

Principios de diseño en la investigación basada en el diseño y la enseñanza de las integrales de Riemann y Lebesgue

Ismael Batista Maidana Silvestre^a 

Vanilde Bisognin^b 

^a Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete (IFFar-AL), Alegrete, RS, Brasil.

^b Universidade Franciscana (UFN), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT), Santa Maria, RS, Brasil.

RESUMEN

Antecedentes: La enseñanza de conceptos matemáticos avanzados, como las integrales, presenta dificultades persistentes relacionadas con la construcción de significados conceptuales, requiriendo enfoques que articulen teoría y práctica. **Objetivos:** Investigar la elaboración, aplicación, validación y generalización heurística de los principios de diseño en el contexto de la Pesquisa Basada en el Diseño (PBD), considerando sus efectos en el aprendizaje. **Diseño:** Estudio cualitativo, realizado según la metodología PBD, con dos ciclos iterativos que implican análisis, desarrollo, implementación y perfeccionamiento de una intervención didáctica. **Ubicación y participantes:** En un programa de formación de profesores de Matemáticas, en la disciplina de Fundamentos del Análisis Matemático, con grupos de estudiantes (2022 y 2023), profesores y un grupo colaborativo. **Recogida y análisis de datos:** Datos recogidos por observaciones en clase, diarios de campo y producciones escritas, analizados cualitativamente con un enfoque en imágenes conceptuales y evidencias de aprendizaje. **Resultados:** Los principios de diseño guiaron la construcción de las actividades y se validaron a lo largo de los ciclos, evidenciando avances en imágenes conceptuales, mayor articulación entre representaciones y desarrollo de autonomía. Su organización en ejes heurísticos ha ampliado el potencial de transferencia. **Conclusiones:** El camino resultó ser consistente para la construcción y uso de principios de diseño, reforzando el papel de la DBP en la integración entre teoría y práctica.

Palabras clave: Pesquisa basada en el diseño; Principios de diseño; integral de Riemann; Integral de Lebesgue; Análisis Matemático.

Design Principles in Design-Based Research and the Teaching of Riemann and Lebesgue Integrals

ABSTRACT

Background: The teaching of advanced mathematical concepts, such as integrals, presents persistent difficulties related to the construction of conceptual

Autor correspondiente: Ismael Batista Maidana Silvestre.

Email: ismael.silvestre@iffarroupilha.edu.br

meanings, requiring approaches that integrate theory and practice. **Objectives:** To investigate the development, implementation, validation, and heuristic generalization of design principles within the context of Design-Based Research (DBR), considering their effects on learning. **Design:** A qualitative study conducted according to the DBR methodology, involving two iterative cycles of analysis, development, implementation, and refinement of a didactic intervention. **Setting and Participants:** The study was carried out in an undergraduate Mathematics teacher education program, in a Mathematical Analysis Foundations course, involving students from two cohorts (2022 and 2023), teachers, and a collaborative research group. **Data collection and analysis:** Data were collected through classroom observations, field notes, and students' written productions, and analyzed qualitatively focusing on conceptual images and evidence of learning. **Results:** The design principles guided the development of the activities and were validated throughout the cycles, showing advances in conceptual images, greater articulation between representations, and increased student autonomy. Their organization into heuristic axes expanded their potential for transfer to other contexts. **Conclusions:** The methodological pathway proved to be consistent for the development and use of design principles, reinforcing the role of DBR in integrating theory and practice.

Keywords: Design-Based Research; Design Principles; Riemann Integral; Lebesgue Integral; Mathematical Analysis.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de Cálculo y Análisis Real ha estado históricamente marcada por dificultades persistentes, tanto por parte de estudiantes como de profesores en cursos de licenciaturas en Matemáticas, especialmente en los cursos de grado (Pinto, 1998; Tall, 2002; Rezende, 2003). Entre los contenidos cubiertos en estos campos, el concepto de integral de Riemann destaca como uno de los más desafiantes, presentando bajos niveles de rendimiento en evaluaciones a gran escala, como el Examen Nacional de Rendimiento Estudiantil (Enade).

Los datos de diferentes ediciones de Enade muestran que las preguntas relacionadas con la integral de Riemann han sido sistemáticamente clasificadas como difíciles, con índices de facilidad que oscilan entre 0,16 y 0,30. Esta recurrencia apunta a la existencia de un problema sistémico en la enseñanza y el aprendizaje de este concepto, como se resume en la Tabla 1 (Instituto Nacional de Estudios e Investigación Educativa Anísio Teixeira [INEP], 2005, 2008, 2011, 2014, 2017, 2021).

Tabla 1

Índice de facilidad y clasificación de preguntas sobre la integral de Riemann en pruebas de Enade.

Año	Pregunta	Índice de facilidad	Clasificación
2005	26	Entre 0,16 e 0,40	Difícil
2008	19	0,26	Difícil
2011	17	0,22	Difícil
2014	10	0,30	Difícil
2017	9	0,25	Difícil
	23	0,22	Difícil
2021	No hubo	-	-

Este escenario no se limita a dificultades ocasionales en la resolución de ejercicios, sino que muestra una fragilidad más amplia en la construcción de conceptos y significados matemáticos. En particular, se observa que muchos estudiantes tienen dificultades para articular diferentes representaciones del concepto de integral, gráfica, algebraica y conceptual, así como para comprender su naturaleza como límite. Esta situación refuerza la idea de que el problema no radica solo en el contenido en sí, sino en las formas en que se ha abordado en el contexto educativo.

La relevancia de la integral de Riemann en la formación del profesor de Matemáticas es indiscutible, ya que este concepto constituye la base para el desarrollo de ideas más avanzadas, como la integral de Lebesgue, además de desempeñar un papel central en la comprensión del propio Cálculo.

La integral de Riemann, formalizada por Bernhard Riemann, constituye la base para la comprensión de conceptos más abstractos del Análisis Matemático. La integral de Lebesgue, desarrollada por Henri Lebesgue, amplía esta noción introduciendo una nueva forma de medición basada en la teoría de la medida, permitiendo abordar funciones y conjuntos que exceden el alcance del enfoque riemanniano.

Sin embargo, a pesar de su relevancia en la educación matemática, investigaciones en el área de la Educación Matemática han indicado que su enseñanza sigue estando fuertemente centrada en procedimientos algorítmicos, en detrimento de la construcción de significados conceptuales (Crisostomo, 2012; Apolinar, 2014; Menoncini, 2018). Esta predominancia de enfoques procedimentales tiende a dificultar la comprensión de aspectos más abstractos,

especialmente aquellos relacionados con la noción de límite y la generalización de ideas, reforzando la necesidad de repensar las prácticas pedagógicas en este campo.

Además, existe una laguna en la literatura respecto a la sistematización de directrices didácticas que pueden comunicarse y adaptarse a diferentes contextos docentes. Muchos estudios describen intervenciones específicas, pero no siempre explican principios que guían su elaboración y que puedan ser apropiados, o incluso adaptados por otros profesores e investigadores en sus contextos laborales. Estudios recientes han señalado la relevancia de hacer explícitos estos principios como una forma de ampliar el alcance de las intervenciones y favorecer su transferencia a otros entornos educativos (Silvestre, 2024, 2025; Bisognin & Silvestre, 2025). En este sentido, resulta relevante investigar no solo las propuestas didácticas, sino también las bases que las apoyan y permiten su traslado a otros escenarios educativos.

En este contexto, la DBP se presenta como un enfoque metodológico prometedor para abordar desafíos educativos complejos. Esta metodología se caracteriza por el desarrollo, implementación y análisis de intervenciones en contextos educativos reales, articulando la producción de conocimientos teóricos y soluciones prácticas (Reeves, 2006; Plomp, 2007). A diferencia de los enfoques experimentales tradicionales, la DBP busca integrar teoría y práctica de manera iterativa y colaborativa.

Esta característica hace que la DBP sea especialmente adecuada para tratar problemas de naturaleza compleja y sistémica, como los presentes en la enseñanza de conceptos avanzados de las Matemáticas, en los que múltiples factores, cognitivos, didácticos e institucionales, están interrelacionados. Al actuar en contextos reales de enseñanza, la DBP permite no solo comprender estos problemas, sino también intervenir en ellos de manera razonada y reflexiva.

Uno de los elementos estructurantes de la DBP es el trabajo colaborativo, que implica la participación conjunta de investigadores y profesores en la identificación del problema, en el diseño de intervenciones y en el análisis de los resultados. Esta colaboración contribuye a la construcción de soluciones que dialogan con las verdaderas demandas de la práctica docente, basándose en referencias teóricas consistentes.

Otro aspecto central de este enfoque es la elaboración de principios de diseño, entendidos como orientaciones teórico-prácticas que surgen del proceso investigativo y que pueden guiar intervenciones en diferentes contextos

educativos. Estos principios no son prescripciones rígidas, sino directrices flexibles, cuya construcción puede derivar de múltiples fuentes, como la revisión bibliográfica, el análisis de problemas, las contribuciones colaborativas de grupos y los resultados obtenidos en los ciclos de aplicación y perfeccionamiento de intervenciones (Van den Akker, 1999).

En particular, los principios de diseño originarios de la revisión bibliográfica juegan un papel central, ya que permiten transformar los resultados de la investigación en directrices que pueden utilizarse en la práctica docente. Su naturaleza heurística permite adaptaciones a diferentes contextos, manteniendo al mismo tiempo un vínculo con los fundamentos teóricos que les dieron origen. Estudios recientes han evidenciado este potencial al sistematizar principios derivados de intervenciones en contextos docentes reales, incluso dentro del ámbito de esta investigación (Silvestre, 2024, 2025; Bisognin & Silvestre, 2025). Así, más allá de las directrices finales, los principios se configuran como elementos mediadores entre teoría, práctica e investigación.

PBD responde a este desafío proponiendo ciclos iterativos de análisis, diseño, implementación y evaluación, en los que los principios de diseño funcionan como elementos articulantes entre teoría, práctica e investigación. La elaboración de estos principios, en esta investigación, partió del análisis de las dificultades de los estudiantes, la revisión de literatura especializada y la colaboración entre investigadores y profesores. Este proceso colaborativo es un principio fundamental de la DBP, ya que garantiza que las intervenciones sean simultáneamente fundamentadas teóricamente y pedagógicamente viables. Los principios resultantes guiaron la construcción de actividades didácticas orientadas a la comprensión conceptual de las integrales, priorizando el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

El presente trabajo es el resultado de una investigación doctoral que tuvo como uno de los problemas: ¿cómo elaborar, validar y generalizar principios de diseño en un PBD centrado en la enseñanza de integrales de Riemann y Lebesgue? A partir de este problema, el objetivo de este artículo es analizar el proceso de elaboración, aplicación y generalización de principios de diseño desarrollados en un PBD en el contexto de la enseñanza de integrales. También busca debatir los impactos de estos principios tanto en el aprendizaje del estudiante como en la producción de conocimiento en el campo de la Educación Matemática, evidenciando su potencial para guiar futuras intervenciones en contextos similares.

Los principios de diseño se desarrollaron a partir de la articulación entre la revisión bibliográfica, el análisis de dificultades de aprendizaje

relacionadas con integrales y el trabajo colaborativo con profesores que participaban en un grupo de cooperación. Estos principios guiaron la construcción de actividades didácticas, que posteriormente se aplicaron en dos clases diferentes. A lo largo de este proceso, los principios se refinaron basándose en los resultados observados y se organizaron en ejes, con vistas a su generalización.

ASPECTOS GENERALES DE LA METODOLOGÍA BPD

La DBP es un enfoque metodológico orientado a investigar e intervenir en problemas educativos complejos, desarrollado en contextos reales de enseñanza. A diferencia de las metodologías experimentales tradicionales, que tienden a aislar variables en entornos controlados, la DBP actúa en entornos de aprendizaje auténticos, promoviendo la articulación entre teoría y práctica (Reeves, 2006; Plomp, 2007).

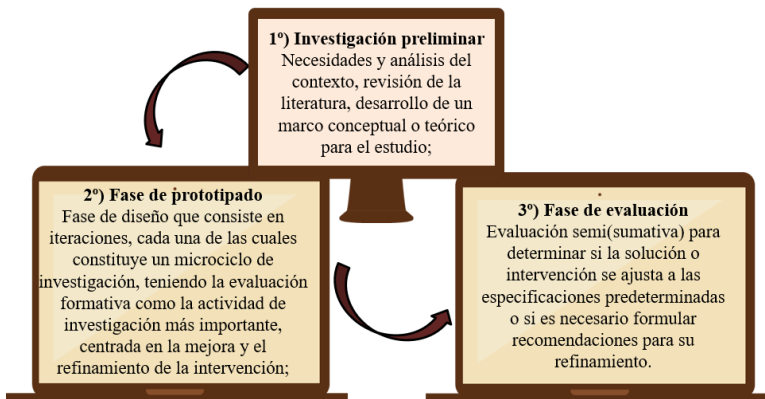
Su objetivo principal es doble: (i) desarrollar soluciones prácticas a desafíos educativos concretos; y (ii) producir conocimientos teóricos relevantes que puedan comunicarse a la comunidad académica (Van den Akker, 1999). Este doble propósito otorga a la DBP un carácter particular, en el que la investigación y la intervención se desarrollan de forma integrada.

Una de las principales características de la DBP es su carácter cíclico e iterativo. En general, la investigación se organiza en fases que incluyen: (a) análisis del problema educativo; (b) elaboración del diseño de la intervención e implementación en un contexto real; y (c) evaluación y refinamiento. Estos ciclos no son lineales, sino que se alimentan mutuamente de forma continua, lo que permitió ajustes progresivos en las intervenciones y en el conocimiento producido (Plomp, 2007; Gravemeijer; Cobb, 2006). La Figura 1 muestra las fases de un ciclo de investigación según la DBP.

Este carácter iterativo distingue la DBP de otros enfoques de investigación en educación. Mientras que los estudios experimentales buscan controlar variables para establecer relaciones causales y la investigación descriptiva prioriza el análisis de fenómenos, la DBP asume la complejidad de los contextos educativos y busca comprenderlos mediante la intervención. En este sentido, no se trata de eliminar variables, sino de comprender cómo interactúan diferentes elementos, cognitivos, didácticos e institucionales, en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Figura 1

Fases de la pesquisa basada en el diseño.



Además, la DBP se caracteriza por su naturaleza colaborativa, que implica la participación conjunta de investigadores y docentes en la identificación de problemas, en la elaboración de intervenciones y en el análisis de resultados. Este trabajo colaborativo contribuye a la construcción de soluciones que dialogan con las verdaderas demandas de la práctica docente, basándose en referencias teóricas consistentes.

Otro aspecto relevante se refiere a los criterios de calidad de la PBD, que incluyen validez, practicidad y efectividad (Plomp, 2007). Estos criterios refuerzan el compromiso de la metodología tanto con la producción de conocimiento como con su aplicabilidad en contextos reales.

En PBD, los principios de diseño son el centro de atención. No solo surgen como resultados de investigación, sino que se elaboran, prueban y refinan a lo largo de ciclos iterativos. Inicialmente, pueden formularse basándose en la literatura y el análisis del problema; Posteriormente, se enfrentan a la práctica, se ajustan y, finalmente, se sistematizan como contribuciones teóricas y prácticas de la investigación. De este modo, los principios de diseño constituyen elementos articulantes entre teoría, intervención y producción de conocimiento en DBP.

En el siguiente punto detallaremos los principios de diseño: elaboración, aplicación y generalización.

Principios de diseño: elaboración, aplicación y generalización

Los principios de diseño pueden entenderse como directrices fundamentadas teóricamente y validadas empíricamente, destinadas a guiar la elaboración de intervenciones educativas. No se trata de prescripciones rígidas, sino de directrices que conectan la literatura científica, la experiencia docente, el análisis del problema educativo y los resultados obtenidos en contextos concretos de enseñanza (Van den Akker, 1999; Reeves, 2006).

En este sentido, los principios de diseño juegan un papel central en la DBP, ya que permiten transformar los resultados de la investigación en directrices que pueden utilizarse en la práctica docente. Al mismo tiempo, constituyen una contribución teórica relevante, al sistematizar el conocimiento producido en formas comunicables y útiles para la comunidad académica (Reeves, 2006; McKenney & Reeves, 2012).

Su elaboración representa un momento fundamental en el proceso investigativo, ya que establece la articulación entre el problema estudiado, el marco teórico y las soluciones propuestas. Estos principios pueden surgir de diferentes fuentes, como la revisión bibliográfica, el análisis de dificultades de aprendizaje, la experiencia docente y los resultados obtenidos a lo largo de los ciclos de implementación y refinamiento (Gravemeijer; Cobb, 2006). Esta multiplicidad de orígenes evidencia su carácter dinámico y contextualizado.

Un aspecto relevante en la discusión se refiere a la calidad de los principios de diseño. Para ser efectivos, los principios deben tener una base teórica consistente, conexión con el problema educativo investigado, potencial para la aplicación práctica y apertura a la adaptación en diferentes contextos. Además, deben ser lo suficientemente específicos para guiar acciones, pero también flexibles para no limitarse a un único escenario de aplicación (Van den Akker, 1999).

La literatura también distingue dos tipos de principios de diseño: sustantivo y procedimental. Los principios sustantivos se refieren a las características de los contenidos, actividades y materiales didácticos, es decir, a lo que debería conformar la intervención. A su vez, los principios procedimentales se refieren a las formas de organización, implementación y conducción de actividades, indicando cómo debe operacionalizarse la intervención. Ambos son complementarios y fundamentales para la articulación entre teoría, análisis de problemas y práctica pedagógica (Gravemeijer; Cobb, 2006).

Los principios de diseño juegan un papel central en la DBP debido a su aplicabilidad práctica, ya que apoyan a profesores e investigadores en el diseño

de actividades y materiales didácticos en diferentes contextos. Al mismo tiempo, constituyen una contribución teórica relevante, al sistematizar el conocimiento producido en formas comunicables y útiles para la comunidad académica (Reeves, 2006). En este sentido, actúan como mediadores entre la teoría, la práctica y la investigación.

Otro aspecto relevante para destacar en relación con los principios de diseño es la generalización. Esto se debe a que las intervenciones de DBP ocurren en contextos específicos, la generalización no ocurre en el sentido estadístico tradicional, sino mediante la organización de principios en ejes conceptuales más amplios. Estos ejes permiten a investigadores y profesores adaptar las directrices a nuevos contextos educativos, respetando sus especificaciones. De este modo, los principios del diseño se convierten en instrumentos transferibles, capaces de inspirar nuevas prácticas pedagógicas sin imponer modelos rígidos.

La naturaleza heurística de los principios de diseño es una característica clave y distintiva. A diferencia de los modelos cerrados, los principios funcionan como directrices abiertas que guían la toma de decisiones sin determinar rígidamente los caminos a seguir. Esta característica favorece procesos de adaptación y reinterpretación, permitiendo su uso en diferentes contextos educativos (Reeves, 2006).

Esta naturaleza está directamente relacionada con su transferibilidad. Teniendo en cuenta que las intervenciones para DBP ocurren en contextos específicos, la generalización no ocurre en términos estadísticos, sino mediante la organización de principios en ejes conceptuales más amplios. Estos ejes permiten a investigadores y profesores adaptar las directrices a nuevos contextos, respetando sus especificidades (Plomp, 2007).

A pesar de su potencial, los principios de diseño también tienen limitaciones. Su naturaleza contextual implica que no pueden aplicarse directa ni acríticamente en ningún escenario, requiriendo interpretación y adaptación por parte de los profesores. Además, su elaboración depende de rigurosos procesos investigativos, que pueden limitar su producción en ciertos contextos (McKenney; Reeves, 2012). Aun así, tales limitaciones no reducen su relevancia, sino que ponen de manifiesto la necesidad de una comprensión crítica de su uso.

En este contexto, los principios del diseño también son relevantes para la formación inicial y continua de los docentes, ya que ofrecen referencias para la reflexión sobre la práctica pedagógica. Al comprender los fundamentos que

guían la elaboración de actividades, los docentes pueden desarrollar mayor autonomía en la elaboración de propuestas didácticas, ampliando su capacidad de adaptación a diferentes contextos docentes.

En resumen, los principios del diseño se configuran como el elemento central articulador de la DBP, traduciendo los resultados de la investigación en directrices prácticas y, al mismo tiempo, contribuyendo a la construcción del conocimiento teórico en el ámbito educativo. Su elaboración, aplicación, refinamiento y generalización constituyen un poderoso camino metodológico para afrontar desafíos complejos de enseñanza y aprendizaje, especialmente en áreas que requieren un alto nivel de abstracción, como las matemáticas avanzadas.

Estas características hacen que la DBP sea especialmente adecuada para afrontar problemas de naturaleza sistémica, como los presentes en la enseñanza de conceptos avanzados de Matemáticas, en los que factores cognitivos, didácticos e institucionales están interrelacionados. Al operar en contextos reales, este enfoque permite no solo comprender estos problemas, sino también proponer y probar soluciones razonadas, contribuyendo a la transformación de las prácticas educativas.

PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

La investigación actual se desarrolló en el curso de Grado en Matemáticas del Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete (IFFar-CA), dentro de la disciplina de Fundamentos del Análisis Matemático. El proceso de investigación contó con la colaboración de profesores de la institución, el Grupo de Pesquisa Basada en Diseño de Alegrete (GPBDAL) y el Grupo de Estudio e Pesquisa en Diseño Educativo (GEPDE-UFN), caracterizado como una investigación colaborativa, en línea con las suposiciones de la DBP.

De acuerdo con este enfoque metodológico, la investigación se organizó en ciclos iterativos que implicaron análisis de problemas, elaboración del diseño de intervenciones, implementación en un contexto real y evaluación con vistas a su refinamiento. Este movimiento cíclico permitió no solo la mejora progresiva de la secuencia didáctica, sino también la construcción, validación y sistematización de los principios de diseño a lo largo de todo el proceso.

La identificación de los principios de diseño comenzó con el análisis del problema educativo, precedido por una revisión bibliográfica centrada en la enseñanza de integrales. Esta revisión pretendía mapear las contribuciones teóricas y empíricas relevantes, y fue posteriormente complementada por

debates en el grupo colaborativo, que también consideraban las dificultades de los estudiantes en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Además, el análisis del problema incluyó evidencia de bajas tasas de rendimiento en evaluaciones nacionales, observaciones de profesores y la experiencia del investigador en el aula.

También se tuvieron en cuenta dificultades específicas de los estudiantes, identificadas mediante evaluaciones diagnósticas e informes de profesores, como lagunas en conocimientos previos, obstáculos en la transición del pensamiento algebraico al conceptual y limitaciones en la articulación entre diferentes representaciones matemáticas. Este conjunto de elementos permitió una comprensión más amplia y contextualizada de las dificultades a las que se enfrentaban los estudiantes.

A partir de este conjunto de evidencias, se desarrollaron principios de diseño que comenzaron a guiar la construcción de la secuencia didáctica. En este contexto, los principios asumieron un papel estructurante, no solo como directrices para el desarrollo de actividades, sino también como hipótesis de intervención a probar y refinar a lo largo de los ciclos de investigación. La secuencia didáctica fue concebida como un producto educativo de carácter instrumental, mientras que los principios de diseño constituyeron la principal contribución teórica y metodológica del estudio, con potencial de aplicación en diferentes contextos educativos.

La elaboración de las actividades relacionadas con las unidades temáticas integrales de Riemann, primitiva e integral de Lebesgue, estuvo guiada por estos principios. En este proceso, se priorizó el uso de múltiples representaciones, especialmente gráficas, la exploración de la noción de área como raíz cognitiva, la organización de tareas en niveles crecientes de complejidad y la inclusión de momentos de sistematización orientados a la abstracción y generalización. La construcción de las actividades se llevó a cabo en estrecha colaboración con los profesores de la disciplina, asegurando su viabilidad y relevancia pedagógica.

Se llevaron a cabo dos ciclos de aplicación iterativos: el primero en 2022 (Versión 1 del producto educativo) y el segundo en 2023 (Versión 2). Cada ciclo comprendía las etapas de planificación, implementación en clases reales y análisis de los resultados, seguidos de perfeccionamientos en la secuencia didáctica y en los propios principios de diseño. Este proceso permitió validar y ajustar progresivamente los principios, consolidándose como elementos centrales de la investigación.

La recopilación de datos incluyó observaciones en el aula, registros de diarios de campo y análisis de las producciones de los estudiantes. Estos datos permitieron evaluar tanto el impacto de las intervenciones en el aprendizaje como la relevancia de los principios de diseño como guías del proceso didáctico.

Así, los procedimientos metodológicos adoptados no solo permitieron la elaboración e implementación de una secuencia didáctica, sino que también constituyen un modelo replicable para la construcción, validación y perfeccionamiento de principios de diseño en diferentes contextos educativos. Este enfoque refuerza el carácter heurístico y el potencial de generalización de estos principios, que se presentan y discuten en la sección de resultados y debates.

Este camino metodológico evidencia una posibilidad estructurada de elaboración y uso de principios de diseño en la investigación educativa, contribuyendo no solo al contexto investigado, sino también a la propuesta de caminos metodológicos en futuros estudios que adopten la DBP.

Esta investigación fue presentada al Comité de Ética en la Investigación (CEP) de la Universidad Franciscana y comenzó tras su aprobación, de acuerdo con la Resolución 510/16 del Consejo Nacional de Ética en la Investigación (CONEP).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta sección está organizada de tal manera que explique el camino de elaboración, uso, validación y generalización de los principios de diseño desarrollados en esta investigación. Desde el punto de vista de la enseñanza de la integral de Riemann y la integral de Lebesgue, esta elaboración es especialmente relevante, considerando las dificultades recurrentes de los estudiantes en la transición entre interpretaciones geométricas intuitivas, como la noción de área bajo la curva, y la formalización analítica basada en límites, sumas y propiedades estructurales de funciones. En este contexto, los estudios sobre pensamiento matemático avanzado indican que el aprendizaje de estos conceptos requiere la construcción de imágenes conceptuales robustas, articuladas con definiciones formales y diferentes registros de representación matemática (Tall & Vinner, 1981; Tall, 2002).

En este sentido, los principios de diseño desarrollados en esta investigación pueden entenderse como respuestas estructuradas a estas dificultades, que guían la construcción de un camino didáctico que favorece la articulación entre intuición, representación y formalización. Así, inicialmente, se presenta el proceso de construcción de los principios sustantivos, que

evidencian su origen en la articulación entre el análisis de problemas, la revisión bibliográfica y la colaboración docente. A continuación, se discute cómo estos principios guiaron la elaboración de actividades didácticas, destacando su materialización en el producto educativo. Posteriormente, se analizan los procesos de aplicación y perfeccionamiento de la intervención, momento en el que emergen los principios procedimentales. A continuación, se presentan los efectos en el aprendizaje del alumno, basándose en el análisis de las producciones e imágenes conceptuales desarrolladas. Finalmente, se aborda la generalización heurística de los principios, que evidencian su potencial para su transferencia a otros contextos educativos.

Elaboración de los principios iniciales de diseño

La construcción de los principios de diseño se basó en la articulación entre tres elementos centrales: el análisis del problema educativo, la revisión bibliográfica y el trabajo colaborativo con los profesores de la disciplina. Este proceso pone de manifiesto una característica fundamental de la DBP, en la que los principios no se definen a priori, sino que surgen de la interacción entre teoría, práctica y contexto.

En relación con la revisión bibliográfica, se realizó una encuesta sistemática en dos repositorios ampliamente utilizados en el área: la Biblioteca Digital Brasileña de Tesis y Disertaciones (BDTD) y el Catálogo CAPES de Tesis y Disertaciones. Los términos "integral definida", "integral de Riemann" y "integral de Lebesgue" se usaron como descriptores, con la delimitación para estudios de naturaleza académica stricto sensu. En Silvestre (2025), se pueden encontrar los detalles de este proceso.

La elección de tesis y disertaciones se debió a que estos estudios presentan descripciones más detalladas de los procedimientos metodológicos y los resultados obtenidos, permitiendo un análisis profundo de las estrategias docentes y las dificultades de aprendizaje asociadas al tema. Además, se priorizó la selección de estudios nacionales, considerando la proximidad de contextos educativos y la posibilidad de identificar prácticas y resultados más directamente relacionados con la realidad de esta investigación.

La búsqueda inicial dio lugar a un amplio conjunto de obras, que pasaron por un proceso de selección. Inicialmente, se excluyeron los estudios no relacionados con el enfoque de la investigación, así como los estudios duplicados. A continuación, se leyeron los resúmenes y se descartaron aquellos que trataban exclusivamente aplicaciones matemáticas, que no implicaban intervenciones didácticas o que se dirigían a otros niveles educativos. Tras este

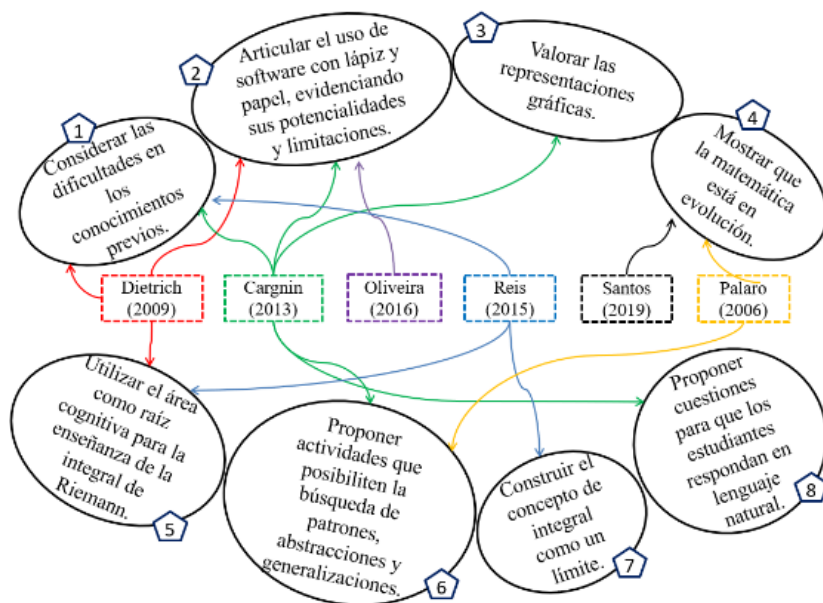
proceso, se seleccionaron seis estudios considerados los más relevantes para la investigación.

El análisis de estos trabajos nos permitió identificar elementos recurrentes relacionados con las dificultades de los estudiantes y las estrategias didácticas empleadas, como limitaciones en los conocimientos previos, dificultades en la articulación entre representaciones, desafíos en el uso de tecnologías y obstáculos en la comprensión conceptual de los procesos implicados. Estos elementos no se incorporaron directamente, sino que se reinterpretaron como directrices orientativas, dando lugar a los principios iniciales de diseño.

Este movimiento demuestra que los principios del diseño no corresponden a una simple síntesis de la literatura, sino a un proceso de transformación de resultados empíricos y teóricos en directrices operativas para la enseñanza. En este sentido, los principios constituyen una forma de traducir el conocimiento producido en investigaciones previas en elementos aplicables al contexto educativo. En la Figura 2, presentamos la síntesis de los principios de diseño elaborados a partir de la revisión bibliográfica.

Figura 2

Síntesis de principios de diseño basada en la revisión bibliográfica.



A partir de esta base inicial, el conjunto de principios se amplió mediante el trabajo colaborativo con docentes, quienes contribuyeron con su experiencia y con el análisis de las especificidades del contexto investigado. Este proceso condujo a la propuesta de tres nuevos principios: (i) promoción del protagonismo estudiantil; (ii) organización de actividades en niveles crecientes de complejidad; y (iii) explicación de las distinciones entre integral de Riemann, integral primitiva e integral de Lebesgue. Con esto, se consolidó un conjunto de once principios sustantivos. La incorporación de estos nuevos principios resalta el papel central del contexto en la construcción de los principios de diseño, reforzando su carácter situado y su sensibilidad a las verdaderas demandas de la enseñanza.

Como ejemplo de este proceso, destacamos el caso de estudios que reportaron dificultades en el uso de recursos computacionales y limitaciones en el conocimiento previo de los estudiantes, que fueron reinterpretados como principios relacionados con la articulación entre diferentes recursos didácticos y la consideración de las dificultades conceptuales de los estudiantes.

Así, la elaboración de principios de diseño puede entenderse como un proceso iterativo de análisis, selección, interpretación y resignificación de los resultados literarios, articulado con la experiencia docente y las exigencias del contexto investigado.

Uso de principios sustantivos en la elaboración de actividades

Los principios de diseño elaborados actuaron como elementos estructuradores en la construcción de las actividades que conformaban el producto educativo, desempeñando el papel de mediadores entre las referencias teóricas adoptadas, el análisis del problema educativo y las decisiones didácticas concretas. En este sentido, su función no se limitaba a la orientación general de la propuesta, sino que se materializaba en elecciones específicas relacionadas con la organización, la naturaleza y la evolución de las tareas.

La elaboración de las actividades se llevó a cabo de manera articulada a las tres unidades temáticas de la secuencia didáctica: integral de Riemann, integral primitiva e integral de Lebesgue, cada una estructurada en base a los principios sustantivos definidos en la etapa anterior. Este proceso se desarrolló de forma iterativa y colaborativa, con discusiones en el grupo de profesores, en las que se analizó la adecuación de cada propuesta a la realidad de la disciplina y a los objetivos de aprendizaje previstos, tal como se describe con más detalle en Silvestre (2025).

A diferencia de los enfoques en los que los contenidos se organizan a partir de una lógica estrictamente formal, la construcción de las actividades en este estudio se basó en la necesidad de promover la comprensión conceptual, lo que implicaba reorganizar el camino didáctico a la luz de los principios establecidos. Así, cada principio se tradujo en decisiones pedagógicas concretas, evidenciando su naturaleza operativa.

Un ejemplo central se refiere al principio de usar la noción de área como raíz cognitiva para la integral de Riemann. Este principio guiaba la elaboración de las actividades iniciales, en las que los estudiantes eran guiados para estimar áreas de regiones planas mediante sucesivas aproximaciones. Este enfoque permitió la construcción de significados intuitivos que sirvieron de base para la posterior formalización del concepto de integral como límite de sumas.

De forma complementaria, el principio de valorar múltiples representaciones estuvo presente a lo largo de la secuencia, asegurando que los estudiantes se movieran entre registros gráficos, algebraicos, numéricos y verbales. Esta articulación resultó fundamental para la comprensión de las sumas de Riemann, así como para la distinción entre diferentes interpretaciones de la integral, un aspecto recurrente en las dificultades identificadas en la literatura y en la propia investigación.

Otro principio estructurador era la organización de las actividades en niveles crecientes de complejidad. La secuencia se planificó para comenzar con tareas exploratorias, de naturaleza más intuitiva, avanzando progresivamente hacia situaciones que requerían un nivel más alto de abstracción y formalización. Esta conexión favoreció procesos de generalización y contribuyó a la construcción de imágenes conceptuales más elaboradas.

Para ilustrar cómo utilizamos los principios de diseño en la construcción del producto educativo, tenemos la actividad 1.3 de la Unidad 1, sobre el concepto de integral de Riemann, en la que se consideraron los principios de diseño 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 y 10.

Actividades 1.3: Consideremos la región limitada por $Af(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

- a) Rango de descomposición $I = [0, 1]$ en la mitad y se encuentra el área aproximada de la región A calculando el área, a partir de rectángulos, por ausencia y por exceso.
- b) Rango de descomposición $I = [0, 1]$ en 3 partes iguales y se encuentra el área aproximada de la región A calculando el área, a partir de

rectángulos, por ausencia y por exceso. Compara los resultados con los que aparecen en la letra a.

- c) Rango de descomposición $I = [0, 1]$ en 4 partes iguales y se encuentra el área aproximada de la región A calculando, a partir de rectángulos, el área por la ausencia y por el exceso. Compáralo con resultados anteriores. ¿Qué observas?
- d) Puedes ver mejor el resultado anterior usando *GeoGebra*. Rellena la tabla. (Para ver los resultados, simplemente mueva el deslizador de la *Applet*).

Número de rectángulos	5	10	15	20	30	50
Área por falta						
Área por exceso						

- e) ¿Qué observas de la relación entre la suma de ausencia y exceso a medida que n (número de rectángulos) aumenta?
- f) Si dividimos el intervalo $I = [0, 1]$ en partes iguales, ¿cuál es la expresión del área aproximada de la región A por ausencia y por exceso? ¿Qué ocurre cuando n crece indefinidamente?

La Actividad 1.3 ejemplifica claramente la articulación entre diferentes principios de diseño. En él, los estudiantes exploran aproximaciones del área bajo la curva $f(x) = x^2$, no intervalo $[0, 1]$, mediante sumas menores y superiores, variando el número de particiones. El uso del software *GeoGebra* mejoró la visualización del proceso, permitiendo observar la convergencia de las aproximaciones.

Además, la actividad lleva a los estudiantes a generalizar a un número arbitrario de particiones, promoviendo la transición del razonamiento empírico al formal. En este sentido, se observa la acción simultánea de diferentes principios, como la valoración de representaciones, la progresión en los niveles de dificultad y la promoción de abstracciones y generalizaciones.

Otro aspecto relevante concierne a la incorporación del principio de promoción de la autonomía estudiantil, operacionalizado a través de preguntas abiertas y la propuesta de situaciones en las que se animaba a los estudiantes a formular conjeturas, poner a prueba hipótesis y justificar su razonamiento. Este movimiento estuvo acompañado por el principio de la mediación docente como guía, en el que el docente actuaba como facilitador del proceso, estimulando discusiones e intervenciones específicas, en lugar de proporcionar respuestas ya preparadas.

La elaboración de las actividades también contó con la contribución del grupo colaborativo, que desempeñó un papel fundamental en la validación de las propuestas y en la adaptación al contexto del aula. Este proceso permitió anticipar dificultades, ajustar el nivel de complejidad de las tareas y asegurar la viabilidad de la intervención, reforzando el carácter colectivo y situado de la construcción de los principios y su aplicación.

Así, el uso de principios de diseño en la elaboración de actividades evidencia su función central en la DBP: más que directrices abstractas, se configuran como herramientas operativas que permiten transformar fundamentos teóricos y evidencia empírica en prácticas pedagógicas concretas, coherentes y potencialmente efectivas.

Aplicación y aparición de principios procedimentales

En el contexto de esta investigación, los principios del diseño procedimental no se configuraron exclusivamente como elementos emergentes de la aplicación, sino como componentes desarrollados a lo largo de todo el proceso investigativo, desde la fase de planificación hasta los momentos de implementación y análisis. A diferencia de los principios sustantivos, que principalmente guían el contenido y la estructura de las actividades, los principios procedimentales se refieren a la forma en que estas actividades se organizan, llevan a cabo y experimentan en el aula.

Aún en la etapa de elaboración de la secuencia didáctica, algunos principios procedimentales ya estaban implícitamente presentes, especialmente aquellos relacionados con la organización del trabajo en el aula y la concepción del papel del profesor y los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Entre ellos, destaca la valoración de la autonomía estudiantil y el papel del docente/investigador como asesor, aspectos que guiaron la construcción de actividades investigativas y abiertas desde el principio.

Sin embargo, fue durante la aplicación de la intervención cuando estos principios se enfatizaron, ajustaron y explicaron con mayor claridad. La experiencia en el aula evidenció la necesidad de considerar, de manera más sistemática, aspectos como la gestión del tiempo, la organización de las interacciones entre estudiantes y los momentos de sistematización de conceptos. Como se detalla en Silvestre (2025), este movimiento de explicación y refinamiento de los principios procedimentales se produjo de manera articulada con el análisis de la evidencia empírica producida a lo largo de los ciclos de aplicación.

En este proceso, algunos principios se reforzaron y caracterizaron mejor, volviéndose más explícitos en el conjunto de directrices de la intervención. Entre ellas, destacan las siguientes: 12) el desarrollo de actividades en duplas, favoreciendo el intercambio de ideas y la construcción colectiva del conocimiento; 13) mediación docente basada en orientación y cuestionamiento, en detrimento de la transmisión directa del contenido; 14) fomentar la autonomía de los estudiantes, asumiendo un papel activo en su proceso de aprendizaje; 15) y el uso de momentos de síntesis al final de cada unidad, contribuyendo a la organización y consolidación de los conceptos trabajados.

Cabe señalar que estos principios no se añadieron simplemente al conjunto inicial, sino que resultaron de un proceso de validación progresiva, en el que su relevancia se confirmó a partir de los efectos observados en la dinámica del aula y en las producciones de los estudiantes. Así, su consolidación no es solo el resultado de una decisión teórica, sino de evidencia empírica que indica su relevancia para la realización de la intervención.

Otro aspecto importante se refiere al hecho de que estos principios comenzaron a actuar de manera articulada con los principios sustantivos, aumentando la coherencia de la propuesta didáctica. Aunque guiaban qué enseñar y cómo estructurar las actividades, los principios procedimentales contribuyeron a definir cómo debían desarrollarse estas actividades en el aula, evidenciando la complementariedad entre ambas.

Así, el análisis de los principios procedimentales en este estudio refuerza la comprensión de que la DBP implica no solo la elaboración de intervenciones basadas en teorías, sino también la construcción de directrices prácticas que se constituyen y validan en el propio proceso de implementación. Esta característica resalta el carácter dinámico y situado de los principios de diseño, cuya consolidación depende de la interacción continua entre planificación, acción y reflexión.

Validación de principios de diseño y efectos en el aprendizaje

El análisis de los datos producidos a lo largo de los ciclos de aplicación permitió no solo evaluar el aprendizaje de los estudiantes, sino también validar los principios de diseño que guiaron la intervención. En este sentido, los resultados observados no se entienden de forma aislada, sino como evidencia de la pertinencia y eficacia de los principios en la organización y conducción del proceso de enseñanza y aprendizaje.

La validación de los principios se produjo progresivamente, a lo largo de los dos ciclos de aplicación, mediante el análisis de las producciones de los estudiantes, observaciones en el aula y registros en el diario de campo. Estos diferentes instrumentos permitieron identificar cambios en la forma en que los estudiantes entendían y articulaban los conceptos implicados, especialmente en lo que respecta a la construcción de imágenes conceptuales.

En general, se observó que los estudiantes comenzaron a presentar imágenes conceptuales más elaboradas, caracterizadas por la articulación entre diferentes representaciones, la incorporación de elementos formales y la capacidad de establecer relaciones entre conceptos. Esta evolución puede interpretarse a la luz de los niveles de comprensión adoptados en la investigación, en los que las imágenes conceptuales pasan de formas más iniciales y fragmentadas a configuraciones más integradas y complejas. En Silvestre se pueden encontrar detalles sobre los niveles Principiante, Intermedio y Avanzado (2025).

La Figura 3 presenta las imágenes conceptuales manifestadas por los estudiantes en actividades consideradas centrales en cada unidad del segundo ciclo. Estas actividades se clasificaron así porque requieren un nivel superior de comprensión conceptual, lo que evidenciara la consolidación del conocimiento desarrollado a lo largo del proceso.

Figura 3

Imágenes de los conceptos de los pares en las actividades clave de las tres unidades.

Duplas	Classificação	Atividades												
		1.4a	1.4b 1.4c	1.4e	1.4f	1.5	2.1a	2.2 ^a	2.3b	2.8	3.3c	3.3e	3.5	3.6
D1	Inicial										x			
	Intermediário		x	x			x		x			x		x
	Avançado	x			x	x		x		x			x	
D2	Inicial			x										
	Intermediário		x					x		x	x			
	Avançado	x			x	x	x		x			x	x	x
D3	Inicial													
	Intermediário		x								x			
	Avançado	x		x	x	x	x	x	x	x		x	x	x

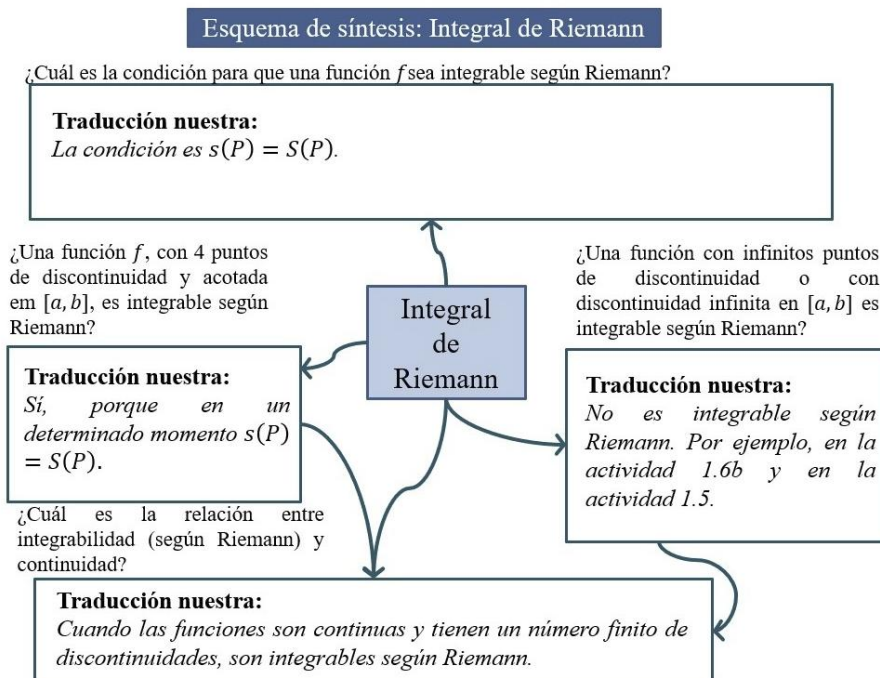
Los datos presentados en el Gráfico 3 muestran que, en las actividades consideradas centrales en cada unidad, predominó las clasificaciones en los niveles intermedio y avanzado, lo que indica que los estudiantes pudieron, en diferentes momentos, movilizar una comprensión más profunda de los

conceptos trabajados. Este resultado sugiere que la organización de actividades, guiada por principios de diseño, favoreció la construcción de significados más consistentes.

Además, los mapas mentales elaborados al final de las unidades resultaron especialmente relevantes para el análisis del aprendizaje. Estos esquemas de síntesis tenían como objetivo explicar las relaciones entre los conceptos trabajados, favoreciendo la organización del conocimiento de manera integrada. La Figura 4 presenta un ejemplo de un esquema de síntesis producido al final de la unidad sobre la integral de Riemann, con la respuesta del par D3. En él se observa la articulación entre diferentes elementos conceptuales, como la noción de área, sumas de Riemann, el concepto de límite y la definición formal de integral. Este tipo de representación resalta la capacidad de los estudiantes para establecer conexiones entre diferentes aspectos del contenido, yendo más allá de una comprensión fragmentada.

Figura 4

Esquema resumen sobre el concepto de integral de Riemann del par D3.



Este ejemplo ilustra cómo los estudiantes apropiaron esquemas de síntesis, utilizándolos para organizar y relacionar conceptos de una manera más estructurada. Sin embargo, se observa que la respuesta sigue presentándose de forma directa, con un nivel menor de formalización. Aun así, producciones de esta naturaleza refuerzan el papel de estos momentos de sistematización en la consolidación del aprendizaje y en la construcción de entendimientos más integrados.

El análisis cualitativo de las producciones también reveló que los estudiantes empezaron a utilizar argumentos basados en representaciones gráficas e interpretaciones conceptuales con mayor frecuencia, en contraste con enfoques predominantemente algorítmicos. Este movimiento está directamente relacionado con los principios de diseño que guiaron la intervención, como la valoración de múltiples representaciones, el uso de raíces cognitivas y la propuesta de actividades que favorecen la abstracción y la generalización.

Otro aspecto relevante se refiere al papel de la autonomía estudiantil, evidenciado por la participación activa de los estudiantes en las discusiones, en la formulación de conjeturas y en la justificación de su razonamiento. Este comportamiento puede asociarse tanto con principios sustantivos como procedimentales, que fomentaron la construcción de un entorno de aprendizaje más investigativo y colaborativo.

Cabe señalar que, aunque se han observado avances significativos, han persistido algunas dificultades, especialmente en lo que respecta a la rigurosa formalización de ciertos conceptos. Sin embargo, tales limitaciones son esperadas en contextos de aprendizaje avanzado de matemáticas y no comprometen la validez de los resultados, sino que, por el contrario, refuerzan la complejidad del proceso y la necesidad de enfoques didácticos que tengan en cuenta estas dificultades.

Así, los resultados obtenidos nos permiten afirmar que los principios de diseño elaborados en este estudio fueron validados tanto desde el punto de vista de la organización de la intervención como de sus efectos en el aprendizaje del alumnado. Esta validación no se limita a la verificación de mejoras en el rendimiento, sino que implica la evidencia de cambios cualitativos en las formas de pensar, representar y comprender conceptos matemáticos, lo que refuerza el potencial de estos principios como guías para prácticas pedagógicas en contextos similares.

Generalización heurística de los principios de diseño

La etapa final de este estudio consistió en la organización y sistematización de los principios de diseño con vistas a su generalización. A diferencia de los enfoques tradicionales, en los que la generalización ocurre mediante inferencias estadísticas, en la DBP asume un carácter heurístico, guiado por la identificación de elementos que pueden reinterpretarse y adaptarse a otros contextos educativos (Van den Akker, 1999; Plomp, 2007).

En este sentido, la generalización de los principios de diseño elaborados en esta investigación no implica su reproducción directa en diferentes escenarios, sino su reorganización en estructuras más amplias, capaces de guiar nuevas intervenciones respetando las especificidades de cada contexto. Por tanto, es un proceso de abstracción, en el que los principios se reinterpretan a la luz de la evidencia producida a lo largo de los ciclos de aplicación.

A partir de los análisis realizados, los principios de diseño, tanto sustantivos como procedimentales, se sintetizaron y organizaron en ejes heurísticos, que agrupan orientaciones con características comunes y relaciones de evidencia entre diferentes dimensiones de la intervención. En la Tabla 2, presentamos la síntesis generalizable y la organización de los principios de diseño.

Tabla 2

Síntesis generalizable y organización de principios de diseño.

Eixo Temático	Descripción del principio generalizado	Principios Contemplados
Considera los conocimientos previos y las dificultades de los estudiantes.	Diseñar intervenciones que tengan en cuenta conocimientos previos, dificultades conceptuales recurrentes y diferentes ritmos de aprendizaje, favoreciendo la construcción de significados y el compromiso del alumnado.	(1) Considerar dificultades en conocimientos previos; (2) Combinar software con lápiz y papel, destacando sus potencialidades y limitaciones; (11) Permitir a los estudiantes comprender las diferencias entre los conceptos de integral de Riemann, primitiva e integral de Lebesgue.
Utiliza múltiples representaciones y	Integrar representaciones gráficas, visuales, simbólicas y lingüísticas que amplíen la	(3) Representaciones gráficas de valor; (6) Proponer actividades que permitan la

favorece las abstracciones	comprensión conceptual, estimulen la generalización y articulen diferentes registros semióticos.	búsqueda de patrones, abstracciones y generalizaciones; (10) Proponer actividades en orden creciente de dificultad que, al final de un bloque, permitan abstracciones, generalizaciones y la definición de un concepto.
Explora las raíces cognitivas y las conexiones conceptuales	Ancla el nuevo conocimiento en estructuras cognitivas ya consolidadas e articularlos con contenidos matemáticos previos, promoviendo una cadena lógica y significativa.	(5) Utilizar el área como raíz cognitiva para la enseñanza integral de Riemann; (9) Proponer actividades que pongan al estudiante como responsable de su aprendizaje.
Estimular la construcción de imágenes del concepto a nivel avanzado	Proponer actividades que fomenten el desarrollo de imágenes conceptuales articuladas con definiciones formales, favoreciendo interpretaciones flexibles, conexiones profundas y generalizaciones.	(7) Construir el concepto de integral como un límite; (8) Proponer preguntas para que los estudiantes respondan en lenguaje natural.
Promover la colaboración y mediación entre profesores	Valorar las interacciones colaborativas entre compañeros y la mediación activa del docente/investigador, creando un entorno que favorezca la construcción colectiva del conocimiento.	(12) Desarrollo de actividades en duplas; (13) Profesor/investigador actuando como asesor.
Asegurar la intencionalidad pedagógica y la secuencia estructurada	Organizar las actividades de manera secuencial y guiada por objetivos claros, con el apoyo de esquemas de síntesis, en contextos presenciales que favorezcan la participación activa.	(14) Estudiantes trabajando de forma autónoma, es decir, responsables de su aprendizaje; (15) Uso del esquema resumen como cierre de cada unidad; (16) Actividades realizadas presenciales.

Los ejes presentados en la Tabla 2 resumen las dimensiones centrales de la intervención, evidenciando la articulación entre conocimientos previos, representaciones, procesos de abstracción, mediación docente y organización didáctica. Esta organización nos permite entender los principios del diseño como un sistema integrado de directrices, y no como elementos aislados.

Al mismo tiempo, esta sistematización amplía el alcance de los resultados de la investigación, ofreciendo una estructura que favorece su adaptación a diferentes contextos docentes. En este proceso, la generalización asume un carácter interpretativo, requiriendo que los principios se recontextualicen según las especificidades de los estudiantes, los contenidos y las condiciones institucionales.

De este modo, los ejes heurísticos constituyen una forma de hacer comunicable el conocimiento producido, preservando su flexibilidad y potencial para su uso en nuevas investigaciones y prácticas pedagógicas. Más que un modelo a replicar, estas son directrices que pueden apoyar la planificación de intervenciones en diferentes contextos, especialmente en la enseñanza de las matemáticas a niveles más avanzados.

CONSIDERACIONES FINALES

El presente estudio tuvo como objetivo analizar el proceso de elaboración, aplicación, validación y generalización heurística de principios de diseño en el contexto de un PBD centrado en la enseñanza de integrales. A partir de los resultados obtenidos, es posible afirmar que los principios del diseño constituyen un elemento central tanto en la organización de intervenciones didácticas como en la producción de conocimiento teórico en la Educación Matemática.

En cuanto a la elaboración de los principios, se evidenció que su construcción basada en la articulación entre la revisión bibliográfica, el análisis de dificultades de aprendizaje y el trabajo colaborativo con los docentes resultó ser adecuada y consistente. En este proceso, se destaca el papel del grupo de colaboración, cuya participación fue esencial para garantizar la relevancia pedagógica de las propuestas y su viabilidad en el contexto real de la enseñanza.

La aplicación de los principios de diseño en la elaboración del producto educativo reveló su potencial para guiar la construcción de actividades didácticas coherentes y progresivamente estructuradas. Se observó que tales principios no solo orientaban la organización de las tareas, sino que también influían directamente en la forma en que los estudiantes se involucraban con los conceptos, favoreciendo la construcción de significados más elaborados.

Además, la consolidación de los principios procedimentales a lo largo de los ciclos de aplicación evidencia el carácter dinámico de la DBP, en la que los elementos de la intervención se ajustan continuamente en función de la evidencia producida en el contexto de su uso. Este movimiento refuerza la idea de que los principios de diseño no son estáticos, sino que se constituyen y refinan en el propio proceso investigativo.

En cuanto a los efectos en el aprendizaje, los resultados indicaron avances en las imágenes conceptuales presentadas por los estudiantes, que comenzaron a presentar comprensiones más articuladas y niveles cercanos a intermedios y avanzados. Tales evidencias sugieren que la estructuración de las actividades basada en principios de diseño contribuyó significativamente al desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Así, puede afirmarse que el objetivo de este trabajo se alcanzó al establecer un camino metodológico para la elaboración, uso y generalización de los principios de diseño, así como sus efectos en el contexto investigado. Los principios, validados a lo largo de dos ciclos de aplicación, demostraron ser efectivos tanto en la organización del producto educativo como en la promoción de un aprendizaje significativo.

Finalmente, la generalización heurística de los principios, organizados en ejes, constituye una contribución relevante del estudio, al permitir su adaptación a otros contextos docentes. Este resultado refuerza el potencial de la DBP para producir conocimientos que, aunque situados, pueden ser reinterpretados y utilizados en diferentes escenarios educativos.

En este sentido, para futuras investigaciones, se sugiere investigar la aplicación de estos principios en otros contenidos matemáticos, así como analizar su uso en diferentes niveles educativos y contextos institucionales. Además, se destaca la importancia de explorar formas de ampliar la participación estudiantil en la construcción y validación de los principios de diseño, fortaleciendo el carácter colaborativo de la DBP y ampliando sus posibilidades de contribución a la Educación Matemática.

AGRADECIMIENTOS

La Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CAPES)- Brasil para el apoyo financiero.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

Todos los autores contribuyeron a la investigación y redacción del artículo. IBMS realizó la investigación, análisis de datos y redacción del texto, y VB guió la investigación y contribuyó al análisis de datos, redacción y revisión del artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor correspondiente (IBMS) a solicitud.

REFERENCIAS

Apolinar, E. S. (2014). *Significados institucionales y personales del concepto de integral definida de funciones de una variable en una institución educativa de nivel superior* (239 f). Tese de doutorado en Innovación Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey.

Bisognin, V., & Silvestre, I. B. M. (2025). Características do pensamento matemático avançado: contribuições da pesquisa baseada em design no estudo das integrais de Riemann e de Lebesgue. *Paradigma*, 46(2), e2025030. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025030.id1698>

Crisostomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional* (546 f). Tese de doutorado en Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In: J. Van den Akker et al. (Eds.), *Educational design research* (pp. 17–51). Routledge.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2005). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2005*. <https://www.gov.br/inep>

- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2008). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2008*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2011). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2011*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2014). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2014*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2017). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2017*. <https://www.gov.br/inep>
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.
(2021). *Relatório do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) 2021*. <https://www.gov.br/inep>
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research*. Routledge.
- Menoncini, L. (2018). *O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área* (228 f). Tese de doutorado, Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Pinto, M. M. F. (1998). *Students' understanding of real analysis* (Tese de doutorado). University of Warwick.
- Plomp, T. (2007). Educational design research: An introduction. In: T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *An introduction to educational design research* (pp. 9–35). SLO.
- Reeves, T. C. (2006). Design research from the technology perspective. In: J. Van den Akker et al. (Eds.), *Educational design research*. Routledge.

- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica* (468 f). Tese de doutorado em Educação, Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Silvestre, I. B. M., & Bisognin, V. (2024). Da integral de Riemann à integral de Lebesgue: Um estudo alicerçado na pesquisa baseada em design. In: *IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IX-SIPEM)* (pp. 1–14). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
<https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/213>
- Silvestre, I. B. M. (2025). *Elaboração, aplicação e generalização de princípios de design no ensino de integrais de Riemann e de Lebesgue* (169 f). Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
<https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. Springer.
- Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In: J. van den Akker et al. (Eds.), *Design approaches and tools in education and training*. Springer.