

Princípios de Design na Pesquisa Baseada em Design e o Ensino das Integrais de Riemann e de Lebesgue

Ismael Batista Maidana Silvestre 

Vanilde Bisognin 

- a. Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete (IFFar-AL), Alegrete, RS, Brasil.
b. Universidade Franciscana (UFN), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT), Santa Maria, RS, Brasil.

RESUMO

Contexto: O ensino de conceitos avançados de matemática, como integrais, apresenta dificuldades persistentes relacionadas à construção de significados conceituais, demandando abordagens que articulem teoria e prática. **Objetivos:** Investigar a elaboração, aplicação, validação e generalização heurística de princípios de design no contexto da Pesquisa Baseada em Design (PBD), considerando seus efeitos na aprendizagem. **Design:** Estudo qualitativo, conduzido segundo a metodologia da PBD, com dois ciclos iterativos envolvendo análise, desenvolvimento, implementação e refinamento de uma intervenção didática. **Local e Participantes:** Realizado em um curso de licenciatura em Matemática, na disciplina de Fundamentos de Análise Matemática, com estudantes de duas turmas (2022 e 2023), professores e grupo colaborativo. **Coleta e análise de dados:** Dados coletados por observações em aula, diário de campo e produções escritas, analisados qualitativamente com foco nas imagens conceituais e evidências de aprendizagem. **Resultados:** Os princípios de design orientaram a construção das atividades e foram validados ao longo dos ciclos, evidenciando avanços nas imagens conceituais, maior articulação entre representações e desenvolvimento da autonomia. Sua organização em eixos heurísticos ampliou o potencial de transferência. **Conclusões:** O percurso mostrou-se consistente para a construção e uso de princípios de design, reforçando o papel da PBD na integração entre teoria e prática.

Palavras-chave: Pesquisa Baseada em Design; Princípios de Design; Integral de Riemann; Integral de Lebesgue; Análise Matemática.

Autor Correspondente: Ismael Batista Maidana Silvestre.
Email: ismael.silvestre@iffarroupilha.edu.br

Design Principles in Design-Based Research and the Teaching of Riemann and Lebesgue Integrals

ABSTRACT

Background: The teaching of advanced mathematical concepts, such as integrals, presents persistent difficulties related to the construction of conceptual meanings, requiring approaches that integrate theory and practice. **Objectives:** To investigate the development, implementation, validation, and heuristic generalization of design principles within the context of Design-Based Research (DBR), considering their effects on learning. **Design:** A qualitative study conducted according to the DBR methodology, involving two iterative cycles of analysis, development, implementation, and refinement of a didactic intervention. **Setting and Participants:** The study was carried out in an undergraduate Mathematics teacher education program, in a Mathematical Analysis Foundations course, involving students from two cohorts (2022 and 2023), teachers, and a collaborative research group. **Data collection and analysis:** Data were collected through classroom observations, field notes, and students' written productions, and analyzed qualitatively focusing on conceptual images and evidence of learning. **Results:** The design principles guided the development of the activities and were validated throughout the cycles, showing advances in conceptual images, greater articulation between representations, and increased student autonomy. Their organization into heuristic axes expanded their potential for transfer to other contexts. **Conclusions:** The methodological pathway proved to be consistent for the development and use of design principles, reinforcing the role of DBR in integrating theory and practice.

Keywords: Design-Based Research; Design Principles; Riemann Integral; Lebesgue Integral; Mathematical Analysis.

INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo e de Análise Real tem sido, historicamente, marcado por dificuldades persistentes, tanto por parte dos estudantes quanto dos professores em cursos de graduação em Matemática, especialmente nas licenciaturas (Pinto, 1998; Tall, 2002; Rezende, 2003). Dentre os conteúdos abordados nesses campos, o conceito de integral de Riemann destaca-se como um dos mais desafiadores, apresentando baixos níveis de desempenho em avaliações em larga escala, como o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade).

Dados provenientes de diferentes edições do Enade evidenciam que as questões relacionadas à integral de Riemann têm sido sistematicamente classificadas como difíceis, com índices de facilidade variando entre 0,16 e 0,30. Tal recorrência aponta para a existência de um problema de natureza

sistêmica no ensino e na aprendizagem desse conceito, conforme sintetizado na Tabela 1 (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira [INEP], 2005, 2008, 2011, 2014, 2017, 2021).

Tabela 1

Índice de Facilidade e classificação de questões sobre integral de Riemann nas provas do Enade.

Ano	Questão	Índice de Facilidade	Classificação
2005	26	Entre 0,16 e 0,40	Difícil
2008	19	0,26	Difícil
2011	17	0,22	Difícil
2014	10	0,30	Difícil
2017	9	0,25	Difícil
	23	0,22	Difícil
2021	Não Teve	-	-

Esse cenário não se limita a dificuldades pontuais na resolução de exercícios, mas evidencia uma fragilidade mais ampla na construção de conceitos e de significados matemáticos. Em particular, observa-se que muitos estudantes apresentam dificuldades em articular diferentes representações do conceito de integral — gráfica, algébrica e conceitual — bem como em compreender sua natureza como um limite. Tal situação reforça a ideia de que o problema não reside apenas no conteúdo em si, mas nas formas como ele tem sido abordado no contexto educacional.

A relevância da integral de Riemann na formação do professor de Matemática é indiscutível, uma vez que esse conceito constitui base para o desenvolvimento de ideias mais avançadas, como a integral de Lebesgue, além de desempenhar papel central na compreensão do próprio Cálculo.

A integral de Riemann, formalizada por Bernhard Riemann, constitui-se como base para a compreensão de conceitos mais abstratos da Análise Matemática. Já a integral de Lebesgue, desenvolvida por Henri Lebesgue, amplia essa noção ao introduzir uma nova forma de mensuração baseada na teoria da medida, permitindo tratar funções e conjuntos que escapam ao alcance da abordagem.

Contudo, apesar de sua relevância na formação matemática, investigações na área de Educação Matemática têm indicado que seu ensino permanece fortemente centrado em procedimentos algorítmicos, em detrimento

da construção de significados conceituais (Crisostomo, 2012; Apolinar, 2014; Menoncini, 2018). Essa predominância de abordagens procedimentais tende a dificultar a compreensão de aspectos mais abstratos, especialmente aqueles relacionados à noção de limite e à generalização de ideias, reforçando a necessidade de repensar práticas pedagógicas nesse campo.

Além disso, observa-se na literatura uma lacuna no que se refere à sistematização de orientações didáticas que possam ser comunicadas e adaptadas a diferentes contextos de ensino. Muitas pesquisas descrevem intervenções específicas, mas nem sempre explicitam princípios que orientem sua elaboração e que possam ser apropriados, ou ainda, adaptados por outros professores e pesquisadores nos seus contextos de trabalho. Resultados recentes têm apontado a relevância de explicitar tais princípios como forma de ampliar o alcance das intervenções e favorecer sua transferência para outros cenários educacionais (Silvestre, 2024, 2025; Bisognin & Silvestre, 2025). Nesse sentido, torna-se relevante investigar não apenas propostas didáticas, mas também os fundamentos que as sustentam e que possibilitam sua transferência para outros cenários educacionais.

Nesse contexto, a PBD apresenta-se como uma abordagem metodológica promissora para enfrentar desafios educacionais complexos. Essa metodologia caracteriza-se pelo desenvolvimento, implementação e análise de intervenções em contextos reais de ensino, articulando produção de conhecimento teórico e soluções práticas (Reeves, 2006; Plomp, 2007). Diferentemente de abordagens experimentais tradicionais, a PBD busca integrar teoria e prática de forma iterativa e colaborativa.

Essa característica torna a PBD particularmente adequada para lidar com problemas de natureza complexa e sistêmica, como aqueles presentes no ensino de conceitos avançados de Matemática, nos quais múltiplos fatores — cognitivos, didáticos e institucionais — se inter-relacionam. Ao atuar em contextos reais de ensino, a PBD possibilita não apenas compreender esses problemas, mas também intervir sobre eles de forma fundamentada e reflexiva.

Um dos elementos estruturantes da PBD é o trabalho colaborativo, que envolve a participação conjunta de pesquisadores e professores na identificação do problema, na concepção das intervenções e na análise dos resultados. Tal colaboração contribui para a construção de soluções que dialogam com as demandas reais da prática docente, ao mesmo tempo em que se fundamentam em referenciais teóricos consistentes.

Outro aspecto central dessa abordagem é a elaboração de princípios de design, entendidos como orientações teórico-práticas que emergem do processo investigativo e que podem orientar intervenções em diferentes contextos educacionais. Esses princípios não se configuram como prescrições rígidas, mas como diretrizes flexíveis, cuja construção pode decorrer de múltiplas fontes, tais como a revisão de literatura, a análise do problema, as contribuições do grupo colaborativo e os resultados obtidos nos ciclos de aplicação e refinamento das intervenções (Van den Akker, 1999).

Particularmente, princípios de design com origem na revisão de literatura, assumem um papel central, pois permitem transformar resultados de pesquisa em orientações que podem ser utilizadas na prática docente. Sua natureza heurística possibilita adaptações a diferentes contextos, ao mesmo tempo em que mantém um vínculo com os fundamentos teóricos que lhes deram origem. Estudos recentes têm evidenciado esse potencial ao sistematizar princípios derivados de intervenções em contextos reais de ensino, inclusive no âmbito dessa pesquisa ((Silvestre, 2024, 2025; Bisognin & Silvestre, 2025)). Assim, mais do que orientações finais, os princípios configuram-se como elementos mediadores entre teoria, prática e investigação.

A PBD responde a esse desafio ao propor ciclos iterativos de análise, design, implementação e avaliação, nos quais os princípios de design funcionam como elementos articuladores entre teoria, prática e investigação. A elaboração desses princípios, nesta pesquisa, partiu da análise das dificuldades dos estudantes, da revisão de literatura especializada e da colaboração entre pesquisadores e professores. Tal processo colaborativo é um princípio fundamental da PBD, pois garante que as intervenções sejam simultaneamente teoricamente fundamentadas e pedagogicamente viáveis. Os princípios resultantes orientaram a construção de atividades didáticas voltadas à compreensão conceitual das integrais, priorizando o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

O presente trabalho é resultado de uma pesquisa de doutorado que teve como um dos problemas: como elaborar, validar e generalizar princípios de design em uma PBD voltada ao ensino das integrais de Riemann e de Lebesgue? Com base nesse problema, o objetivo deste artigo é analisar o processo de elaboração, aplicação e generalização de princípios de design desenvolvidos em uma PBD no contexto do ensino de integrais. Busca-se, ainda, discutir os impactos desses princípios tanto na aprendizagem dos estudantes quanto na produção de conhecimento no campo da Educação

Matemática, evidenciando seu potencial para orientar futuras intervenções em contextos semelhantes.

Os princípios de design foram elaborados a partir da articulação entre revisão de literatura, análise das dificuldades de aprendizagem relacionadas às integrais e o trabalho colaborativo com professores participantes de um grupo de cooperação. Tais princípios orientaram a construção de atividades didáticas, posteriormente aplicadas em duas turmas distintas. Ao longo desse processo, os princípios foram refinados com base nos resultados observados e organizados em eixos, com vistas à sua generalização.

ASPECTOS GERAIS DA METODOLOGIA DA PBD

A PBD constitui uma abordagem metodológica voltada à investigação e intervenção em problemas educacionais complexos, desenvolvida em contextos reais de ensino. Diferentemente de metodologias experimentais tradicionais, que tendem a isolar variáveis em ambientes controlados, a PBD atua em ambientes autênticos de aprendizagem, promovendo a articulação entre teoria e prática (Reeves, 2006; Plomp, 2007).

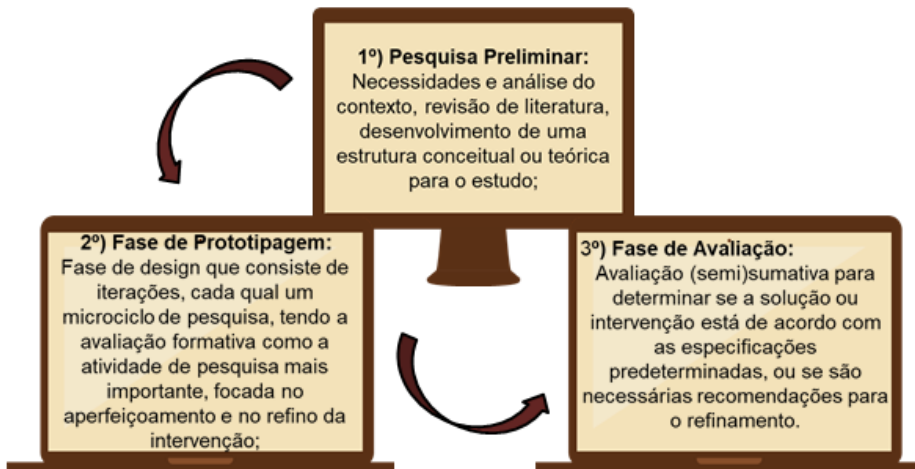
Seu objetivo principal é duplo: (i) desenvolver soluções práticas para desafios educacionais concretos; e (ii) produzir conhecimento teórico relevante e comunicável à comunidade acadêmica (Van den Akker, 1999). Essa dupla finalidade confere à PBD um caráter particular, no qual investigação e intervenção se desenvolvem de forma integrada.

Uma das principais características da PBD é seu caráter cíclico e iterativo. De modo geral, a pesquisa se organiza em fases que envolvem: (a) análise do problema educacional; (b) elaboração do design da intervenção e implementação em contexto real; e (c) avaliação e refinamento. Esses ciclos não são lineares, mas se retroalimentam continuamente, permitindo ajustes progressivos nas intervenções e no conhecimento produzido (Plomp, 2007; Gravemeijer; Cobb, 2006). Na Figura 1 mostramos as fases de um ciclo de uma pesquisa segundo a PBD.

Esse caráter iterativo distingue a PBD de outras abordagens de pesquisa em educação. Enquanto estudos experimentais buscam controle de variáveis para estabelecer relações causais e pesquisas descritivas priorizam a análise de fenômenos, a PBD assume a complexidade dos contextos educacionais e busca compreendê-los por meio da intervenção. Nesse sentido, não se trata de eliminar variáveis, mas de compreender como diferentes elementos — cognitivos, didáticos e institucionais — interagem no processo de ensino e aprendizagem.

Figura 1

Fases da Pesquisa Baseada em Design.



Além disso, a PBD caracteriza-se por sua natureza colaborativa, envolvendo a participação conjunta de pesquisadores e professores na identificação dos problemas, na elaboração das intervenções e na análise dos resultados. Esse trabalho colaborativo contribui para a construção de soluções que dialogam com as demandas reais da prática docente, ao mesmo tempo em que se fundamentam em referenciais teóricos consistentes.

Outro aspecto relevante refere-se aos critérios de qualidade da PBD, que incluem validade, praticidade e efetividade (Plomp, 2007). Esses critérios reforçam o compromisso da metodologia tanto com a produção de conhecimento quanto com sua aplicabilidade em contextos reais.

Na PBD, os princípios de design assumem papel central. Eles não surgem apenas como resultados da pesquisa, mas são elaborados, testados e refinados ao longo dos ciclos iterativos. Inicialmente, podem ser formulados com base na literatura e na análise do problema; posteriormente, são confrontados com a prática, ajustados e, ao final, sistematizados como contribuições teóricas e práticas da investigação. Dessa forma, os princípios de design constituem elementos articuladores entre teoria, intervenção e produção de conhecimento na PBD.

No próximo item faremos um detalhamento sobre princípios de design: elaboração, aplicação e generalização.

Princípios de design: elaboração, aplicação e generalização

Os princípios de design podem ser compreendidos como orientações fundamentadas teoricamente e validadas empiricamente, destinadas a orientar a elaboração de intervenções educacionais. Não se tratam de prescrições rígidas, mas de diretrizes que conectam literatura científica, experiência docente, análise do problema educacional e resultados obtidos em contextos concretos de ensino (Van den Akker, 1999; Reeves, 2006).

Nesse sentido, os princípios de design ocupam papel central na PBD, pois permitem transformar resultados de pesquisa em orientações que podem ser utilizadas na prática docente. Ao mesmo tempo, constituem uma contribuição teórica relevante, ao sistematizar o conhecimento produzido em formas comunicáveis e úteis para a comunidade acadêmica (Reeves, 2006; McKenney & Reeves, 2012).

Sua elaboração representa um momento fundamental no processo investigativo, pois estabelece a articulação entre o problema estudado, o referencial teórico e as soluções propostas. Esses princípios podem emergir de diferentes fontes, tais como a revisão de literatura, a análise de dificuldades de aprendizagem, a experiência docente e os resultados obtidos ao longo dos ciclos de implementação e refinamento (Gravemeijer; Cobb, 2006). Essa multiplicidade de origens evidencia seu caráter dinâmico e contextualizado.

Um aspecto relevante na discussão refere-se à qualidade dos princípios de design. Para que sejam efetivos, os princípios devem apresentar fundamentação teórica consistente, conexão com o problema educacional investigado, potencial de aplicação prática e abertura à adaptação em diferentes contextos. Além disso, devem ser suficientemente específicos para orientar ações, mas também suficientemente flexíveis para não se restringirem a um único cenário de aplicação (Van den Akker, 1999).

A literatura distingue, ainda, dois tipos de princípios de design: substantivos e procedimentais. Os princípios substantivos referem-se às características dos conteúdos, das atividades e dos materiais didáticos, isto é, ao que deve compor a intervenção. Por sua vez, os princípios procedimentais dizem respeito às formas de organização, implementação e condução das atividades, indicando como a intervenção deve ser operacionalizada. Ambos são complementares e fundamentais para a articulação entre teoria, análise de problemas e prática pedagógica (Gravemeijer; Cobb, 2006).

Os princípios de design ocupam papel central na PBD em razão de sua aplicabilidade prática, pois subsidiam professores e pesquisadores na

concepção de atividades e materiais didáticos em contextos diversos. Simultaneamente, constituem uma contribuição teórica relevante, ao sistematizar o conhecimento produzido em formas comunicáveis e úteis para a comunidade acadêmica (Reeves, 2006). Nesse sentido, atuam como mediadores entre teoria, prática e investigação.

Outro aspecto relevante a ser destacado em relação aos princípios de design é a generalização. Isso porque as intervenções da PBD ocorrem em contextos específicos, a generalização não ocorre no sentido estatístico tradicional, mas por meio da organização dos princípios em eixos conceituais mais amplos. Esses eixos permitem que pesquisadores e professores adaptem as orientações a novos contextos educacionais, respeitando suas especificidades. Dessa forma, os princípios de design tornam-se instrumentos transferíveis, capazes de inspirar novas práticas pedagógicas sem impor modelos rígidos.

A natureza heurística dos princípios de design é uma característica fundamental e diferenciada. Diferentemente de modelos fechados, os princípios funcionam como orientações abertas que guiam a tomada de decisões sem determinar rigidamente os caminhos a serem seguidos. Essa característica favorece processos de adaptação e reinterpretação, permitindo sua utilização em diferentes contextos educacionais (Reeves, 2006).

Essa natureza está diretamente relacionada à sua transferibilidade. Considerando que as intervenções em PBD ocorrem em contextos específicos, a generalização não se dá em termos estatísticos, mas por meio da organização dos princípios em eixos conceituais mais amplos. Esses eixos possibilitam que pesquisadores e professores adaptem as orientações a novos contextos, respeitando suas especificidades (Plomp, 2007).

Apesar de suas potencialidades, os princípios de design também apresentam limitações. Sua natureza contextual implica que não podem ser aplicados de forma direta e acrítica em qualquer cenário, exigindo interpretação e adaptação por parte dos professores. Além disso, sua elaboração depende de processos investigativos rigorosos, o que pode limitar sua produção em determinados contextos (McKenney; Reeves, 2012). Ainda assim, tais limitações não reduzem sua relevância, mas evidenciam a necessidade de compreensão crítica de seu uso.

Nesse contexto, os princípios de design também se mostram relevantes para a formação inicial e continuada de professores, na medida em que oferecem referenciais para a reflexão sobre a prática pedagógica. Ao

compreender os fundamentos que orientam a elaboração de atividades, os professores podem desenvolver maior autonomia na construção de propostas didáticas, ampliando sua capacidade de adaptação a diferentes contextos de ensino.

Em síntese, os princípios de design configuram-se como o elemento articulador central da PBD, ao traduzirem resultados de investigação em orientações práticas e, simultaneamente, contribuir para a construção de conhecimento teórico na área educacional. Sua elaboração, aplicação, refinamento e generalização constituem um percurso metodológico potente para enfrentar desafios complexos de ensino e aprendizagem, especialmente em áreas que exigem elevado nível de abstração, como a matemática avançada.

Essas características tornam a PBD especialmente adequada para enfrentar problemas de natureza sistêmica, como aqueles presentes no ensino de conceitos avançados de Matemática, nos quais fatores cognitivos, didáticos e institucionais se inter-relacionam. Ao operar em contextos reais, essa abordagem permite não apenas compreender tais problemas, mas também propor e testar soluções fundamentadas, contribuindo para a transformação das práticas educativas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente investigação foi desenvolvida no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete (IFFar-CA), no âmbito da disciplina de Fundamentos de Análise Matemática. O processo investigativo contou com a colaboração de docentes da instituição, do Grupo de Pesquisa Baseada em Design de Alegrete (GPBDAL) e do Grupo de Estudos e Pesquisa em Design Educacional (GEPDE-UFN), caracterizando-se como uma pesquisa de natureza colaborativa, em consonância com os pressupostos da PBD.

Em conformidade com essa abordagem metodológica, a investigação foi organizada em ciclos iterativos que envolveram análise do problema, elaboração do design da intervenção, implementação em contexto real e avaliação com vistas ao refinamento. Esse movimento cíclico permitiu não apenas o aprimoramento progressivo da sequência didática, mas também a construção, validação e sistematização dos princípios de design ao longo do processo.

A identificação dos princípios de design iniciou-se com a análise do problema educacional, precedida por uma revisão de literatura voltada ao ensino de integrais. Essa revisão teve como objetivo mapear contribuições

teóricas e empíricas relevantes, sendo posteriormente complementada por discussões no grupo colaborativo, que também consideraram as dificuldades dos estudantes no desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Ademais, a análise do problema incluiu evidências provenientes de baixos índices de desempenho em avaliações nacionais, observações docentes e a experiência do pesquisador em sala de aula.

Foram igualmente consideradas dificuldades específicas dos estudantes, identificadas por meio de avaliações diagnósticas e relatos de professores, tais como lacunas em conhecimentos prévios, obstáculos na transição do pensamento algébrico para o conceitual e limitações na articulação entre diferentes representações matemáticas. Esse conjunto de elementos possibilitou uma compreensão mais ampla e contextualizada das dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Com base nesse conjunto de evidências, foram elaborados princípios de design que passaram a orientar a construção da sequência didática. Nesse contexto, os princípios assumiram um papel estruturante, não apenas como diretrizes para o desenvolvimento das atividades, mas também como hipóteses de intervenção a serem testadas e refinadas ao longo dos ciclos da pesquisa. A sequência didática foi concebida como um produto educacional de natureza instrumental, enquanto os princípios de design constituíram a principal contribuição teórica e metodológica do estudo, com potencial de aplicação em diferentes contextos educacionais.

A elaboração das atividades relativas às unidades temáticas integral de Riemann, primitivas e integral de Lebesgue, foi orientada por esses princípios. Nesse processo, priorizou-se o uso de múltiplas representações, especialmente gráficas, a exploração da noção de área como raiz cognitiva, a organização das tarefas em níveis crescentes de complexidade e a inclusão de momentos de sistematização voltados à abstração e à generalização. A construção das atividades ocorreu em estreita colaboração com os docentes da disciplina, assegurando sua viabilidade e pertinência pedagógica.

Foram realizados dois ciclos iterativos de aplicação: o primeiro em 2022 (Versão 1 do produto educacional) e o segundo em 2023 (Versão 2). Cada ciclo compreendeu as etapas de planejamento, implementação em turmas reais e análise dos resultados, seguidas de refinamentos na sequência didática e nos próprios princípios de design. Esse processo permitiu que os princípios fossem progressivamente validados e ajustados, consolidando-se como elementos centrais da investigação.

A coleta de dados incluiu observações em sala de aula, registros em diário de campo e análise das produções dos estudantes. Esses dados possibilitaram avaliar tanto o impacto das intervenções na aprendizagem quanto a pertinência dos princípios de design como orientadores do processo didático.

Dessa forma, os procedimentos metodológicos adotados não apenas viabilizaram a elaboração e implementação de uma sequência didática, mas também constituem um modelo replicável para a construção, validação e refinamento de princípios de design em diferentes contextos educacionais. Tal abordagem reforça o caráter heurístico e o potencial de generalização desses princípios, os quais são apresentados e discutidos na seção de resultados e discussões.

Esse percurso metodológico evidencia uma possibilidade estruturada de elaboração e uso de princípios de design em pesquisas educacionais, contribuindo não apenas para o contexto investigado, mas também para a proposição de caminhos metodológicos em estudos futuros que adotem a PBD.

Essa pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Franciscana e teve início após sua aprovação, em conformidade com a Resolução 510/16 do Conselho Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Essa seção está organizada de modo a explicitar o percurso de elaboração, uso, validação e generalização dos princípios de design desenvolvidos nesta pesquisa. Do ponto de vista do ensino da integral de Riemann e da integral de Lebesgue, tal elaboração mostra-se particularmente relevante, considerando as dificuldades recorrentes dos estudantes na transição entre interpretações geométricas intuitivas — como a noção de área sob a curva — e a formalização analítica baseada em limites, somas e propriedades estruturais das funções. Nesse contexto, estudos sobre pensamento matemático avançado, indicam que a aprendizagem desses conceitos requer a construção de imagens conceituais robustas, articuladas a definições formais e a diferentes registros de representação matemática (Tall & Vinner, 1981; Tall, 2002).

Nesse sentido, os princípios de design desenvolvidos nesta pesquisa podem ser compreendidos como respostas estruturadas a essas dificuldades, orientando a construção de um percurso didático que favorece a articulação entre intuição, representação e formalização. Assim, inicialmente apresenta-se o processo de construção dos princípios substantivos, evidenciando sua origem

na articulação entre análise do problema, revisão de literatura e colaboração docente. Em seguida, discute-se como esses princípios orientaram a elaboração das atividades didáticas, destacando sua materialização no produto educacional. Posteriormente, são analisados os processos de aplicação e refinamento da intervenção, momento em que emergem os princípios procedimentais. Na sequência, são apresentados os efeitos na aprendizagem dos estudantes, com base na análise das produções e das imagens conceituais desenvolvidas. Por fim, aborda-se a generalização heurística dos princípios, evidenciando seu potencial de transferência para outros contextos educacionais.

Elaboração dos princípios de design iniciais

A construção dos princípios de design teve como base a articulação entre três elementos centrais: a análise do problema educacional, a revisão da literatura e o trabalho colaborativo com os professores da disciplina. Esse processo evidencia uma característica fundamental da PBD, na qual os princípios não são definidos a priori, mas emergem da interação entre teoria, prática e contexto.

No que se refere à revisão de literatura, realizou-se um levantamento sistemático em dois repositórios amplamente utilizados na área: a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Foram utilizados como descritores os termos “integral definida”, “integral de Riemann” e “integral de Lebesgue”, com a delimitação para trabalhos de natureza acadêmica stricto sensu. Em Silvestre (2025), podem ser encontrados os detalhes desse processo.

A opção por teses e dissertações deveu-se ao fato de esses estudos apresentarem descrições mais detalhadas dos procedimentos metodológicos e dos resultados obtidos, permitindo uma análise aprofundada das estratégias de ensino e das dificuldades de aprendizagem associadas ao tema. Além disso, priorizou-se a seleção de trabalhos nacionais, considerando a proximidade dos contextos educacionais e a possibilidade de identificar práticas e resultados mais diretamente relacionados à realidade dessa pesquisa.

A busca inicial resultou em um conjunto amplo de trabalhos, os quais passaram por um processo de triagem. Inicialmente, foram excluídos estudos não relacionados ao foco da pesquisa, bem como trabalhos duplicados. Em seguida, realizou-se a leitura dos resumos, sendo descartados aqueles que tratavam exclusivamente de aplicações matemáticas, que não envolviam intervenções didáticas ou que estavam direcionados a outros níveis de ensino.

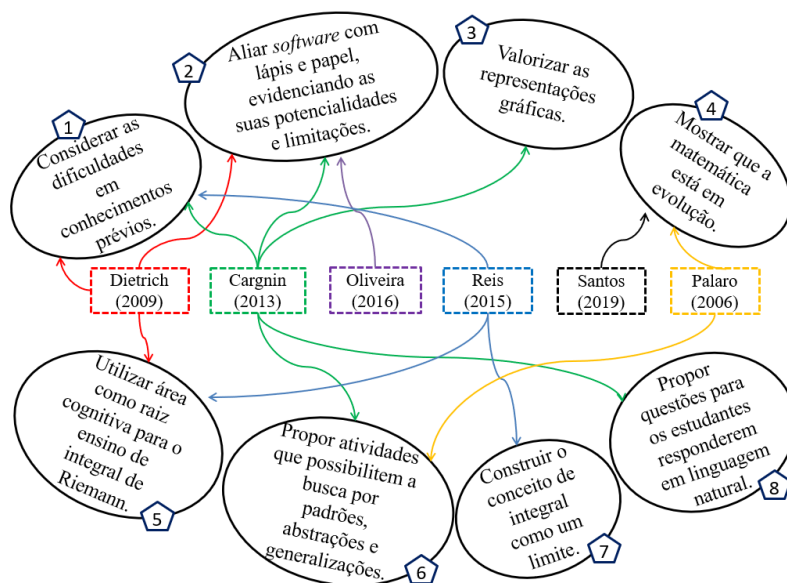
Após esse processo, foram selecionados seis estudos considerados mais relevantes para a investigação.

A análise desses trabalhos permitiu identificar elementos recorrentes relacionados às dificuldades dos estudantes e às estratégias didáticas empregadas, tais como limitações nos conhecimentos prévios, dificuldades na articulação entre representações, desafios no uso de tecnologias e obstáculos na compreensão conceitual dos processos envolvidos. Esses elementos não foram incorporados diretamente, mas reinterpretados como diretrizes orientadoras, dando origem aos princípios de design iniciais.

Esse movimento evidencia que os princípios de design não correspondem a uma simples síntese da literatura, mas a um processo de transformação de resultados empíricos e teóricos em orientações operacionais para o ensino. Nesse sentido, os princípios constituem uma forma de traduzir conhecimento produzido em pesquisas anteriores em elementos aplicáveis ao contexto educacional. Na Figura 2, apresentamos a síntese dos princípios de design elaborados a partir da revisão de literatura.

Figura 2

Síntese dos princípios de design com base revisão de literatura.



A partir dessa base inicial, o conjunto de princípios foi ampliado por meio do trabalho colaborativo com professores, que contribuíram com sua experiência e com a análise das especificidades do contexto investigado. Esse processo levou à proposição de três novos princípios: (i) promoção do protagonismo discente; (ii) organização das atividades em níveis crescentes de complexidade; e (iii) explicitação das distinções entre integral de Riemann, primitiva e integral de Lebesgue. Com isso, consolidou-se um conjunto de onze princípios substantivos. A incorporação desses novos princípios evidencia o papel central do contexto na construção dos princípios de design, reforçando seu caráter situado e sua sensibilidade às demandas reais do ensino.

Como exemplo desse processo, destaca-se o caso de estudos que relataram dificuldades no uso de recursos computacionais e limitações nos conhecimentos prévios dos estudantes, os quais foram reinterpretados como princípios relacionados à articulação entre diferentes recursos didáticos e à consideração das dificuldades conceituais dos alunos.

Dessa forma, a elaboração dos princípios de design pode ser compreendida como um processo iterativo de análise, seleção, interpretação e ressignificação de resultados da literatura, articulado à experiência docente e às demandas do contexto investigado.

Uso dos princípios substantivos na elaboração das atividades

Os princípios de design elaborados atuaram como elementos estruturantes na construção das atividades que compuseram o produto educacional, desempenhando o papel de mediadores entre os referenciais teóricos adotados, a análise do problema educacional e as decisões didáticas concretas. Nesse sentido, sua função não se limitou à orientação geral da proposta, mas se materializou em escolhas específicas relacionadas à organização, à natureza e à progressão das tarefas.

A elaboração das atividades foi realizada de forma articulada às três unidades temáticas da sequência didática — integral de Riemann, primitivas e integral de Lebesgue —, sendo cada uma delas estruturada a partir dos princípios substantivos definidos na etapa anterior. Esse processo ocorreu de maneira iterativa e colaborativa, com discussões no grupo de professores, nas quais se analisava a adequação de cada proposta à realidade da disciplina e aos objetivos de aprendizagem pretendidos, conforme descrito de forma mais detalhada em Silvestre (2025).

Diferentemente de abordagens em que os conteúdos são organizados a partir de uma lógica estritamente formal, a construção das atividades neste

estudo partiu da necessidade de promover a compreensão conceitual, o que implicou reorganizar o percurso didático à luz dos princípios estabelecidos. Assim, cada princípio foi traduzido em decisões pedagógicas concretas, evidenciando sua natureza operativa.

Um exemplo central refere-se ao princípio da utilização da noção de área como raiz cognitiva para a integral de Riemann. Esse princípio orientou a elaboração das atividades iniciais, nas quais os estudantes eram levados a estimar áreas de regiões planas por meio de aproximações sucessivas. Essa abordagem possibilitou a construção de significados intuitivos que serviram de base para a posterior formalização do conceito de integral como limite de somas.

De forma complementar, o princípio da valorização de múltiplas representações esteve presente ao longo de toda a sequência, assegurando que os estudantes transitassem entre registros gráficos, algébricos, numéricos e verbais. Essa articulação mostrou-se fundamental para a compreensão das somas de Riemann, bem como para a distinção entre diferentes interpretações da integral, aspecto recorrente nas dificuldades identificadas na literatura e na própria investigação.

Outro princípio estruturante foi a organização das atividades em níveis crescentes de complexidade. A sequência foi planejada de modo a iniciar com tarefas exploratórias, de caráter mais intuitivo, avançando progressivamente para situações que exigiam maior nível de abstração e formalização. Esse encadeamento favoreceu processos de generalização e contribuiu para a construção de imagens conceituais mais elaboradas.

Para ilustrar como utilizamos os princípios de design na construção do produto educacional, temos a atividade 1.3 da Unidade 1, sobre o conceito de integral de Riemann, em que os princípios de design 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 e 10 foram considerados.

Atividade 1.3: Considere a região A limitada por $f(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

- a) Divida o intervalo $I = [0, 1]$ ao meio e encontre a área aproximada da região A calculando a área, a partir de retângulos, por falta e por excesso.
- b) Divida o intervalo $I = [0, 1]$ em 3 partes iguais e encontre área aproximada da região A calculando a área, a partir de retângulos, por falta e por excesso. Compare os resultados com os encontrados na letra a.

- c) Divida o intervalo $I = [0, 1]$ em 4 partes iguais e encontre área aproximada da região A calculando, a partir de retângulos, a área por falta e por excesso. Compare com os resultados anteriores. O que você observa?
- d) Você pode melhor visualizar o resultado anterior utilizando o *GeoGebra*. Preencha a tabela. (Para visualizar os resultados, basta mover o controle deslizante do *Applet*)

Número de Retângulos	5	10	15	20	30	50
Área por falta						
Área por excesso						

- e) O que você observa da relação entre as somas por falta e por excesso na medida em que n (número de retângulos) cresce?
- f) Se dividirmos o intervalo $I = [0, 1]$ em n partes iguais, qual é a expressão da área aproximada para a região A por falta e por excesso? O que acontece quando n cresce indefinidamente?

A Atividade 1.3 exemplifica de forma clara a articulação entre diferentes princípios de design. Nela, os estudantes exploram aproximações da área sob a curva $f(x) = x^2$, no intervalo $[0, 1]$, por meio de somas inferiores e superiores, variando o número de partições. O uso do software *GeoGebra* potencializou a visualização do processo, permitindo observar a convergência das aproximações.

Além disso, a atividade conduz os estudantes à generalização para um número arbitrário de partições, promovendo a transição do raciocínio empírico para o formal. Nesse sentido, observa-se a atuação simultânea de diferentes princípios, tais como a valorização de representações, a progressão em níveis de dificuldade e a promoção de abstrações e generalizações.

Outro aspecto relevante diz respeito à incorporação do princípio da promoção da autonomia discente, operacionalizado por meio de questões abertas e da proposição de situações em que os estudantes eram incentivados a formular conjecturas, testar hipóteses e justificar seus raciocínios. Esse movimento foi acompanhado pelo princípio da mediação docente como orientação, no qual o professor atuava como facilitador do processo,

estimulando discussões e intervenções pontuais, em vez de fornecer respostas prontas.

A elaboração das atividades contou, ainda, com a contribuição do grupo colaborativo, que desempenhou papel fundamental na validação das propostas e na adequação ao contexto de sala de aula. Esse processo permitiu antecipar dificuldades, ajustar o nível de complexidade das tarefas e garantir a viabilidade da intervenção, reforçando o caráter coletivo e situado da construção dos princípios e de sua aplicação.

Dessa forma, o uso dos princípios de design na elaboração das atividades evidencia sua função central na PBD: mais do que orientações abstratas, eles configuram-se como ferramentas operacionais que permitem transformar fundamentos teóricos e evidências empíricas em práticas pedagógicas concretas, coerentes e potencialmente eficazes.

Aplicação e surgimento dos princípios procedimentais

No contexto desta pesquisa, os princípios de design procedimentais não se configuraram exclusivamente como elementos emergentes da aplicação, mas como componentes que se desenvolveram ao longo de todo o processo investigativo, desde a fase de planejamento até os momentos de implementação e análise. Diferentemente dos princípios substantivos, que orientaram principalmente o conteúdo e a estrutura das atividades, os princípios procedimentais dizem respeito à forma como essas atividades são organizadas, conduzidas e vivenciadas em sala de aula.

Ainda na etapa de elaboração da sequência didática, alguns princípios procedimentais já estavam implicitamente presentes, sobretudo aqueles relacionados à organização do trabalho em sala e à concepção do papel do professor e dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem. Entre eles, destacam-se a valorização da autonomia discente e a atuação do professor/pesquisador como orientador, aspectos que orientaram desde o início a construção de atividades investigativas e abertas.

No entanto, foi durante a aplicação da intervenção que esses princípios foram tensionados, ajustados e explicitados com maior clareza. A vivência em sala de aula evidenciou a necessidade de considerar, de forma mais sistemática, aspectos como a gestão do tempo, a organização das interações entre os estudantes e os momentos de sistematização dos conceitos. Conforme detalhado em Silvestre (2025), esse movimento de explicitação e refinamento dos princípios procedimentais ocorreu de maneira articulada à análise das evidências empíricas produzidas ao longo dos ciclos de aplicação.

Nesse processo, alguns princípios foram fortalecidos e mais bem caracterizados, passando a compor de forma mais explícita o conjunto de diretrizes da intervenção. Dentre eles, destacam-se: 12) o desenvolvimento das atividades em duplas, favorecendo a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento; 13) a mediação docente pautada na orientação e no questionamento, em detrimento da transmissão direta de conteúdos; 14) o incentivo à autonomia dos estudantes, assumindo papel ativo em seu processo de aprendizagem; 15) e a utilização de momentos de síntese ao final de cada unidade, contribuindo para a organização e consolidação dos conceitos trabalhados.

Cabe destacar que esses princípios não foram simplesmente adicionados ao conjunto inicial, mas resultaram de um processo de validação progressiva, no qual sua pertinência foi confirmada a partir dos efeitos observados na dinâmica da sala de aula e nas produções dos estudantes. Assim, sua consolidação não decorre apenas de uma decisão teórica, mas de evidências empíricas que indicam sua relevância para a condução da intervenção.

Outro aspecto importante refere-se ao fato de que esses princípios passaram a atuar de forma articulada com os princípios substantivos, ampliando a coerência da proposta didática. Enquanto estes orientavam o que ensinar e como estruturar as atividades, os princípios procedimentais contribuíam para definir como essas atividades deveriam ser desenvolvidas em sala, evidenciando a complementaridade entre ambos.

Dessa forma, a análise dos princípios procedimentais neste estudo reforça a compreensão de que a PBD envolve não apenas a elaboração de intervenções fundamentadas teoricamente, mas também a construção de orientações práticas que se constituem e se validam no próprio processo de implementação. Tal característica evidencia o caráter dinâmico e situado dos princípios de design, cuja consolidação depende da interação contínua entre planejamento, ação e reflexão.

Validação dos princípios de design e efeitos na aprendizagem

A análise dos dados produzidos ao longo dos ciclos de aplicação permitiu não apenas avaliar a aprendizagem dos estudantes, mas também validar os princípios de design que orientaram a intervenção. Nesse sentido, os resultados observados não são compreendidos de forma isolada, mas como evidências da pertinência e da efetividade dos princípios na organização e condução do processo de ensino e aprendizagem.

A validação dos princípios ocorreu de forma progressiva, ao longo dos dois ciclos de aplicação, por meio da análise das produções dos estudantes, das observações em sala de aula e dos registros no diário de campo. Esses diferentes instrumentos possibilitaram identificar mudanças na forma como os estudantes compreendiam e articulavam os conceitos envolvidos, especialmente no que se refere à construção das imagens conceituais.

De modo geral, observou-se que os estudantes passaram a apresentar imagens conceituais mais elaboradas, caracterizadas pela articulação entre diferentes representações, pela incorporação de elementos formais e pela capacidade de estabelecer relações entre conceitos. Essa evolução pode ser interpretada à luz dos níveis de compreensão adotados na pesquisa, nos quais as imagens conceituais transitam de formas mais iniciais e fragmentadas para configurações mais integradas e complexas. Detalhes sobre os níveis Inicial, Intermediário e Avançado podem ser consultados em Silvestre (2025).

Na Figura 3, são apresentadas as imagens conceituais manifestadas pelos estudantes em atividades consideradas centrais em cada unidade do segundo ciclo. Essas atividades foram assim classificadas por exigirem um nível mais elevado de compreensão conceitual, evidenciando a consolidação dos conhecimentos desenvolvidos ao longo do processo.

Figura 3

Imagens dos conceitos das duplas nas atividades chaves das três unidades.

Duplas	Classificação	Atividades												
		1.4a	1.4b 1.4c	1.4e	1.4f	1.5	2.1a	2.2 ^a	2.3b	2.8	3.3c	3.3e	3.5	3.6
D1	Inicial										x			
	Intermediário		x	x			x		x			x		x
	Avançado	x			x	x		x		x			x	
D2	Inicial			x										
	Intermediário		x					x		x	x			
	Avançado	x			x	x	x		x				x	x
D3	Inicial													
	Intermediário		x								x			
	Avançado	x		x	x	x	x	x	x	x		x	x	x

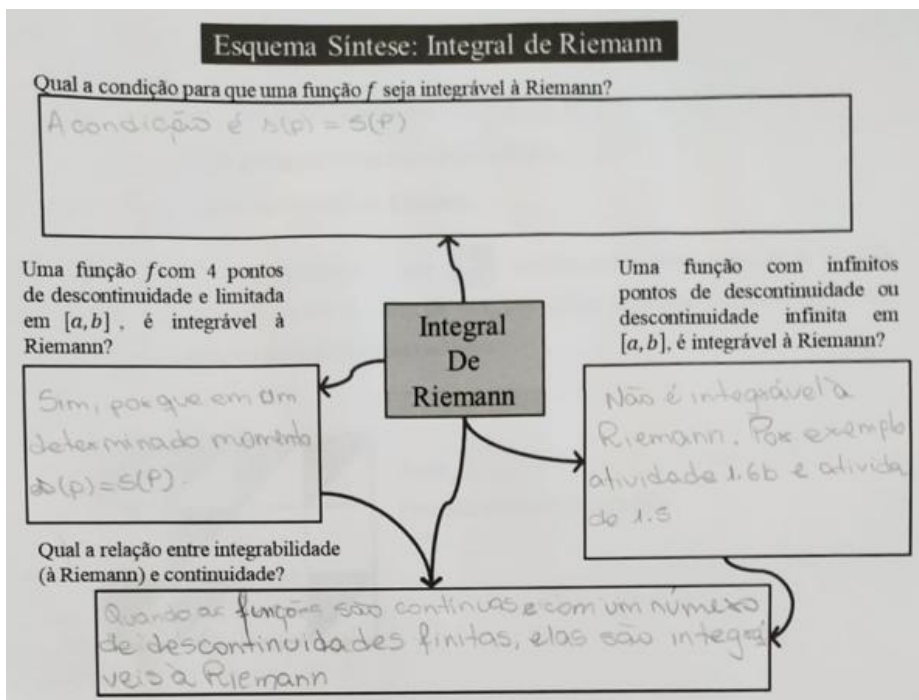
Os dados apresentados no Quadro 3 evidenciam que, nas atividades consideradas centrais em cada unidade, houve predominância de classificações nos níveis intermediário e avançado, indicando que os estudantes conseguiram, em diferentes momentos, mobilizar compreensões mais profundas dos conceitos trabalhados. Tal resultado sugere que a organização das atividades,

orientada pelos princípios de design, favoreceu a construção de significados mais consistentes.

Além disso, os mapas mentais elaborados ao final das unidades mostraram-se particularmente relevantes para a análise da aprendizagem. Esses esquemas de síntese tinham como objetivo explicitar as relações entre os conceitos trabalhados, favorecendo a organização do conhecimento de forma integrada. A Figura 4 apresenta um exemplo de esquema síntese produzido ao final da unidade sobre integral de Riemann, com a resposta da dupla D3. Nele, observa-se a articulação entre diferentes elementos conceituais, como a noção de área, as somas de Riemann, o conceito de limite e a definição formal de integral. Esse tipo de representação evidencia a capacidade dos estudantes de estabelecer conexões entre diferentes aspectos do conteúdo, indo além de uma compreensão fragmentada.

Figura 4

Esquema síntese sobre o conceito de integral de Riemann da dupla D3.



Esse exemplo ilustra como os estudantes se apropriaram dos esquemas de síntese, utilizando-os para organizar e relacionar conceitos de forma mais

estruturada. Observa-se, contudo, que a resposta ainda se apresenta de forma direta, com menor nível de formalização. Ainda assim, produções dessa natureza reforçam o papel desses momentos de sistematização na consolidação das aprendizagens e na construção de compreensões mais integradas.

A análise qualitativa das produções também revelou que os estudantes passaram a utilizar com maior frequência argumentos baseados em representações gráficas e interpretações conceituais, em contraste com abordagens predominantemente algorítmicas. Esse movimento está diretamente relacionado aos princípios de design que orientaram a intervenção, como a valorização de múltiplas representações, a utilização de raízes cognitivas e a proposição de atividades que favorecem a abstração e a generalização.

Outro aspecto relevante refere-se ao papel da autonomia discente, evidenciado pela participação ativa dos estudantes nas discussões, na formulação de conjecturas e na justificativa de seus raciocínios. Esse comportamento pode ser associado tanto aos princípios substantivos quanto aos procedimentais, que incentivaram a construção de um ambiente de aprendizagem mais investigativo e colaborativo.

Cabe destacar que, embora tenham sido observados avanços significativos, algumas dificuldades persistiram, especialmente no que se refere à formalização rigorosa de determinados conceitos. No entanto, tais limitações são esperadas em contextos de aprendizagem de matemática avançada e não comprometem a validade dos resultados, mas, ao contrário, reforçam a complexidade do processo e a necessidade de abordagens didáticas que considerem essas dificuldades.

Dessa forma, os resultados obtidos permitem afirmar que os princípios de design elaborados neste estudo foram validados tanto do ponto de vista da organização da intervenção quanto de seus efeitos na aprendizagem dos estudantes. Essa validação não se limita à constatação de melhorias no desempenho, mas envolve a evidência de mudanças qualitativas nas formas de pensar, representar e compreender os conceitos matemáticos, o que reforça o potencial desses princípios como orientadores de práticas pedagógicas em contextos semelhantes.

Generalização heurística dos princípios de design

A etapa final deste estudo consistiu na organização e sistematização dos princípios de design com vistas à sua generalização. Diferentemente de abordagens tradicionais, nas quais a generalização ocorre por meio de

inferências estatísticas, na PBD ela assume um caráter heurístico, orientado pela identificação de elementos que podem ser reinterpretados e adaptados a outros contextos educacionais (Van den Akker, 1999; Plomp, 2007).

Nesse sentido, a generalização dos princípios de design elaborados nesta pesquisa não implica sua reprodução direta em diferentes cenários, mas sua reorganização em estruturas mais amplas, capazes de orientar novas intervenções respeitando as especificidades de cada contexto. Trata-se, portanto, de um processo de abstração, no qual os princípios são reinterpretados à luz das evidências produzidas ao longo dos ciclos de aplicação.

Com base nas análises realizadas, os princípios de design — tanto substantivos quanto procedimentais — foram sintetizados e organizados em eixos heurísticos, que agrupam orientações com características comuns e evidenciam relações entre diferentes dimensões da intervenção. Na Tabela 2, apresentamos a síntese e organização generalizável dos princípios de design.

Tabela 2

Síntese e organização generalizável dos princípios de design.

Eixo Temático	Descrição do Princípio Generalizado	Princípios Contemplados
Considerar os conhecimentos prévios e dificuldades dos estudantes	Projetar intervenções que levem em conta os conhecimentos prévios, as dificuldades conceituais recorrentes e os diferentes ritmos de aprendizagem, favorecendo a construção de significados e o engajamento dos estudantes.	(1) Considerar as dificuldades em conhecimentos prévios; (2) Aliar software com lápis e papel, evidenciando as suas potencialidades e limitações; (11) Possibilitar aos alunos entenderem as diferenças entre os conceitos de integral de Riemann, primitiva e integral de Lebesgue.
Utilizar múltiplas representações e favorecer abstrações	Integrar representações gráficas, visuais, simbólicas e linguísticas que ampliem a compreensão conceitual, estimulem a generalização e articulem diferentes registros semióticos.	(3) Valorizar as representações gráficas; (6) Propor atividades que possibilitem a busca por padrões, abstrações e generalizações; (10) Propor atividades em ordem crescente de dificuldade que, ao final de um bloco, possibilitem

			abstrações, generalizações e a definição de um conceito.
Explorar raízes cognitivas e conexões conceituais	Ancorar novos conhecimentos em estruturas cognitivas já consolidadas e interligá-los a conteúdos matemáticos anteriores, promovendo um encadeamento lógico e significativo.		(5) Utilizar área como raiz cognitiva para o ensino de integral de Riemann; (9) Propor atividades que coloquem o estudante como responsável por sua aprendizagem.
Estimular a construção de imagens do conceito no nível avançado	Propor atividades que incentivem o desenvolvimento de imagens do conceito articuladas às definições formais, favorecendo interpretações flexíveis, conexões profundas e generalizações.		(7) Construir o conceito de integral como um limite; (8) Propor questões para os estudantes responderem em linguagem natural.
Promover a colaboração e a mediação docente	Valorizar interações colaborativas entre pares e a mediação ativa do professor/pesquisador, criando um ambiente que favoreça a construção coletiva do conhecimento.		(12) Desenvolvimento das atividades em duplas; (13) Professor/Pesquisador atuando como orientador.
Assegurar intencionalidade pedagógica e sequência estruturada	Organizar as atividades de forma sequencial e orientada por objetivos claros, com apoio de esquemas de síntese, em contextos presenciais que favoreçam o engajamento ativo.		(14) Alunos trabalhando de forma autônoma, ou seja, como responsáveis pela sua aprendizagem; (15) Uso do esquema síntese como fechamento de cada unidade; (16) Atividades realizadas de forma presencial.

Os eixos apresentados na Tabela 2 sintetizam dimensões centrais da intervenção, evidenciando a articulação entre conhecimentos prévios, representações, processos de abstração, mediação docente e organização didática. Essa organização permite compreender os princípios de design como um sistema integrado de orientações, e não como elementos isolados.

Ao mesmo tempo, essa sistematização amplia o alcance dos resultados da pesquisa, ao oferecer uma estrutura que favorece sua adaptação a diferentes contextos de ensino. Nesse processo, a generalização assume caráter interpretativo, exigindo que os princípios sejam recontextualizados conforme as especificidades dos estudantes, dos conteúdos e das condições institucionais.

Dessa forma, os eixos heurísticos constituem uma forma de tornar comunicável o conhecimento produzido, preservando sua flexibilidade e potencial de uso em novas investigações e práticas pedagógicas. Mais do que um modelo a ser replicado, tratam-se de orientações que podem subsidiar o planejamento de intervenções em contextos diversos, especialmente no ensino de matemática em níveis mais avançados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como objetivo analisar o processo de elaboração, aplicação, validação e generalização heurística de princípios de design no contexto de uma PBD voltada ao ensino de integrais. A partir dos resultados obtidos, é possível afirmar que os princípios de design constituem um elemento central tanto na organização de intervenções didáticas quanto na produção de conhecimento teórico em Educação Matemática.

No que se refere à elaboração dos princípios, evidenciou-se que sua construção fundamentada na articulação entre revisão de literatura, análise de dificuldades de aprendizagem e trabalho colaborativo com docentes mostrou-se adequada e consistente. Destaca-se, nesse processo, o papel do grupo de colaboração, cuja participação foi essencial para garantir a pertinência pedagógica das propostas e sua viabilidade no contexto real de ensino.

A aplicação dos princípios de design na elaboração do produto educacional revelou seu potencial para orientar a construção de atividades didáticas coerentes e progressivamente estruturadas. Observou-se que tais princípios não apenas subsidiaram a organização das tarefas, mas também influenciaram diretamente a forma como os estudantes se engajaram com os conceitos, favorecendo a construção de significados mais elaborados.

Além disso, a consolidação dos princípios procedimentais ao longo dos ciclos de aplicação, evidenciam o caráter dinâmico da PBD, na qual os elementos da intervenção são continuamente ajustados a partir das evidências produzidas no contexto de uso. Esse movimento reforça a ideia de que os princípios de design não são estáticos, mas se constituem e se refinam no próprio processo investigativo.

No que diz respeito aos efeitos na aprendizagem, os resultados indicaram avanços nas imagens conceituais dos estudantes, que passaram a apresentar compreensões mais articuladas e próximas de níveis intermediário e avançado. Tais evidências sugerem que a estruturação das atividades a partir de princípios de design contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Dessa forma, pode-se afirmar que o objetivo deste trabalho foi atingido, ao evidenciar um percurso metodológico para a elaboração, utilização e generalização de princípios de design, bem como seus efeitos no contexto investigado. Os princípios, validados ao longo de dois ciclos de aplicação, mostraram-se eficazes tanto na organização do produto educacional quanto na promoção de aprendizagens significativas.

Por fim, a generalização heurística dos princípios, organizada em eixos, constitui uma contribuição relevante do estudo, ao possibilitar sua adaptação a outros contextos de ensino. Esse resultado reforça o potencial da PBD para produzir conhecimentos que, embora situados, podem ser reinterpretados e utilizados em diferentes cenários educacionais.

Nesse sentido, para pesquisas futuras, sugere-se investigar a aplicação desses princípios em outros conteúdos da matemática, bem como analisar seu uso em diferentes níveis de ensino e contextos institucionais. Além disso, destaca-se a importância de explorar formas de ampliar a participação dos estudantes na construção e validação de princípios de design, fortalecendo o caráter colaborativo da PBD e ampliando suas possibilidades de contribuição para a Educação Matemática.

AGRADECIMENTO

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo apoio financeiro.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Todos os autores contribuíram para a pesquisa e redação do artigo. IBMS realizou a pesquisa, análise dos dados e redação do texto e VB orientou a pesquisa e contribuiu na análise dos dados, redação e revisão do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que dão suporte aos resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente (IBMS) mediante solicitação.

REFERÊNCIAS

- Apolinar, E. S. (2014). *Significados institucionales y personales del concepto de integral definida de funciones de una variable en una institución educativa de nivel superior* (239 f). Tese de doutorado en Innovación Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey.
- Bisognin, V., & Silvestre, I. B. M. (2025). Características do pensamento matemático avançado: contribuições da pesquisa baseada em design no estudo das integrais de Riemann e de Lebesgue. *Paradigma*, 46(2), e2025030. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025030.id1698>
- Crisostomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional* (546 f). Tese de doutorado en Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In: J. Van den Akker et al. (Eds.), *Educational design research* (pp. 17–51). Routledge.
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2005). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2005*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2008). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2008*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2011). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2011*. <https://www.gov.br/inep>

- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2014). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2014*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2017). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2017*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2021). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2021*. <https://www.gov.br/inep>
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. Routledge.
- Menoncini, L. (2018). *O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área* (228 f). Tese de doutorado, Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Pinto, M. M. F. (1998). *Students' understanding of real analysis* (Tese de doutorado). University of Warwick.
- Plomp, T. (2007). Educational design research: An introduction. In: T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *An introduction to educational design research* (pp. 9–35). SLO.
- Reeves, T. C. (2006). Design research from the technology perspective. In: J. Van den Akker et al. (Eds.), *Educational design research*. Routledge.
- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica* (468 f). Tese de doutorado em Educação, Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Silvestre, I. B. M., & Bisognin, V. (2024). Da integral de Riemann à integral de Lebesgue: Um estudo alicerçado na pesquisa baseada em design. In: *IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IX-SIPEM)* (pp. 1–14). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

<https://www.sbemrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/213>

Silvestre, I. B. M. (2025). *Elaboração, aplicação e generalização de princípios de design no ensino de integrais de Riemann e de Lebesgue* (169 f). Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
<https://doi.org/10.1007/BF00305619>

Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. Springer.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In: J. van den Akker et al. (Eds.), *Design approaches and tools in education and training*. Springer.