el movimiento de la punta del vector $z(t)$. En la Figura 6 se observa la utilización de un applet de GeoGebra online, donde se considera la variación $-2 \leq t \leq 1$.

Figura 6

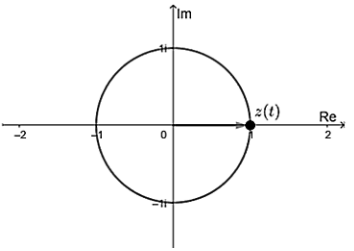
Visualización en el software del punto inicial y final en una parametrización



A esta altura de la investigación fue posible observar que más de la mitad de la muestra logró identificar que las ecuaciones paramétricas $x = \cos t, y = sen\ t$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ describen un círculo de radio unitario con centro en el origen. Y que una parametrización de este círculo es $z(t) = \cos t + i\ sen\ t$, o $z(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Figura 7

Figura 7

Parametrización de un círculo en el plano complejo



Así lograron identificar que no existe una parametrización única para un contorno dado C, que permitió verificar las siguientes expresiones:

1. $z(t) = e^{it} = \cos t + i\ sen\ t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$
2. $z(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i\ sen\ (2\pi t),\ \ 0 \leq t \leq 1$
3. $z(t) = e^{\frac{\pi}{2}it} = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + i\ sen\ \left(\frac{\pi t}{2}\right),\ \ 0 \leq t \leq 4$

reconociendo que son parametrizaciones, orientadas positivamente, para el círculo unitario $|z| = 1$. Lo que permite inferir que lograron identificar orientación positiva y diferenciarla de la negativa. Aquí el uso del software resultó clave, pues les permitió identificar y diferenciar que las parametrizaciones presentadas responden a recorridos en diferentes sentidos y

con distinto punto de inicio, también con diferentes velocidades. Por ejemplo, fue posible que determinaran que si se trata de una partícula que viaja por la circunferencia es posible encontrar dos recorridos, uno positivo, otro negativo y cuestionarse: ¿qué diferencias existen entre estos recorridos? ¿cambia algo? ¿Qué? Con este trabajo se buscó que los estudiantes relacionen las animaciones vistas previamente para poder generalizar a parametrizaciones similares utilizando las funciones seno y coseno. Se les presentaron situaciones en forma verbal con el objeto de que las presentaran en forma analítica. Se destaca que los estudiantes cuentan con el software para verificar si su respuesta está acorde a lo pedido, por ejemplo, ante la pregunta: ¿Cuál debe ser la parametrización correcta si la partícula se mueva en sentido contrario al reloj y se desplaza 3 veces más rápido que la curva 1, si inicia su trayectoria en el punto (1, 0)? Se observó que si las ecuaciones aparecen en forma explícita les facilita el trabajo, mientras que si están aparecen en forma implícita, les cuesta construirlas. Varios subgrupos de estudiantes contestaron la pregunta solo mirando, en repetidas ocasiones, el video correspondiente que se les había ofrecido para plantear el sistema correspondiente. Donde solo el 65% de la muestra lo hizo correctamente. Lo que permite inferir la implementación y uso adecuado del hipermedio [1] les permitió lograr avances en la construcción de procesos cognitivos evidenciado en desarrollo de competencias matemáticas. Es importante mencionar que en el resto de la muestra se evidencio mediano avance al presentar por separado las ecuaciones y considerar el parámetro que las verifica a ambas.

CONCLUSIONES

Los elementos mostrados en este estudio permiten recomendar la no promoción de estudiantes con baja formación académica en cursos considerados prerrequisito; particularmente aquellos en que se evidencia escaso uso y manejo de conceptos que se espera sean conocidos y aprendidos en cursos anteriores. Promocionarlos con estas falencias provoca dificultades como las aquí manifiestas y retraso cuando se pretende desarrollar temas de cursos posteriores que tienen como prerrequisito el uso y manejo adecuado de conceptos considerados clave y fueron trabajados en cursos anteriores.

[1] En el plano conceptual, *hipermedia* designa medias que el individuo puede bifurcar o ejecutar

Antes de llegar a parametrizar curvas complejas se debe diagnosticar el estado en que llegan los estudiantes con el objeto de identificar falencias y sobre ellas planear repasos y formalizar la manera correcta de hacerlas en $\mathbb{R}^2, \cdots, \mathbb{R}^n$. Solo así podrán comprender que una curva puede representarse con diferentes parametrizaciones y que es posible tomar como representante una clase cualquiera de los caminos equivalentes que la componen. Aquí enfatizo, permítanme llamar un "abuso de terminología" y que usualmente los profesores usamos al decir que una función continua $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva, en lugar de decir que es una parametrización (o camino) que representa la curva, y que es su clase de equivalencia. Si el estudiante comprende que, al elegir una parametrización en lugar de otra, lo que se ha hecho es reparametrizar la curva podrá entender la *función α como a un cambio de parámetro*. Lo que le permitiría identificar el contexto, cuándo nos referimos a una curva y cuándo a una parametrización. He observado que regularmente se usa el término *camino* como sinónimo de *curva,* elementos que de no quedar claros pueden reforzar las dificultades presentadas en los estudiantes.

Cuando se hizo referencia a la traza de una curva como el conjunto $\{\gamma\} = \gamma([a, b])$, para cualquier parametrización $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ donde el punto $\gamma(a)$ se denomina punto inicial de la curva y $\gamma(b)$, el punto final; se observó que en algunos libros de texto también se abusa de terminología, diciendo *curva* cuando realmente se está refiriendo a la *traza*. Elementos que resultan clave diferenciar por parte del docente al momento de seleccionar los textos bibliografía del curso.

Se considera de suma importancia la integración de tecnología al currículo. Aquí el hipermedio planeado y aplicado resultó adecuado para que los alumnos con tantas dificultades identificadas como la muestra aquí descrita, lograran distinguir el efecto que producen las diferentes parametrizaciones de un mismo lugar geométrico. Lo negativo de esta parte fue la cantidad de tiempo extracurricular que fue necesario aplicar para que estos jóvenes avanzaran en su proceso de formación. Situación no siempre posible de ejecutar.

Se recomienda al planificar el hipermedio, considerar la población a la que va dirigido, crear material didáctico acorde a sus necesidades, ayudado de videos, infografías, texto, imágenes, uso de software especializado, elementos que hacen, que el proceso de enseñanza sea progresivo y ágil. A pesar de que estamos en la digitalización global se observó dificultades en la mayoría de la muestra para el manejo de estos recursos. Lo que permite inferir que aún no logran obtener el máximo provecho, quizá porque todavía no han adquirido técnicas de estudio acordes al nivel que están cursando; algunos parecieran en

proceso de adaptación a la vida universitaria. Por ello, se recomienda no brindar demasiada información, pero si usar diferentes formatos, verbal, analítico, videos, gráficos, y organizar una hiper vinculación adecuada para no perderse.

Para el caso de este trabajo resultó de suma importancia la incorporación de animaciones desde applets de GeoGebra online porque les permitió ver con claridad el recorrido de una curva dependiendo de su parámetro. Lo que facilitó su comprensión a diferencia del estudio del tema basados únicamente en los libros impresos o el uso del tablero en el salón de clase. Sin embargo, se resalta que la herramienta tecnológica, por sí sola, no contribuye a mejorar ni el proceso de aprendizaje ni el de enseñanza. Por lo que el docente juega un papel fundamental como guía y orientador en su uso; es el profesor el primero en asistir y estimular la exploración, visualización e indicar diferentes opciones de uso de los recursos hipermedia para resolver los problemas planteados.

CONTRIBUCION DE LOS AUTORES

EMN dirigió y desarrolló el proyecto de investigación, así como la organización del presente manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente (EMN), previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Angulo, J. (2012). *Variable compleja*: *Resolución de problemas y aplicaciones.* Ed. Paraninfo S.A. Madrid, España.

Blomhøj, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* National Center for Mathematics Education, 145-159. Suecia

Blum, W. & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Hamburg, *1 (1),* 45-58.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems. En: Haines, C. et al. (ed.). *Mathematical Modelling:* Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 222-231

Catsigeras, E. (2006). *Funciones de variable compleja*. Ed., universidad de la República de Uruguay. Uruguay.

Mateus-Nieves, E. & Hernández, W. (2021). Modelización de integrales impropias, un estudio de caso. *Acta Scientiae. Canoas, 23(1),* 1-17.

Mateus-Nieves, E. (2022a). Modelización del grupo fundamental de un nudo como estrategia para establecer la estructura de una superficie. *Bolema, Rio Claro (SP), 36(73)*, 753-776.

Mateus-Nieves, E. (2022b). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema, Rio Claro (SP*), *35(71),* 1593-1615. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17.

Mateus-Nieves, E. (2023a). *Del Cálculo Infinitesimal a las Matemáticas Modernas***.** Ed. IOLE. ISBN: 978-65-85212-61-8. Oct de 2023. Rio do Sul, Brasil.

Mateus-Nieves, E. (2023b). Trigonometry vs. Trigonometric Integration. *Acta Scientiae. Canoas, 25(3),* 92-119.

Pérez, F. (2004). *Curso de Análisis Complejo.* Ed. universidad de Granada, España

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, *9 (46),* 75-87. México.