

Evaluación del razonamiento algebraico de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria

María Burgos^a 

Nicolás Tizón-Escamilla^a 

María del Mar López-Martín^b 

^a Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España

^b Universidad de Almería, Departamento de Educación, Almería, España

RESUMEN

Contexto: Diversas investigaciones señalan la importancia de desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos y extenderse durante la formación académica. **Objetivos:** Evaluamos el razonamiento algebraico mostrado por estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en la resolución de problemas que implican patrones, funciones, ecuaciones y sistemas de ecuaciones. **Diseño:** Adoptamos un enfoque metodológico que combina análisis cualitativo y cuantitativo. Analizamos las resoluciones de estudiantes a cuatro problemas, uno por cada dimensión del álgebra escolar previamente mencionada. **Escenario y participantes:** Participaron 235 estudiantes de los tres primeros cursos de secundaria (12-15 años) procedentes de centros públicos de las provincias de Almería, Granada y Jaén (España). **Recopilación y análisis de datos:** Se realizó un análisis de contenido de las producciones de los estudiantes y un tratamiento estadístico de los datos para examinar tendencias en el desarrollo del razonamiento algebraico y el grado de corrección en función del curso. **Resultados:** Los resultados mostraron que, aunque existieron diferencias de rendimiento en función del problema tratado, los estudiantes tuvieron dificultades para resolver con éxito las tareas, usando con mayor frecuencia estrategias de carácter pre-algebraico. También se observó un incremento progresivo del razonamiento algebraico empleado por el alumnado según avanza el curso escolar, así como una relación positiva entre el nivel de razonamiento algebraico y el grado de corrección de las respuestas, especialmente en problemas que implican funciones y ecuaciones de tipo algebraico. **Conclusiones:** Nuestros hallazgos subrayan la importancia de diseñar tareas que promuevan el uso explícito del razonamiento algebraico desde los primeros cursos.

Palabras clave: razonamiento algebraico; Educación Secundaria Obligatoria; patrones; funciones; ecuaciones.

Assessment of algebraic reasoning of students in secondary education

ABSTRACT

Background: Various investigations highlight the importance of developing algebraic reasoning from the earliest educational levels and extending it throughout

Corresponding author: Nicolás Tizón-Escamilla. Email: tizon@ugr.es

academic education. **Objectives:** We evaluated students' algebraic reasoning in compulsory secondary education as they solved problems involving patterns, functions, equations, and systems of equations. **Design:** We adopted a methodological approach that combines qualitative and quantitative analyses. We analysed students' solutions to four problems, one for each of the previously mentioned dimensions of school algebra. **Setting and participants:** 235 students of the first three years of secondary education (12–15 years) from public schools in the provinces of Almería, Granada, and Jaén (Spain) participated. **Data collection and analysis:** A content analysis of students' productions and a statistical treatment of the data were conducted to examine trends in the development of algebraic reasoning and the degree of correction across school grades. **Results:** Although performance varied by problem, students had difficulty solving the tasks, most often using pre-algebraic strategies. There was also a progressive increase in students' algebraic reasoning throughout the school year, along with a positive relationship between the level of algebraic reasoning and the correctness of answers, especially in problems involving algebraic functions and equations. **Conclusions:** Our findings underscore the importance of designing tasks that promote the explicit use of algebraic reasoning from the earliest grades.

Keywords: Algebraic Reasoning; Compulsory Secondary Education; Patterns; Functions; Equations.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra es un aspecto clave dentro de la educación matemática, ya que proporciona la base para contenidos matemáticos de nivel superior y es esencial en muchos campos STEM (Veith et al., 2023). Diversas perspectivas teóricas recomiendan atender al razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos, con la intención de fortalecer la actividad matemática escolar y facilitar el tránsito a las matemáticas en educación secundaria (Godino et al., 2014; Kieran, 2022; Radford, 2018). Las recientes propuestas curriculares se han hecho eco de esta inquietud (ACARA, 2014; CCSSI, 2015; MEFP, 2022a). Así, el razonamiento algebraico aparece recogido en los currículos de educación primaria a través del reconocimiento de relaciones de dependencia entre variables, la expresión de generalidades, la modelización de diferentes fenómenos y la manipulación de representaciones simbólicas involucradas (ACARA, 2014; CCSSI, 2015; MEFP, 2022a). Esta perspectiva multidimensional continúa definiendo el álgebra en educación secundaria, de manera que, en el currículo español, el sentido algebraico contempla el estudio de patrones y regularidades, la determinación de la regla de formación en casos sencillos, el estudio y expresión simbólica de relaciones lineales, la solución de ecuaciones y sistemas lineales, el concepto de variable y el estudio y comparación de relaciones lineales mediante diferentes modos de representación (MEFP, 2022b).

Aunque existen investigaciones centradas específicamente en los niveles intermedios de educación secundaria (Durán Salas, 2023; Paoletti et al., 2021; Papadopoulos y Thoma, 2023; Pitta-Pantazi et al., 2020; Utami et al. 2023) en las últimas décadas se observa un desplazamiento en la investigación hacia el álgebra temprana (Ellis y Özgür, 2024). A pesar de la importancia de caracterizar las diferentes dimensiones del pensamiento algebraico (Pitta-Pantazi et al., 2020) y de reconocer de qué manera progresan los estudiantes de educación secundaria (Akkan, 2013; Chvál et al. 2021; Ellis y Özgür, 2024; Muñoz et al., 2025; Paoletti et al., 2021; Pitta-Pantazi et al., 2020; Utami et al., 2023; Zwanch, 2022), son limitados los estudios en el contexto español, que caractericen los conocimientos y dificultades de estudiantes de educación secundaria en la resolución de tareas algebraicas (Ruano et al., 2008; Socas et al., 2016).

Con este interés, nuestro objetivo es evaluar el razonamiento algebraico mostrado por estudiantes de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la resolución de problemas que implican patrones, funciones, ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Siguiendo el modelo propuesto por Godino et al. (2014), ampliado recientemente por Burgos et al. (2024), entendemos el carácter algebraico de las prácticas matemáticas de los estudiantes en términos de la presencia de determinados objetos y procesos, a saber: tipos de representaciones usadas, los diferentes grados de generalización y razonamiento funcional y el cálculo analítico involucrado. Este modelo proporciona una serie de criterios que permiten identificar prácticas puramente aritméticas y distinguirlas de sucesivos niveles de algebrización. Los niveles de razonamiento algebraico no describen perfiles cognitivos de los sujetos, esto es, no son indicativos de estadios de desarrollo cognitivo ante una clase de tareas matemáticas. La aplicación de los niveles de razonamiento algebraico a los sistemas de prácticas permite caracterizar y distinguir categorías de razonamiento algebraico, tanto desde una perspectiva institucional como personal del álgebra que no se limita al contexto de aplicación (Vergel et al., 2023).

Planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué niveles de razonamiento algebraico movilizan los estudiantes de los diferentes cursos de educación secundaria al resolver los problemas?
- ¿Existe relación entre el nivel de razonamiento algebraico y el grado de corrección al resolver los problemas?

- ¿Influye el tipo de problema (patrones, funciones, ecuaciones, sistema de ecuaciones) en los niveles de razonamiento algebraico o el grado de corrección logrados?

ANTECEDENTES

Son múltiples las investigaciones que muestran la capacidad de los estudiantes para pensar en términos algebraicos desde la educación primaria (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Blanton et al., 2015; Kieran, 2022; Kieran y Martínez-Hernández, 2022; Radford, 2018). Los estudiantes pueden razonar de manera relacional, reconocer relaciones entre los términos de las expresiones, y usar propiedades fundamentales de las operaciones para transformarlas (Wilkie y Hopkins, 2024), reconocer relaciones funcionales y justificarlas (Blanton et al., 2015; Brizuela y Earnest, 2008; Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Moreno et al., 2016), y reconocer patrones y determinar la regla general que permite construirlos (Hunter y Miller, 2022; Mulligan et al., 2020). Estas investigaciones también destacan la importancia de la intervención del docente para desarrollar el álgebra en edades tempranas. Sin embargo, “muchos intentos de preparar mejor a los estudiantes para el álgebra no han resultado en una mejora en los niveles de logro académico” (Egodawatte, 2023, p. 30) y los estudiantes de educación secundaria e incluso bachillerato aún tienen dificultades con conceptos y habilidades algebraicas (Egodawatte, 2023).

Para Pitta-Pantazi et al. (2020) el pensamiento algebraico de los estudiantes de secundaria está compuesto por cuatro dimensiones: pensamiento funcional, aritmética generalizada, modelización y demostración algebraica. Los autores consideran que, aunque el pensamiento algebraico puede incorporarse al currículo de matemáticas desde los primeros niveles, es importante considerar qué tipos de pensamiento algebraico pueden desarrollarse primero y cuáles requieren una base previa. Así, los resultados de su investigación ponen de manifiesto que los estudiantes de secundaria son capaces, en primer lugar, de realizar tareas de pensamiento funcional, como identificar patrones o encontrar relaciones funcionales. Después pueden desarrollar habilidades vinculadas a la aritmética generalizada, como identificar estructuras y generalidades de expresiones, tratar números de forma algebraica o trabajar con igualdades y desigualdades. Este desarrollo progresivo permite avanzar en la construcción de modelos, como ecuaciones, para matematizar situaciones concretas. Finalmente, estas habilidades constituyen la base para que los estudiantes elaboren argumentos sin referencia a cantidades específicas, mediante procesos matemáticos como la generalización y el cálculo sintáctico (Pitta-Pantazi et al., 2020).

Diferentes investigaciones previas se han centrado en caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes de secundaria en alguna de estas dimensiones, especialmente en el contexto funcional (Ellis y Özgür, 2024). Por ejemplo, Utami et al. (2023) analizaron el pensamiento funcional de estudiantes de secundaria (13-14 años) a través del uso de patrones. Observaron que la mayoría de los estudiantes identificaron patrones utilizando un enfoque recursivo, sin embargo, tuvieron dificultades para expresar la regla general de manera simbólica. Como en trabajos previos (Wilkie, 2016), los estudiantes que no tenían un pensamiento funcional en el nivel de correspondencia no podían producir correctamente expresiones algebraicas de generalizaciones de patrones. Además, estos estudiantes también mostraron mayores dificultades al generar patrones en problemas verbales. Similarmente, Akkan (2013) observó, en un estudio comparativo con estudiantes de primaria y secundaria (entre 10 y 15 años), que la eficacia y variedad de estrategias a la hora de generalizar patrones aumentaba a medida que el curso de los estudiantes se incrementaba, si bien las estrategias recursivas seguían siendo dominantes.

Otras investigaciones han puesto el foco en analizar cómo estudiantes de secundaria se enfrentan a tareas que involucran la modelización de situaciones mediante ecuaciones e inecuaciones o la resolución de estas. En una investigación con estudiantes de 12 y 13 años, Chvál et al. (2021) encontraron que la mitad de los participantes cometían errores al resolver ecuaciones lineales de primer grado, destacando como errores principales no aplicar bien la jerarquía de las operaciones o dificultades al despejar. Van Amerom (2003) observó que estudiantes de primaria y secundaria tenían problemas al modelizar situaciones contextualizadas empleando símbolos literales para la formulación de las ecuaciones. En ese sentido, investigaciones como las de Johanning (2004) o Zwanch (2022) señalan que los estudiantes de educación secundaria tienden a usar estrategias aritméticas de ensayo y error para resolver problemas contextualizados que pueden ser modelizados mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones. La mayoría de las investigaciones que examinan qué significados atribuyen a las inecuaciones lineales estudiantes de educación secundaria o nivel universitario evidencian que estos aplican las mismas técnicas algebraicas para resolver este tipo de inecuaciones que para resolver ecuaciones (Muñoz et al., 2025; Paoletti et al., 2021). Los estudiantes ven el signo “mayor que” o “menor que” como nexo entre dos expresiones algebraicas, por lo que, incluso cuando resuelven correctamente la inecuación, no interpretan adecuadamente el resultado ni reflexionan sobre la coherencia de la solución con las condiciones del problema. En otros casos, no conciben la solución como un intervalo de valores, restringiéndose sólo a un valor numérico

como solución (Paoletti et al., 2021). Para autores como Muñoz et al. (2025) estas dificultades se explican, en gran medida, por un enfoque de la enseñanza que prioriza el cálculo sintáctico sin considerar su articulación con otros registros de representación, como puede ser el gráfico.

MODELO DE NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

Adoptando la perspectiva pragmática del Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2024), se concibe el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas implicadas en la resolución de tareas abordables desde la educación primaria en las que intervienen objetos y procesos algebraicos (Godino et al., 2014). Se consideran tipos de objetos algebraicos: a) *relaciones binarias* de equivalencia o de orden y sus respectivas propiedades; b) *operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos diversos; c) *funciones*, sus operaciones y propiedades; d) *estructuras* (semigrupo, grupo, etc.), sus tipos y propiedades. Estos objetos emergen de las prácticas por medio de procesos de *generalización* (identificación de objetos intensivos o generales, es decir, clases de objetos extensivos o particulares), *unitarización* (el intensivo pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, una entidad unitaria), *representación* (materialización de la entidad unitaria) y *cálculo sintáctico*. Godino et al. (2014) proponen un modelo de RAE que permite caracterizar el nivel de razonamiento algebraico puesto en juego en una actividad matemática. Recientemente, Burgos et al. (2024) amplían el modelo de RAE de Godino et al. (2014) considerando diferentes grados de sofisticación en rasgos esenciales del razonamiento algebraico:

- *Generalización*. La generalización como proceso implica: identificar elementos comunes a todos los casos, extender el razonamiento por encima del rango en el que se originó, obtener resultados más amplios que los casos particulares y proporcionar una expresión directa que permita generar cualquier término (Radford, 2018). Estas características permiten diferenciar estratos de generalización: *pre-algebraica*, cuando no hay deducción ni tratamiento analítico; *proto-algebraica*, cuando lo que se deduce, se expresa a través de instancias particulares de la variable y se observan rasgos analíticos incipientes; *algebraica*, cuando la regla general se usa de manera analítica para deducir formas canónicas.
- *Razonamiento estructural*. Una estructura algebraica como una entidad sistémica determinada por: objetos matemáticos, relaciones binarias

entre ellos, operaciones entre objetos, propiedades de las relaciones y de las operaciones y correlaciones entre relaciones y operaciones. De esta forma, el razonamiento estructural, entendido como razonar con y sobre estas estructuras admite diferentes grados, según la generalidad de los objetos que intervienen y el carácter local o global del uso de propiedades y relaciones.

- *Razonamiento funcional.* El razonamiento funcional supone la construcción, descripción y razonamiento con funciones y sus elementos (variable, dominio, imagen, regla de correspondencia). Implica la expresión de relaciones entre cantidades que varían de forma conjunta y el uso de tales expresiones para analizar el comportamiento de una función. Burgos et al. (2024) establecen estratos de razonamiento funcional en base a: 1) grado de intensión (reconocimiento de la relación como conjunto de instancias particulares o como regla general) y carácter contextual o no de la regla, 2) tipo de relación funcional (patrón recursivo, covariación, correspondencia), y 3) tratamiento analítico implicado en su posible transformación.
- *Analiticidad.* El *razonamiento analítico* se concibe en términos del carácter operatorio de objetos indeterminados a través de la aplicación de propiedades de las operaciones. Sustenta las transformaciones y aspectos de equivalencia de ecuaciones, inecuaciones y su resolución, si bien no todas las ecuaciones requieren el mismo tratamiento. Las ecuaciones del tipo $Ax + B = C$ (ecuaciones aritméticas) pueden ser resueltas mediante la inversión de las operaciones, mientras que aquellas del tipo $Ax + B = Cx + D$ (ecuaciones algebraicas) requieren de un tratamiento de la incógnita. Además, mientras que una ecuación puede resolverse tratando el símbolo literal como una incógnita, en una inecuación la letra desempeña el papel de una variable, lo que supone un grado superior de complejidad analítica (Burgos et al., 2024).

Tabla 1

Descripción del modelo de niveles de RAE ampliado (Burgos et al., 2024)

Nivel	Características esenciales
<i>Actividad pre-algebraica</i>	
0.I	• <i>Generalización aritmética.</i> Se detecta una relación y se aplica de manera local, sólo a algunos casos. • <i>Razonamiento recursivo particular.</i> Se conceptualiza un patrón recursivo como secuencia de casos particulares, sin reconocer la

	regularidad que define el patrón como una generalidad en forma unitaria.
	• Operaciones aritméticas con intensivos de grado 1 (números naturales).
0.II	• <i>Generalización aritmética sofisticada.</i> Se reconoce una mirada estructural de las relaciones que permite utilizar la característica común (la generalidad) para poder determinar cualquier término, aunque no se expresa explícitamente la generalidad. • <i>Razonamiento funcional particular.</i> Se concretiza la relación funcional como un conjunto de relaciones particulares entre los valores específicos correspondientes. • <i>Razonamiento pseudo-estructural.</i> Las relaciones numéricas pretenden expresar generalidad y las expresiones con números se analizan por su estructura, no únicamente para operar con ellas.
Actividad proto-algebraica primaria	
1.I	• <i>Generalización factual.</i> La generalidad queda determinada a través del esquema operacional, la descripción de procedimientos o acciones que se realizan potencialmente de manera reiterativa, sin que lo indeterminado se incorpore al discurso • <i>Razonamiento estructural incipiente con intensivos de grado 1.</i> Aparecen involucradas propiedades de operaciones y relaciones con clases de números naturales, que se aplican de manera local, sin que aparezca una correlación entre ambas.
1.II	• <i>Razonamiento recursivo general.</i> Se explicita un patrón recursivo como regla general entre valores sucesivos arbitrarios sin referencia a casos particulares • <i>Razonamiento estructural con intensivos de grado 1.</i> Las propiedades de operaciones y relaciones con clases de números naturales se aplican de manera general y pueden estar correlacionadas.
Actividad proto-algebraica avanzada	
2.I	• <i>Generalización contextual.</i> Se deduce y expresa una regla general, nombrándose lo indeterminado mediante términos locativos y genéricos, aunque vinculados al contexto. • <i>Razonamiento funcional incipiente.</i> Se reconoce la relación general de forma cualitativa o a través de un conjunto de casos, pero sin llegar a dar una expresión de la transformación entre las cantidades específicas. • <i>Resolución de ecuaciones del tipo $Ax + B = C$.</i>

- 2.II
- *Generalización simbólico-contextual*. Se deduce y expresa la regla general en lenguaje simbólico, pero permanece vinculada al contexto, sin reconocer su forma canónica.
 - *Razonamiento funcional parcial*. Se identifica la relación funcional y se expresa la transformación entre cantidades específicas, sin articular dominio, imagen y regla de correspondencia.
 - *Resolución de inecuaciones del tipo $Ax + B < C$* .

Actividad algebraica

- 3.I
- *Generalización simbólica*. La regla general se reconoce como una nueva entidad unitaria emergente que se materializa simbólicamente y admite transformaciones en formas equivalentes o canónicas de su representación.
 - *Razonamiento funcional completo*. Se reconoce y hace explícita de manera simbólica la relación general de correspondencia entre cantidades arbitrarias. Dominio, imagen y regla de correspondencia quedan perfectamente determinados y es posible transformar la regla para obtener expresiones equivalentes.
 - *Resolución de ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$* .
- 3.II
- *Razonamiento funcional sistémico*. La función interviene como objeto, con sus propias propiedades y múltiples representaciones. Se reconocen y aplican de manera local las propiedades de operaciones y relaciones de funciones.
 - *Resolución de ecuaciones del tipo $Ax + B < Cx + D$* .
-

La Tabla 1 recoge las principales características de cada subnivel de dicho modelo. El lector interesado, puede encontrar en Anexo ejemplos de respuestas de estudiantes a uno de los problemas propuestos en la investigación y la asignación de los niveles de RAE.

METODOLOGÍA

Dado que la finalidad de la investigación es evaluar el razonamiento algebraico (conocimientos y niveles de RAE) que movilizan estudiantes de los tres primeros cursos de ESO en la resolución de diferentes problemas algebraicos, adoptamos un enfoque metodológico que combina técnicas propias del análisis cualitativo y del análisis cuantitativo (Leavy, 2022).

Participaron 235 estudiantes de ESO procedentes de centros públicos de las provincias de Almería, Granada y Jaén. Los centros y escolares fueron

seleccionados según su disponibilidad e interés mostrado por tutores en participar en la investigación. Se procuró además que hubiera estudiantado de cada curso en cada uno de los centros de manera que participaron un total de 9 grupos diferentes de estudiantes: 91 estudiantes de 1º (12-13 años), 47 de 2º (13-14 años), 97 de 3º (14-15 años). La diferencia de tamaño de la muestra en 2º frente a 1º y 3º se debe tanto a que los grupos eran menos numerosos (18 en uno y 23 en los otros dos) como a que en uno de ellos y por motivos ajenos a la investigación, solo se recogió los datos de seis estudiantes.

La recopilación de los datos se llevó a cabo durante una sesión de 60 minutos, en las últimas semanas del primer trimestre. La participación fue voluntaria y se garantizó en todo momento la confidencialidad y anonimato de los datos recogidos. Se informó a los estudiantes de la importancia de su interés en la resolución y de que las respuestas no tendrían repercusión en sus calificaciones. Cuando se tomaron los datos, los estudiantes de 1º no habían recibido ninguna formación sobre álgebra. Los conocimientos previos de los estudiantes de 2º se resumían a los adquiridos en 1º sobre expresiones algebraicas y ecuaciones de primer grado. De igual forma, los conocimientos de los estudiantes de 3º provenían de cursos previos: ecuaciones de primer y segundo grado, concepto de función, variable dependiente e independiente, expresión algebraica y representación de funciones (afines entre otras).

Instrumento de recogida de datos

Para la recogida de datos se elaboró el conjunto de problemas incluido en la Figura 1. El instrumento está diseñado para activar distintos aspectos del RAE, atendiendo a los rasgos esenciales de generalización, razonamiento funcional y analiticidad establecidos en el marco teórico.

Figura 1

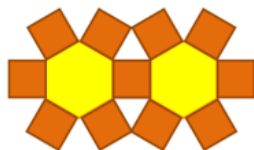
Instrumento de recogida de datos

Problema 1. La cadena de margaritas

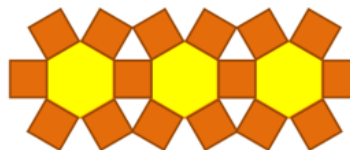
Julio hizo una cadena de margaritas con los bloques del patrón:



1 flor



2 flores



3 flores

- ¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 7 flores? Explica tu respuesta.
- ¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 20 flores? Explica tu respuesta.
- Para cualquier número de margaritas que te den, ¿cómo calculas el número total de bloques que necesitará Julio para su cadena? **Explica** tu respuesta.
- ¿Es posible hacer una cadena de margaritas que utilice exactamente 100 cuadrados? **Explica** tu respuesta.

Problema 2. Taburetes y sillas

Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay? **Explica** tu respuesta.

Problema 3. El trato.

Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por ayudarla con el jardín. Le ofrece dos tratos:

- trato 1: "te doblo el dinero que tienes"; o
- trato 2: "te doy el triple de tu dinero y tú me das 7 euros".

¿Qué trato debería escoger? **Justifica** tu respuesta.

Problema 4. Camino al colegio

Andrés va a un colegio que está a 480 m de su casa. En el camino se para a recoger a sus amigos Víctor y Elena. Primero se detiene a recoger a Víctor. Después recorren 52 m. A continuación, recogen a Elena. El camino que les queda hasta el colegio desde ese punto supera en 20m al triple de la distancia ya recorrida. ¿Cuál es la distancia entre la casa de Elena y el colegio? **Explica/muestra** como has obtenido la distancia.

El problema 1, adaptado de Wilkie (2016), pretende evaluar el pensamiento funcional por medio de patrones de crecimiento: a) y b) persiguen extender el patrón de crecimiento (generalización cercana y lejana,

respectivamente), c) busca que los estudiantes deriven la regla general que describe la relación entre el número de hexágonos y cuadrados de la cadena de flores y su posición en la secuencia; d) profundiza en el análisis del patrón por medio de la relación inversa. El Problema 2, tomado de Godino et al. (2014), a priori, lleva a plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, si bien es esperable soluciones de diferentes niveles de RAE al mismo. El Problema 3, está adaptado de Brizuela y Earnest (2008) y ha sido empleado previamente en trabajos que investigan el pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria (Moreno et al., 2016; Pinto y Cañadas, 2021). En dicho problema se deben comparar dos funciones (lineal y afín) que relacionan el dinero que tiene Juan (variable independiente) con el dinero que recibe (variable dependiente) según dos tratos distintos. Finalmente, el Problema 4 está tomado del libro de texto de Matemáticas de 5º de primaria de la Editorial SM (Morales et al., 2018). El interés de este problema reside en que, aunque cabe esperar una modelización mediante una ecuación de naturaleza algebraica ($Ax + B = Cx + D$), es posible que los estudiantes empleen estrategias proto-algebraicas, especialmente un razonamiento estructural incipiente (Burgos et al., 2024) sobre las relaciones dadas en el problema, así como el uso de diagramas.

Análisis

Dos de los investigadores realizaron de manera independiente el análisis de contenido de la mitad de las producciones de los estudiantes, identificando tipos de respuestas y de errores en cada uno de los problemas y asignando grado de corrección y nivel de RAE a las prácticas matemáticas. Después se compartieron y discutieron los resultados, acordando la categorización y valoración. En caso de falta de consenso (algo que solo se produjo en la asignación del nivel de RAE en algunas soluciones de los estudiantes), se contaba con el apoyo de un investigador externo experto en la temática. Tras ello, se completó el análisis del resto de respuestas.

Para valorar el grado de corrección de las respuestas, se consideraron las siguientes categorías, establecidas *a priori*: *correcta*, el resultado es correcto y su justificación es adecuada; *parcialmente correcta*, el resultado es correcto, pero no lo justifica o lo hace de manera incompleta; *incorrecta*, en otro caso.

Por otro lado, los niveles de RAE se asignaron a las resoluciones globales de cada estudiante a cada uno de los problemas, considerando el nivel más alto activado en su respuesta, de acuerdo con los establecidos en el modelo ampliado de RAE (Burgos et al., 2024). Estos niveles se asignaron a aquellas

soluciones en las que aparecía explícita una estrategia que permitía valorar el carácter algebraico de la práctica matemática desarrollada.

Tras la codificación de las respuestas a partir del análisis cualitativo, se llevó a cabo el tratamiento estadístico de los datos con el fin de examinar posibles tendencias en el desarrollo del razonamiento algebraico y el grado de corrección en función del curso escolar, así como la posible relación existente entre dichas variables. Para ello, se asignaron valores a las categorías de corrección: 0 no contesta, 1 incorrecta, 2 parcialmente correcta, 3 correcta; así como a los niveles de razonamiento algebraico: 0 sin respuesta (SR), 1 no codificable en ningún nivel (NoAp), y a partir del valor 2 se codificaron los distintos niveles de razonamiento algebraico (de 0.I a 3.II), según el modelo teórico asumido (Tabla 1). Esta codificación refleja la naturaleza jerárquica del modelo y permite su tratamiento como variable ordinal en los análisis estadísticos, en línea con investigaciones de enfoque mixto que combinan codificación cualitativa y análisis cuantitativo (e.g., Leavy, 2022).

En el análisis, se emplearon pruebas no paramétricas con finalidades distintas y complementarias. Por un lado, la aplicación de la prueba de Jonckheere-Terpstra (J-T) persigue comprobar si existe una tendencia creciente sistemática del nivel de RAE o el grado de corrección según el curso escolar. Por otro lado, la relación entre el nivel de RAE y el grado de corrección se analizó mediante el coeficiente de correlación ordinal Tau-b de Kendall, que permiten determinar la intensidad de la asociación teniendo en cuenta la escala ordinal de los datos y la presencia de empates.

RESULTADOS

Grado de corrección en las respuestas del estudiantado

La Tabla 2 ofrece una visión general del éxito alcanzado por los estudiantes en la resolución de los problemas.

Tabla 2

Distribución de respuestas según grado de corrección y curso

Curso	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	Sin respuesta	Total
1º ESO	142 (22,29%)	50 (7,85%)	307(48,19%)	138 (21,66%)	637
2º ESO	76 (23,10%)	21 (6,38%)	105 (31,91%)	127 (38,60%)	329
3º ESO	243 (35,79%)	55 (8,10%)	295 (43,45%)	86 (12,67%)	679
Total	461	126	707	351	1645

Nota: Porcentaje sobre el total de respuestas por curso.

Sólo un 28,02% de las respuestas analizadas fueron correctas. El mayor porcentaje de respuestas erróneas se encontró en 1º ESO, aunque 2º ESO contó con la tasa de respuestas en blanco más elevada. En 3º ESO se aprecia una mayor proporción de respuestas correctas y una disminución considerable de los problemas sin contestar. Sin embargo, esta mayor disposición para enfrentarse a los problemas no garantizó su éxito, situándose el porcentaje de respuestas incorrectas en el 43,45%.

Tabla 3

Distribución (en porcentaje) del grado de corrección según problema y curso

		1º ESO (n=91)	2º ESO (n=47)	3º ESO (n=97)	Total (n=235)
P1a	C	28,6	38,3	45,4	37,4
	PC	2,2	0,0	2,1	1,7
	I	59,3	36,2	52,6	51,9
	SR	9,9	25,5	0,0	8,9
P1b	C	22,0	27,7	37,1	29,4
	PC	2,2	0,0	0,0	0,9
	I	60,4	40,4	57,7	55,3
	SR	15,4	31,9	5,2	14,5
P1c	C	7,7	12,8	24,7	15,7
	PC	3,3	2,1	7,2	4,7
	I	62,6	29,8	49,5	50,6
	SR	26,4	55,3	18,6	28,9
P1d	C	12,1	14,9	26,8	18,7
	PC	29,7	12,8	28,9	26,0
	I	22,0	27,7	30,9	26,8
	SR	36,3	44,7	13,4	28,5
P2	C	63,7	55,3	72,2	65,5
	PC	2,2	6,4	2,1	3,0
	I	30,8	12,8	15,5	20,9
	SR	3,3	25,5	10,3	10,6
P3	C	20,9	10,6	30,9	23,0
	PC	15,4	14,9	14,4	14,9
	I	56,0	40,4	49,5	50,2
	SR	7,7	34,0	5,2	11,9
P4	C	1,1	2,1	13,4	6,4
	PC	0,0	8,5	2,1	2,6
	I	46,2	36,2	48,5	45,1
	SR	52,7	53,2	36,1	46,0

Nota: C, respuestas correctas; PC, respuestas parcialmente correctas; I, respuestas incorrectas; SR, sin respuesta.

La información recogida en la Tabla 3 muestra cierta relación entre el curso y el grado de corrección logrado, aunque no lineal ni de la misma forma en todos los problemas. De manera específica, aunque globalmente más de la mitad de los estudiantes respondieron de manera incorrecta a los tres primeros apartados del Problema 1 (P1a generalización cercana, P1b generalización lejana, P1c obtención de la regla general), los resultados fueron mejores en 2ºESO que en 1ºESO y 3ºESO. En la mayoría de los casos, los estudiantes consideraron que, para obtener el número de cuadrados necesarios para un determinado número de flores, debía multiplicarse dicho número por seis, sin identificar los cuadrados compartidos en el patrón. En el último apartado (P1d) disminuyó el porcentaje de respuestas incorrectas a favor de las parcialmente correctas. En este caso, se basaron en que según el apartado b, eran necesarios 101 cuadrados para las 20 flores, por lo que no sería posible una cadena con 100 cuadrados.

El Problema 2 (taburetes y sillas) tuvo la mayor tasa de respuestas correctas, tanto de manera global (65,5%) como en cada curso, y la menor de incorrectas (tanto globalmente como en 2º y 3º). El porcentaje de respuestas en blanco en este problema también fue de los más bajos. En las respuestas erróneas, y de forma similar en los distintos cursos, fue frecuente que los estudiantes determinaran el número de sillas y taburetes que ajustaban a 20 patas sin tener en cuenta el total de asientos, o bien que dividieran 20 entre 4 y entre 3, para asumir que los cocientes daban los números de sillas y taburetes, respectivamente. A diferencia de los resultados en el Problema 1, en este caso, el curso con menor porcentaje de respuestas correctas fue 2º ESO, que también tuvo el menor porcentaje de respuestas incorrectas, y mayor sin responder (algo que se reiteró en varios de los ítems analizados).

Similarmente, la mitad de los estudiantes respondieron de manera incorrecta al Problema 3 (el trato), siendo menor el porcentaje de respuestas incorrectas (aunque mayor el de sin responder) en 2º curso que en los otros dos. Los estudiantes se inclinaron por uno de los tratos (usualmente el trato 1) en base a uno o varios valores particulares de la variable independiente, sin reconocer la dependencia de la cantidad recibida con cada trato respecto de la cantidad de dinero inicial ni describir dicha relación funcional.

Los resultados obtenidos en el Problema 4 (camino al colegio) fueron especialmente alarmantes, pues un 91,1% de los estudiantes no respondieron o lo hicieron de manera incorrecta. Los estudiantes mostraron dificultades para interpretar las relaciones entre las distancias establecidas en el problema y reconocer la incógnita. Por ejemplo, consideraron que 480 metros era la

distancia entre la casa de Andrés y Víctor, interpretaron de manera incorrecta "supera en 20m" o bien consideraron que la distancia que se triplica era la de 52m.

Nivel de razonamiento algebraico involucrado en las resoluciones

La Tabla 4 muestra la frecuencia de prácticas del estudiantado con un determinado nivel de RAE según el curso.

Tabla 4

Distribución de respuestas según grado de corrección y curso

Curso	n*	Niveles de RAE							
		0.I	0.II	1.I	1.II	2.I	2.II	3.I	NoAp**
1º ESO	300	47%	11%	10%	1%	16%	5%	0%	10%
2º ESO	122	39%	14%	9%	7%	11%	6%	0%	15%
3º ESO	339	35%	5%	12%	4%	17%	11%	10%	5%
Total	761	41%	9%	11%	3%	16%	8%	4%	9%

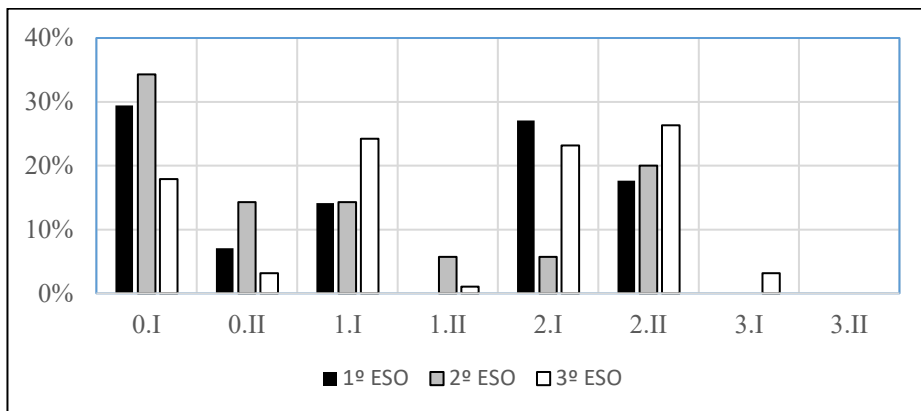
Nota: *Número de estudiantes por curso que han respondido a algún apartado del problema 1, 2, 3 o 4. **Respuestas sin RAE asignado por no incluir estrategia explícita.

Se aprecia que la mitad de las prácticas matemáticas de los estudiantes tuvieron carácter pre-algebraico (niveles 0.I y 0.II), siendo menor su presencia en tercero que en los cursos previos. Las prácticas de naturaleza proto-algebraica primaria (niveles 1.I y 1.II) son inferiores en todos los cursos a las proto-algebraica avanzadas (niveles 2.I y 2.II) y fueron mínimas las prácticas algebraicas (5% del total), sólo registradas en 3ºESO (10% de las prácticas en este curso).

Como muestra la Figura 2 un porcentaje considerable de las prácticas desarrolladas por los estudiantes para responder al Problema 1 correspondieron a niveles proto-algebraicos (59% en 1º ESO, 46% en 2º ESO, 74% en 3º ESO) siendo superior en los tres cursos las de nivel avanzado (2.I y 2.II). En las prácticas de nivel 1.I, los estudiantes llegaron a generalizar el esquema operacional que permite determinar el número de cuadrados necesarios para una flor dada, ligado siempre al valor numérico particular (generalización factual, según Tabla 1). En las prácticas de nivel 2.I, obtuvieron la regla general (correcta o incorrecta) que permite determinar el número de cuadrados, expresada en términos genéricos pero vinculada al contexto (generalización contextual). En las prácticas de nivel 2.II, el alumnado dedujo la regla general en lenguaje simbólico conservando la dimensión espacio-contextual y sin operar con el símbolo literal para obtener formas canónicas de la regla (generalización simbólico-contextual).

Figura 2

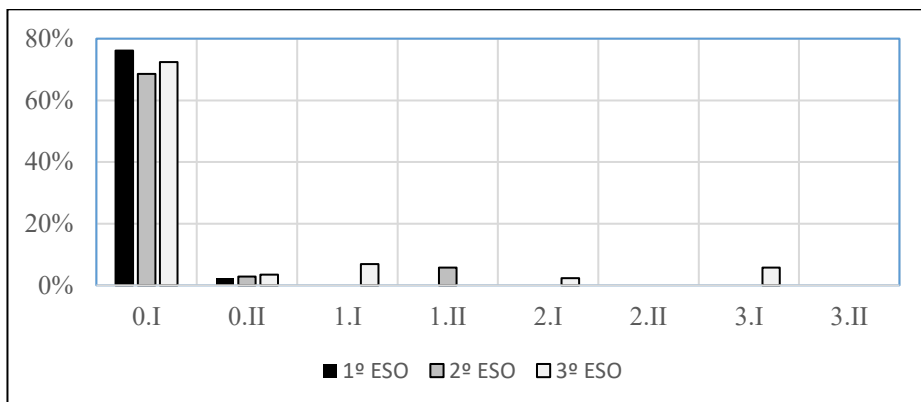
Niveles de RAE en el Problema 1



Las soluciones propuestas al Problema 2 correspondieron esencialmente al nivel 0.I (73% del total), con valores similares en todos los cursos (Figura 3). En general, los estudiantes resolvieron el problema mediante estrategias de ensayo-error, operando con los números sin evidenciar tratamiento estructural o uso de relaciones o propiedades entre estos (algo observado en las escasas respuestas de niveles proto-algebraicos incipientes). Sólo en el tercer curso, algunos estudiantes plantearon y resolvieron el sistema de ecuaciones asociado (nivel 3.I).

Figura 3

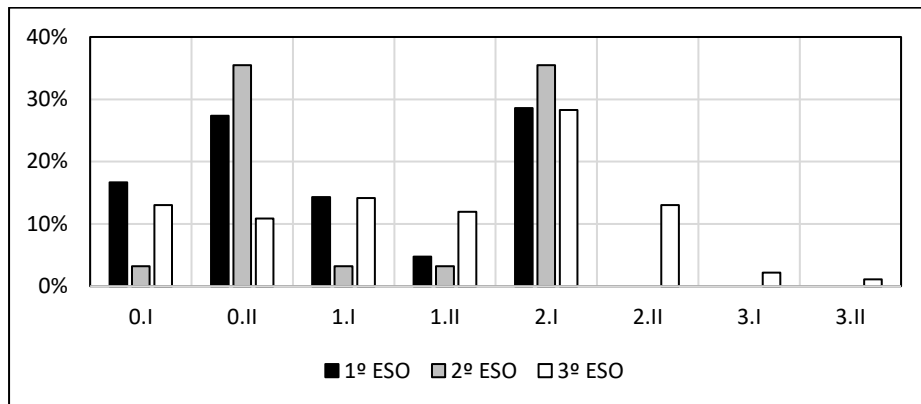
Niveles de RAE en el Problema 2



En el caso del Problema 3 (Figura 4), se observó mayor diversidad de niveles de RAE en las prácticas, así como un descenso progresivo en la frecuencia de prácticas pre-algebraicas y un aumento de las proto-algebraicas, especialmente las de nivel 2.I, a medida que se avanza en los cursos.

Figura 4

Niveles de RAE en el Problema 3



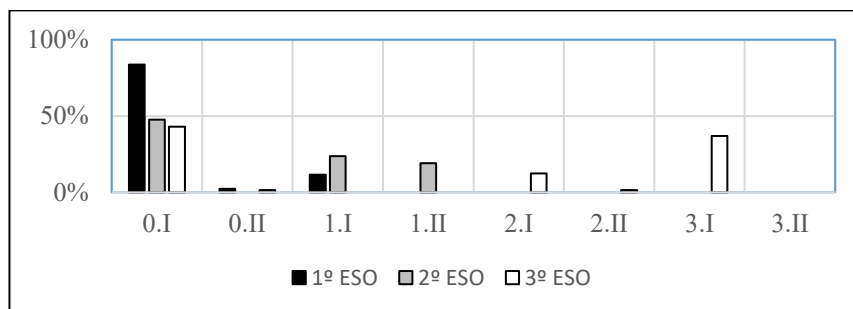
En las prácticas de nivel 0.II (21% del total) los estudiantes se fijaban en valores particulares de las variables para decidir el mejor trato mostrando un razonamiento funcional particular (ver Tabla 1). En aquellas de nivel 2.I (29% del total), se observó un razonamiento funcional incipiente (Tabla 1), esto es, los estudiantes reconocieron la dependencia entre las variables dinero que tiene Juan y dinero que recibe, determinando a partir de qué valor es mejor el trato 2, si bien no describieron las relaciones funcionales explícitamente (algo que solo se observó en las escasas prácticas de nivel 3.I o 3.II, en 3ºESO).

Finalmente, la Figura 5 muestra que la mayoría de las prácticas desarrolladas por los estudiantes para resolver el Problema 4 correspondieron a un nivel pre-algebraico (59% del total), si bien su frecuencia disminuye conforme aumenta el curso (86% 1º ESO, 48% 2º ESO, 45% 3º ESO). En estas prácticas, los estudiantes operaron con cantidades numéricas para llegar a resultados siempre incorrectos al no interpretar adecuadamente las distancias y sus relaciones. En las prácticas de nivel 1.I, recurrieron a la conversión entre el lenguaje natural y el diagramático en un intento por modelizar la situación que tampoco les permitió llegar a la solución correcta. En aquellas prácticas de nivel 1.II, los estudiantes se apoyaron en el registro diagramático para plantear simbólicamente una expresión algebraica incompleta (donde se reconoce la

incógnita) o una ecuación que no llegaron a resolver. Las prácticas de nivel proto-algebraico avanzado correspondieron a estudiantes de 3º ESO, quienes plantearon y resolvieron una ecuación del tipo $Ax+B=C$ incorrecta, y sólo aquellos que plantearon y resolvieron una ecuación del tipo $Ax+B=Cx+D$ pertinente alcanzaron el nivel 3.I.

Figura 5

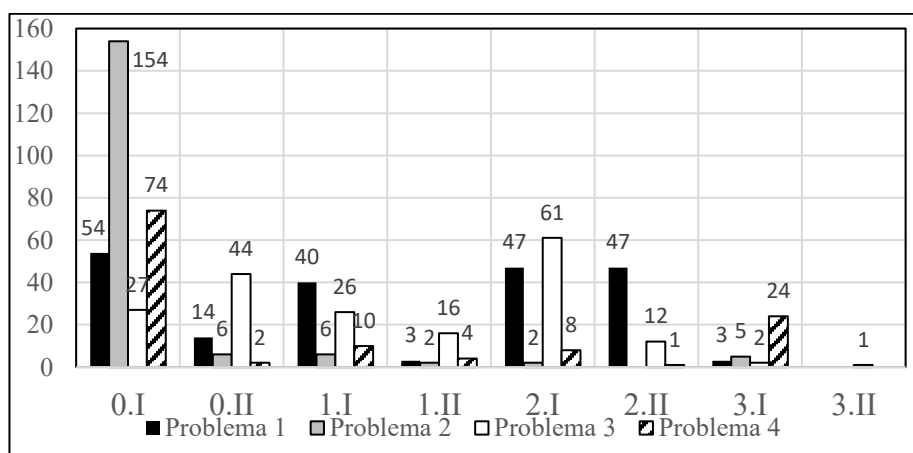
Niveles de RAE en el Problema 4



A modo de síntesis, la Figura 6 recoge la frecuencia de prácticas de cada nivel de RAE en cada problema, poniendo de manifiesto la evidente concentración en los niveles pre-algebraicos, así como cierta presencia de prácticas de nivel proto-algebraico avanzado en los problemas vinculados al razonamiento funcional (Problema 1 y Problema 3).

Figura 6

Concentración de niveles de RAE según problema



Análisis de la relación entre grado de corrección y curso escolar

Para valorar el avance del grado de corrección en las resoluciones (de manera general y en cada problema concreto) con relación al curso educativo, se aplicó el test de tendencia de Jonckheer-Terpstra. La media global del grado de corrección sobre todas las tareas por estudiante fue de 1,42 (DE = 0,67), lo que refleja un desempeño predominantemente bajo, aunque con variabilidad entre sujetos.

Tabla 5

Prueba de Jonckheere-Terpstra considerando la media del grado de corrección

	Media Grado de Corrección
Número de niveles en Curso	3
N	235
Estadístico J-T observado	11011,00
Estadístico J-T de media	8831,50
Desv. estándar de estadística J-T	557,47
Desv. Estadística J-T	3,91
Sig. asin. (bilateral)	<0,001

a. Variable de agrupación: Curso

La prueba de Jonckheere-Terpstra refleja una significación bilateral (p -valor < 0,001 en la Tabla 5). Este resultado indica la existencia de una tendencia creciente estadísticamente significativa en el grado de corrección conforme se avanza de curso.

Por otro lado, los resultados de la aplicación de dicha prueba en cada uno de los problemas (Tabla 6) indican que existió una tendencia creciente estadísticamente significativa (p -valor = 0,028 < 0,05) únicamente en el Problema 4 (ecuaciones).

Tabla 6

Resultados del test de tendencia de Jonckheere-Terpstra según problema

	P1a	P1b	P1c	P1d	P2	P3	P4
Número de niveles en Curso	3	3	3	3	3	3	3
N	235	235	235	235	235	235	235
Estadístico J-T observado	9487,50	9406,50	9322,50	9602,00	8175,50	9035,00	9654,50
Estadístico J-T de media	8561,50	8561,50	8561,50	8561,50	8561,50	8561,50	8561,50

Desv. estándar de estadística J-T	497,25	495,87	507,95	534,88	465,89	512,26	498,49
Desv. estadística J-T	1,86	1,70	1,50	1,95	-0,83	0,92	2,19
Sig. asin. (bilateral)	0,063	0,088	0,134	0,052	0,407	0,355	0,028
a. Variable de agrupación: Curso							

Este hallazgo sugiere que el alumnado de cursos superiores tuvo un mejor desempeño en el Problema 4, si bien fue el problema que resultó más complejo. En los apartados P1a y P1d (patrones), se detectaron tendencias marginalmente significativas (p-valor 0,063 y 0,052, respectivamente), que podrían estar indicando una evolución incipiente en la capacidad para identificar y analizar regularidades. Sin embargo, para P1c no se evidenció un avance significativo en el rendimiento en función del curso escolar; aunque hubo una ligera tendencia de mejora, no fue lo suficientemente clara para considerarla una progresión firme (p-valor=0,134). Finalmente, los problemas P2 (sistema de ecuaciones) y P3 (funciones) no mostraron diferencias significativas en función del curso (p-valor=0,407 en P2, p-valor=0,355 en P3).

Análisis de la relación entre nivel de RAE y curso escolar

En primer lugar, se calculó el nivel RAE medio por estudiante, a partir del promedio ponderado de los niveles de razonamiento activados en el conjunto de tareas. Los resultados del test de Jonckheere-Terpstra, confirmaron una tendencia creciente significativa en el nivel RAE medio por estudiante ($J-T = 11,705$ con $p\text{-valor} < 0,001$), lo que respalda la hipótesis de un incremento gradual del razonamiento algebraico puesto en juego en las prácticas en función del curso.

A continuación, para evaluar la existencia de una asociación ordinal entre el nivel de RAE empleado en cada problema y el curso escolar, se aplicó el coeficiente Tau-b de Kendall. En todos los casos, los resultados revelaron una correlación positiva y estadísticamente significativa, lo que indica que cuando aumenta el curso tiende a aumentar el nivel de RAE implicado en la resolución de los problemas. Esta asociación fue más débil en el Problema 2 (Tau-b=0,119; p-valor =0,028), moderada en el Problema 1 (Tau-b= 0,150, p-valor < 0,001) y Problema 3 (Tau-b= 0,162, p-valor < 0,001), mientras que el Problema 4 mostró la asociación más fuerte (Tau-b= 0,247, p-valor < 0,001), siendo este último el que mostró la asociación más fuerte.

Análisis de la relación entre nivel de RAE y grado de corrección

La Tabla 7 muestra los coeficientes Tau-b de Kendall entre el nivel de RAE y el grado de corrección de la respuesta para cada uno de los problemas desglosados por curso (1º, 2º y 3º ESO).

Tabla 7

Correlación entre niveles RAE y grado de corrección por problema y curso (Tau-b de Kendall)

Curso	P1	P2	P3	P4
1º ESO	0,490**	0,077 ⁺⁺	0,761**	0,947**
2º ESO	0,673**	0,485**	0,904**	0,833**
3º ESO	0,446**	0,290**	0,573**	0,841**

Nota: **La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral). ⁺⁺p-valor asociado de 0,443.

El análisis mostró una asociación positiva y significativa en prácticamente todos los casos. Concretamente, los resultados fueron especialmente consistentes en los Problemas 3 y 4, donde las correlaciones fueron elevadas en todos los cursos, indicando que en estas tareas existió una correspondencia clara entre el nivel de RAE empleado y el grado de corrección alcanzado. En el caso del Problema 1, la asociación fue moderada en todos los cursos y de un orden de magnitud similar. En cambio, en el Problema 2, la relación fue más débil, particularmente en 1º de ESO, donde no se alcanzó significación estadística, lo que apunta a que esta tarea fue resuelta correctamente mediante estrategias pre-algebraicas.

REFLEXIÓN FINAL

En este trabajo se pretendía evaluar el razonamiento algebraico empleado por estudiantes de los tres primeros cursos de educación secundaria al resolver problemas en diferentes aspectos del álgebra escolar: patrones, funciones, ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Nos interesaba, no solo caracterizar el nivel de RAE emergente en las prácticas del estudiantado, sino explorar la relación entre el nivel de RAE, el grado de corrección alcanzado y el curso escolar, valorando la influencia del tipo de problema.

El modelo de RAE adoptado (Burgos et al., 2024) atiende al grado de generalización, razonamiento funcional, razonamiento estructural y analiticidad de las prácticas matemáticas, con independencia de la dificultad de la tarea que las motiva. Sin embargo, es innegable que, si una tarea es más compleja, entendida esta complejidad en términos de los objetos y procesos que

implica resolverla, una solución más eficiente puede conducir a prácticas de mayor nivel de RAE.

En términos generales, se observó un bajo rendimiento en la resolución de los problemas propuestos, resultado coherente con investigaciones previas que ponen de manifiesto las dificultades del alumnado en el ámbito del álgebra (Akkan, 2013; Hewitt, 2012). Aunque también se constató el aumento del grado de corrección de las respuestas con el curso escolar, este aumento no fue homogéneo para todos los problemas, detectándose sólo una tendencia significativa del grado de corrección con el curso en el Problema 4. En el resto de los problemas las diferencias entre cursos no alcanzan significación estadística, lo que sugiere que algunos problemas no se benefician claramente del avance escolar en términos de corrección.

Aunque más de la mitad de las prácticas identificadas fueron de carácter aritmético, los resultados evidencian una evolución significativa del nivel de RAE empleado en las prácticas a lo largo de los cursos, tanto en el valor medio de los niveles activados como en la distribución de frecuencias de los distintos niveles implicados. Por otro lado, a pesar de que el análisis mostró una asociación positiva y mayoritariamente significativa entre el nivel de RAE implicado en las prácticas y el grado de corrección alcanzado, la fuerza de esta asociación varía según el tipo de problema y el curso. Así, las correlaciones altas o muy altas en todos los cursos en el Problema 3 (funciones) y Problema 4 (ecuaciones) indican que el éxito en la resolución de estos problemas está fuertemente vinculado al uso de un mayor nivel de RAE, mientras que en el Problema 1 (patrones), las correlaciones moderadas y estables en los tres cursos sugieren que un mayor RAE favorece la corrección, pero no es estrictamente necesario para obtener respuestas correctas. En general, la fuerza de la asociación entre RAE y corrección tiende a aumentar con el curso.

De manera específica, en el Problema 1, los estudiantes tuvieron dificultades para detectar la regularidad, por lo que no lograron determinar la regla de correspondencia general; la ausencia de generalización supuso una actividad prioritariamente pre-algebraica en los tres cursos. Además, incluso cuando dieron una regla general para el patrón, poniendo en juego una actividad proto-algebraica avanzada (niveles 2.I, 2.II) esta no siempre fue correcta. No se observó, además, una mejora significativa del rendimiento con el curso académico. Este resultado es similar a los encontrados en investigaciones como las de Akkan (2013) o Utami et al. (2023) y empeoran ligeramente los obtenidos por Wilkie (2016).

En el Problema 3, los estudiantes solo reconocieron las relaciones funcionales a través de la correspondencia entre valores particulares de las variables (razonamiento funcional pre-algebraico), sin llegar a concebir las funciones de manera general y compararlas. la correlación entre el grado de corrección y el nivel de RAE empleado fue fuerte en los dos primeros cursos y moderada en tercero. Así, la mayoría de los estudiantes se decantó por uno de los tratos, sin notar la dependencia de las variables, hecho observado por Brizuela y Earnest (2008) al proponer este problema a estudiantes de primaria. En este caso no se encontró una diferencia relevante de rendimiento entre los diferentes cursos.

La mejor tasa de respuestas correctas tanto globalmente como en cada curso se observó en el Problema 2, en el que predominaron resoluciones de carácter aritmético, resultado que concuerda con investigaciones previas (Johanning, 2004; Zwanch, 2022). En este caso, no se encontró una asociación relevante entre el nivel de RAE y el curso escolar ni entre el nivel de RAE y el grado de corrección. Esto muestra que los estudiantes pueden aproximarse a la resolución de sistemas de ecuaciones de forma pre-algebraica, basándose en las propiedades aritméticas para establecer relaciones entre las cantidades desconocidas. Por el contrario, el Problema 4, que involucraba la modelización de una situación mediante ecuaciones, fue el que causó mayor dificultad, con un porcentaje muy elevado de respuestas incorrectas o en blanco. En este caso, fue evidente la elevada correlación entre el grado de éxito y el nivel de RAE con el curso académico, encontrándose en 3º ESO resoluciones correctas de carácter algebraico, y en 1º y 2º ESO resoluciones incorrectas, en su mayoría de naturaleza aritmética. Una diferencia clave entre ambos problemas radica en su formulación: mientras que el enunciado del Problema 2 es sencillo y se identifican con claridad los valores desconocidos y las operaciones aritméticas implicadas, la formulación del Problema 4 es compleja, dificultando el reconocimiento de las relaciones entre las cantidades desconocidas.

Somos conscientes de que los resultados obtenidos dependen de los tipos de problemas empleados en la investigación y de que es necesario ampliar el instrumento con nuevos problemas que correspondan a otros enfoques del álgebra en secundaria (aritmética generalizada, pensamiento estructural o demostración) y otros contextos de aplicación (geométrico, probabilístico). En todo caso, los resultados obtenidos con relación al razonamiento algebraico del grupo de estudiantes de educación secundaria merecen cierta reflexión.

El reconocimiento de regularidades y patrones, así como la identificación y la expresión de relaciones entre variables son aspectos

esenciales en el desarrollo del sentido algebraico en los escolares (MEFP, 2022a,2022b). Sin embargo, los resultados obtenidos en los Problemas 1 y 3 muestran la falta de familiaridad de los estudiantes con los patrones, y sugieren la necesidad de reforzar su comprensión conceptual de las funciones y sus componentes. Específicamente, prestar atención a las nociones de covariación y correspondencia, y el uso de representaciones múltiples (diagramática, tabular, gráfica) podría facilitar la transición desde razonamientos de tipo particular hasta niveles más sofisticados de razonamiento funcional que aparecen implicados en la resolución de este tipo de problemas.

Por otro lado, la interpretación y modelización de situaciones matemáticas o de la vida cotidiana real con expresiones simbólicas son características fundamentales del sentido algebraico (MEFP, 2022b). Esta práctica, en educación secundaria, conduce con frecuencia al planteamiento y resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales. Los resultados obtenidos en el Problema 2 y Problema 4, nos llevan a reconocer la posibilidad de estrategias como la estimación, el ensayo y error, como primeras aproximaciones, pero también a la necesidad de reforzar el uso flexible de representaciones proto-algebraicas, como pueden ser las diagramáticas (usadas por algunos estudiantes de nuestro estudio), tabulares o gráficas, puede ayudar a los estudiantes a plantear y resolver ecuaciones, en la que los símbolos refieren al mundo real y las operaciones entre estos adquieran sentido.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por
MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

M.B. y N.T.-E. concibieron y plantearon la investigación (Conceptualization según la taxonomía CRediT). M.B., N.T.-E. y M.M.L.-M. adaptaron la metodología y analizaron los datos obtenidos en la implementación (Methodology, Formal analysis). M.B. y M.M.L.-M. escribieron la versión original del artículo (Writing – original draft) y los tres autores participaron en la revisión y edición de la versión final del artículo (Writing – review & editing). Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados y revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán facilitados por el autor correspondiente, N.T.-E., previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema*, 27(47), 703-732. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400002>
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA] (2014). Foundation to year 10 curriculum: Number sense and algebra (ACMSPO24).
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 359–382. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationship. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-559.
- Brizuela, B. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). LEA.
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 20(7), em2475. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>
- Chvál, M., Vondrová, N. y Novotná, J. (2021). Using large-scale data to determine pupils' strategies and errors in missing value number equations. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 5–24. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10000-5>
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2015). Common Core State Standards for Mathematics. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

- Durán Salas, F. (2023). Semiosis of conceptual learning of mathematical inequalities through semiotic meaning triads. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(12), em2375. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13892>
- Egodawatte, G. (2023). A taxonomy of high school students' levels of understanding in solving algebraic problems. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, 42(1), 30–51. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrac004>
- Ellis, A. B. y Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM Mathematics Education*, 56, 199–210. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9>
- Godino, J. D. (2024). Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones. McGraw Hill–Aula Magna.
- Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.
- Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics*, 81, 139-159.
- Hunter, J. y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1349–1362. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y>
- Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 371-388. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.001>
- Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>.
- Kieran, C. y Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical

- equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1215-1227. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5>
- Leavy, P. (2022). *Research design: Quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches*. Guilford Publications.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52(I), 24386–24504.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76(I), 41571-41789.
- Morales, P., García, M., Belmonte, C. y García, M. I. (2018). *Matemáticas 5 primaria*. Más Savia. SM.
- Moreno, A., Cañadas, M.C., Jaldo, P. y Bautista, A. (2016). Functional topics in grade 5 students' comparisons of two linear functions. Presentado en el 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburgo, Alemania.
- Mulligan, J., Oslington, G. y English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM - Mathematics Education*, 52(4), 663-676. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9>
- Muñoz, A., Martínez-Sierra, G. y Ferrari-Escolá, M. (2025). Comprensión del conjunto solución de inecuaciones lineales en dos variables para proponer una descomposición genética. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (27), 107–127. <https://doi.org/10.35763/aiem27.6017>
- Paoletti, T., Stevens, I. y Vishnubhotla, M. (2021). Comparative and restrictive inequalities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 63, 100895. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100895>
- Papadopoulos, I. y Thoma, A. (2023). Mental Brackets and Their Use by High School Students in Arithmetic and Algebra. *International*

Journal of Science and Mathematics Education, 21, 1197–1218.
<https://doi.org/10.1007/s10763-022-10298-y>

- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 113-134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M. y Christou, C. (2020). Different types of algebraic thinking: an empirical study focusing on middle school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(5), 965–984.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in Primary School. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
- Socas, M. M., Ruano, M.R. y Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 21-41.
- Utami, N. S., Prabawanto, S. y Suryadi, D. (2023). How students generate patterns in learning algebra? A focus on functional thinking in secondary school students. *European Journal of Educational Research*, 12(2), 913-925. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.2.913>
- Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63–75. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf>
- Veith, J. M., Beste, M. L., Kindervater, M., Krause, M., Straulino, M., Greinert, F. y Bitzenbauer, P. (2023). Mathematics education research on algebra over the last two decades: Quo vadis? *Frontiers in Education*, 8. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1211920>
- Vergel, R., Godino, J. D., Font, V. & Pantano, O. L. (2023). Comparing the views of the theory of objectification and the onto-semiotic approach

on the school algebra nature and learning. *Mathematics Education Research Journal*, 35, 475–496 <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00400-y>.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 93(3), 333-361. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x>

Wilkie, K. y Hopkins, S. (2024). Primary students' relational thinking and computation strategies with concrete-to-symbolic representations of subtraction as difference. *Journal of Mathematical Behavior* 73, 101121.

Zwanch, K. (2022). Examining middle grades students' solutions to word problems that can be modeled by systems of equations using the number sequences lens. *The Journal of Mathematical Behavior*, 6, 100960. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100960>

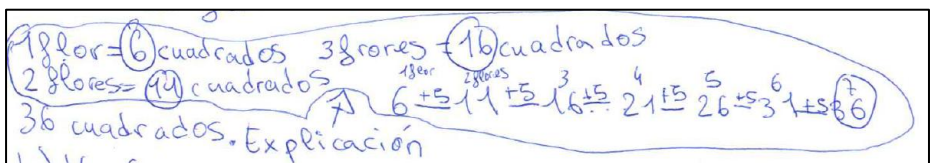
ANEXO

Se muestran prácticas matemáticas de distintos niveles de RAE a través de las respuestas de estudiantes al Problema 1 *La cadena de margaritas*.

- Respuesta de nivel 0.I de RAE.

Figura 7

Resolución de E1.1 (1º ESO) Problema 1 (a). Nivel 0.I de RAE



Para resolver el apartado (a) del Problema 1, E1.1. detecta un patrón recursivo que aplica en casos particulares, no explicitándolo la generalidad de forma unitaria (razonamiento recursivo particular).

- Respuesta de nivel 0.II de RAE.

Figura 8

Resolución de E1.2 (1ºESO) Problema 1 (b). Nivel 0.II de RAE

c) Porque si te piden, ¿cuántos cuadrados hay en una margarita de 20 flores? pues yo como se que cada flor son de seis cuadrados que se juntan en cada margarita pues como 19 flores $\times$ 6 cuadraditos y me sale 114 cuadrados.

Al resolver el apartado (c), E1.2. hace uso de un ejemplo por su estructura para explicar la regla general detectada, sin hacer explícita la generalidad (generalización aritmética-sofisticada). Esta relación se concretiza en los apartados previos para cadenas de 7 y 20 flores (razonamiento funcional particular).

- Respuesta de nivel 1.I de RAE.

Figura 9

Resolución de E1.3. (1ºESO) del Problema 1(c). Nivel 1.I de RAE

2b) Es lo mismo que en el anterior pero con más margaritas
 $6 + 5 = 11$
 $6 + 9 = 15$
 101 cuadrados

101 cuadrados
 20 hexágonos

2c) Depende del número que nos den, por ejemplo 21 tendrá la misma cantidad de hexágonos es decir en este caso serán 21

2d) para los cuadrados inicialmente siempre que hay 1 hexágono hay "6" pero cuando hay en este caso 21 el "6" solo es uno por lo tanto manten otros 20 y cada vez se añaden 5 entonces $\times$ multiplico $20 \cdot 5$ y lo que me da será lo que le sumo al 6 y obtendré el resultado

2e) No porque siempre que sumas 5 va a salir un número acabado en 0 o 5 y cuando sumas el 6 quedará un nº acabado en 6 o 1 por lo tanto es imposible que de 100

En el apartado (c) E1.3 describe el esquema operacional que le permite determinar el número de cuadrados a partir del número de flores que tiene la cadena. Inicialmente, el estudiante indica que el número de cuadrados “depende del número que nos den”, y lo ejemplifica para el caso de una cadena de 21 flores (en apartados anteriores ya lo había hecho para cadenas de 7 y 20 flores), lo que supone una generalización factual de la regla de formación del patrón. Además, el estudiante se basa en propiedades de operaciones con números naturales de manera local (“siempre que sumas 5 va a salir un número acabado en 0 o 5”) para responder al apartado (d), lo que implica un razonamiento estructural incipiente con intensivos de grado 1

- Respuesta de nivel 1.II de RAE.

Figura 10

Resolución de E3.1. (3º ESO) de los apartados (a) y (b) del Problema 1. Nivel 1.II de RAE

Handwritten student work for E3.1. The work is divided into two parts: a table of flowers and squares, and a handwritten explanation for part (a).

1 Flor:	1 hexágono	y 6 cuadrados	
2 Flores:	2 hexágonos	y 11 cuadrados	+5
3 Flores:	3 hexágonos	y 16 cuadrados	+5
4 Flores:	4 hexágonos	y 21 cuadrados	+5
5 Flores:	5 hexágonos	y 26 cuadrados	+5
6 Flores:	6 hexágonos	y 31 cuadrados	+5
7 Flores:	7 hexágonos	y 36 cuadrados	+5

Handwritten notes and calculations:

- A bracket on the right side of the table indicates a constant difference of +5 between rows.
- A note "Doble menos 1" points to the calculation $\times 2 - 1$.
- Part (a) is written below the table: "a) Julio necesitará 7 hexágonos y 36 cuadrados porque cada vez que se suma una flor se suman 1 hexágono y +5 cuadrados."

E3.1. detecta y explicita un patrón recursivo que le permite generar siguiente término de la serie conocido el valor anterior (“cada vez que se suma una flor se suman 1 hexágono y +5 cuadrados”).

- Respuesta de nivel 2.I de RAE.

Figura 11

Resolución de E1.4 (1ºESO) del Problema 1. Nivel 2.I de RAE

a-) Necesita = 49. $\varnothing$
Como lo he hecho = primero he contado cuantos cuadrados y hexágonos tiene una flor, en este caso tiene 7 así que me piden calcular cuantos hay entre todas las flores así que $7 \times 7 = 49$. Una flor por las que me pide.

b-) Necesita = $20 \times 7 = 140$
Como lo he hecho = pues he hecho lo mismo que al ejercicio de arriba pero en vez de 7×7 , 20×7 .

c-) Pues multiplicas cuantos pétalos tiene una flor y lo multiplicas por el número que te pida.

E1.4 expresa en (c) la regla general de formación del patrón de forma cualitativa nombrando lo indeterminado mediante términos genéricos (“el número que te pida”) pero sin llegar a dar una expresión de la transformación con cantidades concretas (“cuantos pétalos tiene una flor”). Se trata por tanto de una generalización contextual de la regla de formación, que involucra un razonamiento funcional incipiente.

- Respuesta de nivel 2.II de RAE

Figura 12

Resolución de E3.2 (3º ESO) al Problema 1 (c). Nivel 2.II de RAE

c) Res el número que me den, lo multiplico por 5 que es el número de cuadrados y luego le suma 1 por el primero que contamos $\varnothing$.

E3.2 describe la regla general de formación del patrón empleando términos genéricos para nombrar lo indeterminado (“el número que me den”)

y cantidades concretas para la transformación (“multiplico por 5”, “sumo 1”), pero sin articularlo con la imagen (número de cuadrados). Se trata, por tanto, de un razonamiento funcional parcial.

- Respuesta de nivel 3.I de RAE.

Figura 13

Resolución de E3.3. (3º ESO) del Problema 1. Nivel 3.I de RAE

b)

Julio necesitara 20 hexagonos y 101 cuadrados porque, El número de hexagonos siempre va a ser igual que el de flores ($n=x$) y el numero de cuadrados siempre va a ser el número de flores multiplicados por 5, más 1 ya que la primera flor tiene 6 cuadrados

$$X = n \cdot 5 + 1$$

no de cuadrados / no de flores / 5 cuadrados por flor / porque la primera flor tiene 1 cuadrado mas

c)

Para cualquier número de margaritas que todos:

Hexagonos = n° de flores

$x = n$ porque siempre solo hay un hexágono por flor

Cuadrados = n° de flores $\cdot 5 + 1$

$x = n \cdot 5 + 1$ porque todas las flores tienen 5 cuadrados excepto la primera que tiene 6 cuadrados (colistina) enonces se le suma 1 a la multiplicación de las flores y de los cuadrados en cada flor por el cuadrado sobante de la que tiene 6

E3.3 infiere y describe la regla de transformación que relaciona el número de flores de la cadena y el número de cuadrados (hexágonos) necesario para construirla, expresándola en notación simbólico-literal. Se trata por tanto de un razonamiento funcional completo.