

Processo de Modelização Semiocognitiva na Aprendizagem Matemática

Bárbara Cristina Pasa^a 

Cátia Maria Nehring^b 

Méricles Thadeu Moretti^c 

^a Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-graduação Profissional em Educação, Erechim, Rio Grande do Sul, Brasil.

^b Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-graduação Educação nas Ciências, Ijuí, Rio Grande do Sul, Brasil.

^c Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

RESUMO

Contexto: A aprendizagem matemática apresenta desafios significativos, especialmente na coordenação coordenada de registros de representação semiótica e na compreensão de conceitos abstratos, sendo comum a apreensão superficial de significados e a priorização de abordagens algorítmicas em detrimento da compreensão conceitual. **Objetivos:** Apresentar uma síntese estruturada e analítica do ensaio conceitual acerca do "Processo de Modelização Semiocognitiva". O objetivo do estudo original é propor um constructo didático focado no planejamento docente que auxilie os professores a superarem os obstáculos de compreensão textual e conceitual na resolução de problemas e definições matemáticas. **Metodologia:** Pesquisa qualitativa, exploratória e bibliográfica, estruturada na forma de ensaio interpretativo, com foco na análise e reorganização reflexiva de conhecimentos existentes sobre aprendizagem matemática e atuação docente. **Fonte de dados:** Estudo teórico baseado em literatura especializada sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e o Contrato Didático de Guy Brousseau. **Produção e análise de dados:** As categorias enfatizadas no processo de modelização semicognitiva emergiram dos pressupostos teóricos e a partir delas foram analisados um problema de área e uma definição matemática, observando-se a aplicação dos processos semicognitivos e a inter-relação entre registros, estratégias cognitivas e mediação docente. **Resultados:** A modelização semicognitiva permite a articulação de forma coordenada de diferentes registros semióticos, promovendo a compreensão conceitual de definições e problemas matemáticos, evidenciando a importância da conversão, segmentação e recontextualização na aprendizagem efetiva. **Conclusões:** Aprender matemática depende do planejamento intencional do professor, ao estruturar atividades capazes de mobilizar os registros semióticos, transformando definições e problemas em oportunidades de desenvolvimento do raciocínio matemático, e da flexibilidade conceitual dos estudantes.

Corresponding author: Bárbara Cristina Pasa. E-mail: barbara.pasa@uffs.edu.br

Palavras-chave: modelização semiocognitiva; representação semiótica; compreensão matemática; ensino de matemática; contrato didático.

ABSTRACT

Background: Mathematical learning presents significant challenges, especially in the coordinated coordination of registers of semiotic representation and in the understanding of abstract concepts, with an often superficial apprehension of meanings and the prioritisation of algorithmic approaches to the detriment of conceptual understanding. **Objectives:** To present a structured and analytical synthesis of the conceptual essay on the “process of semiocognitive modeling”. The objective of the original study is to propose a didactic construct focused on teacher planning that helps teachers overcome obstacles to textual and conceptual understanding as they solve mathematical problems and define concepts. **Methodology:** Qualitative, exploratory, and bibliographic research, structured in the form of an interpretative essay, focusing on the analysis and reflective reorganisation of existing knowledge about mathematical learning and teaching performance. **Data source:** Theoretical study based on specialised literature on Raymond Duval’s theory of registers of semiotic representations and Guy Brousseau’s didactic contract. **Data production and analysis:** The categories emphasised in the process of semiocognitive modeling emerged from the theoretical assumptions, and, from them, an area problem and a mathematical definition were analysed, with attention to the application of semiocognitive processes and the interrelationships among registers, cognitive strategies, and teacher mediation. **Results:** Semiocognitive modeling enables the coordinated articulation of different semiotic records, promoting conceptual understanding of mathematical definitions and problems and highlighting the importance of conversion, segmentation, and recontextualisation in effective learning. **Conclusions:** Learning mathematics depends on the teacher’s planning, as they structure activities that mobilise semiotic registers, transforming definitions and problems into opportunities for the development of mathematical reasoning and the students’ conceptual flexibility.

Keywords: semiocognitive modeling; semiotic representation; mathematical understanding; mathematics teaching; didactic contract.

INTRODUÇÃO

A aprendizagem da matemática é um campo de estudo complexo e frequentemente marcado por desafios significativos para estudantes em diversos níveis de ensino. A dificuldade em transitar entre diferentes representações de um mesmo conceito, a apreensão superficial de significados abstratos e a prevalência de abordagens algorítmicas em detrimento da compreensão conceitual são problemáticas largamente documentadas na literatura especializada (Hiebert & Wearne, 1992; Schoenfeld, 1992). Nas salas de aula, o ensino de matemática tem historicamente priorizado a memorização de fórmulas e a execução mecânica de procedimentos, relegando a construção de significados e a capacidade de

compreensão a um segundo plano. No entanto, a matemática, em sua essência, transcende a mera manipulação simbólica; ela é fundamentalmente uma ciência de resolução de problemas, no qual definições e teoremas não são enunciados isolados a serem decorados, mas sim ferramentas estruturantes para o raciocínio, a argumentação e a compreensão de fenômenos do mundo real e abstrato (Tall & Vinner, 1981).

A persistência dessa lacuna entre a formalização da matemática e a capacidade dos estudantes de aplicar, interpretar e contextualizar esses conhecimentos em situações diversas constitui um problema central na didática da matemática. Estudos têm indicado que, mesmo com a proficiência em um registro de representação semiótica (por exemplo, algébrico), muitos estudantes falham ao converter ou coordenar informações com outros registros (por exemplo, gráfico ou verbal), o que impede uma compreensão integral do conceito subjacente (Duval, 2006; Pasa et al., 2025a; Moretti et al., 2022). Esta incapacidade, ou dificuldade de mobilizar diferentes registros de representações semióticas, está diretamente ligada a limitações na compreensão e na resolução de problemas em matemática.

Nesse contexto, a teoria semiocognitiva desenvolvida por Raymond Duval (1995, 2006), oferece um arcabouço teórico robusto e uma lente analítica poderosa para investigar os processos cognitivos subjacentes à compreensão matemática. Duval (2003) postula que os objetos matemáticos, sendo de natureza não perceptível, são acessíveis apenas através de suas representações semióticas. A compreensão matemática não se dá, portanto, pela "percepção" direta desses objetos, mas pela coordenação e articulação das representações semióticas ligadas a tais objetos. Ele descreve o que chama de "paradoxo da representação", na qual a própria necessidade de operar com representações pode paradoxalmente obscurecer o acesso ao objeto matemático se não houver flexibilidade e fluidez entre elas.

A teoria semiocognitiva enfatiza três tipos cruciais de atividade cognitiva relacionadas aos registros de representação semiótica: a *formação* diz respeito à constituição do registro a partir de um conjunto de representações dotadas de critérios de identificação e regras próprias de produção, as quais devem ser explicitadas para possibilitar sua compreensão e compartilhamento por um grupo de sujeitos; o *tratamento* refere-se a uma operação interna a um mesmo registro de representação, na qual, segundo regras específicas, uma representação é transformada em outra dentro do próprio registro, como por exemplo, simplificar uma expressão algébrica, e a *conversão* de uma representação, que corresponde em transformá-la em outra representação do mesmo objeto, mas em um registro

diferente, como por exemplo, transitar entre a expressão algébrica e o gráfico correspondente. A conversão, em particular, é considerada por Duval (1995) como o cerne da compreensão matemática, pois exige o reconhecimento do mesmo objeto conceitual subjacente em formas semióticas distintas. A capacidade de operar fluidamente nessas três atividades é um indicador crucial de uma compreensão conceitual profunda de um objeto matemático.

Quando mobilizada à compreensão de definições e à resolução de problemas, a perspectiva semiocognitiva sugere que a proficiência não reside apenas na memorização do enunciado formal ou na aplicação algorítmica. Ela reside, antes, na habilidade de formar representações apropriadas para a definição ou teorema, tratá-las de modo a extrair informações ou realizar inferências, e convertê-las de forma coordenada para outros registros que possam facilitar a aplicação em um problema ou a construção de uma prova. Assim, a compreensão em matemática exige não apenas a mobilização de registros, mas processos estratégicos de segmentação, que consiste na decomposição do problema em partes manejáveis, e de recontextualização, que é a integração das partes segmentadas com possibilidade de aplicação de conhecimentos prévios a novas situações. Tais processos, fundamentais à compreensão de textos, são intrinsecamente mediados por representações semióticas.

Diante da complexidade que envolve a aprendizagem matemática e do potencial analítico da teoria semiocognitiva, este artigo propõe um processo de *modelização semiocognitiva* no qual o papel do professor é central, especialmente em suas atividades de planejamento. Essas atividades envolvem o tratamento e a conversão de registros de representação, assim como os processos estratégicos de segmentação e recontextualização, com o objetivo de contribuir para a construção de uma compreensão conceitual em Matemática, no campo das definições e teoremas, bem como em contextos de resolução de problemas. O objetivo específico é apresentar e analisar a inter-relação entre esses elementos semiocognitivos, investigando como eles podem se manifestar na capacidade dos estudantes de transcender a formalidade dos conceitos matemáticos e alcançar uma compreensão funcional e aplicável.

No âmbito dessa discussão, destacam-se os estudos de Guy Brousseau, um dos pioneiros da Didática da Matemática, cujas contribuições fundamentais estabeleceram condições essenciais para o processo de ensino e aprendizagem. Brousseau (1986, 1996) desenvolveu uma teoria voltada para a compreensão das interações da tríade professor, estudante e saber. De acordo com Brousseau, a relação entre o professor e o estudante no contexto educacional é considerada uma relação especial, cujo objetivo primordial é a aprendizagem, sempre

mediada pelo saber. No entanto, essa interação está sujeita a uma série de regras e convenções, que funcionam como cláusulas de um contrato. Esse conjunto de regras, que regula as relações que os professores e estudantes mantêm com o saber, é denominado "contrato didático".

O contrato didático, conforme proposto por Brousseau (1986), constitui uma ferramenta analítica para investigar as relações entre professor, estudante e saber. De acordo com Brousseau (1996, pp. 50-51), “o contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática”, ou seja, o conjunto de comportamentos esperados de cada parte (professor e estudante) constitui um sistema de regras que define a dinâmica dessa interação. Essas regras são compostas por aspectos explícitos (aqueles formulados verbalmente em sala de aula) e por aspectos implícitos (construídos historicamente e interpretados no contexto da sala de aula). Em cada parte, o professor e o estudante, assumem responsabilidades mútuas, pelas quais serão, de alguma forma, responsáveis uns pelos outros.

A partir desse modelo, é relevante destacar que, na sala de aula, as responsabilidades de cada membro da tríade (professor, estudante e saber) são definidas precisamente na interação entre esses elementos. No processo de *modelização semiocognitiva*, o professor tem a responsabilidade de criar estratégias que possibilitem aos estudantes acessar o saber escolar, além de gerenciar sua participação no processo de ensino e aprendizagem. Isso envolve a proposta de questionamentos e atividades alinhadas ao perfil dos estudantes e a apresentação de informações significativas em momentos oportunos, bem como a intencionalidade pedagógica a partir do planejamento prévio, ênfase da *modelização semiocognitiva*. Essas atividades estão em consonância com o papel do professor no contrato didático. Por sua vez, o estudante tem a responsabilidade de seguir as orientações do professor, participar das atividades propostas e adaptar-se à forma de comunicação estabelecida para cada tarefa. Nesse processo, o saber assume a função de mediador entre o professor e o estudante.

Ancorado nessas ideias, este artigo configura-se como um ensaio, fundamentado em Meneghetti (2011), caracterizado por sua natureza reflexiva e interpretativa, cuja essência reside na reorganização de conhecimentos já existentes.

O ensaio caracteriza-se pela sua natureza reflexiva e interpretativa, diferente da forma classificatória da ciência. [...] O ensaio é um meio de análise e elucubrações em relação ao objeto, independentemente de sua natureza ou característica. A forma ensaística é a forma como são incubados novos

conhecimentos, até mesmo científicos ou pré-científicos. [...] O ensaio sempre fala de algo já formado ou, na melhor das hipóteses, de algo que já tenha uma vez estado aí; pertence, pois, à sua essência que ele não destaque coisas novas a partir de um vazio nada, mas se limite a ordenar, de um modo novo, coisas que em algum momento já foram vivas. (Meneghetti, 2011, p. 322).

Diante disso, o presente ensaio é o resultado de uma pesquisa qualitativa exploratória e bibliográfica e está estruturado de modo que, inicialmente, são apresentados os aspectos estruturantes do processo de *modelização semiocognitiva* e na sequência, por meio de exemplos, apresenta-se tal modelização para um problema contextualizado e para uma definição matemática. Defende-se que o processo de *modelização semiocognitiva* não foca no “conteúdo” isolado, mas na atividade do sujeito sobre as representações. Argumentar em favor dessa abordagem é defender que aprender matemática é aprender a transformar representações e a reconhecer o mesmo objeto em diferentes possibilidades de representação semióticas.

MODELIZAÇÃO SEMIOCOGNITIVA PARA COMPREENSÃO EM MATEMÁTICA

O processo de *modelização semiocognitiva* propõe um caminho possível para a compreensão de definições e também para a compreensão e resolução de problemas. Compreender um texto e sua organização envolve, conforme indicado por Duval (1995, 2004) e enfatizado por Pasa et al. (2025a, 2025b), a interação entre o conhecimento expresso no texto, denominado conteúdo cognitivo, e a forma como esse texto é redacionalmente estruturado. Dessa perspectiva, a apreensão de um problema não pode ser dissociada nem de sua organização redacional nem do grau de familiaridade do leitor com o conteúdo cognitivo mobilizado. Desse modo, a compreensão de um texto - um problema formulado em língua materna ou uma definição ou um teorema - resulta da interação entre texto e leitor, envolvendo dois eixos igualmente relevantes: as características e funcionalidades da escrita, denominadas variáveis redacionais, que incluem os graus e modos de explicitação do conteúdo cognitivo, bem como as discrepâncias entre a organização redacional e a organização discursiva típica da oralidade espontânea; e as características do leitor, abrangendo sua base de conhecimentos relativa ao conteúdo cognitivo do texto, a extensão de seu vocabulário e suas habilidades de decodificação sintática, entre outras.

Importa destacar que a organização redacional de um problema pode ser alterada sem que seu conteúdo cognitivo seja modificado. Essa reestruturação pode ser necessária sempre que o texto não for prontamente compreendido pelo leitor. Entretanto, a percepção de suficiência ou insuficiência da redação de um mesmo texto varia conforme a base de conhecimentos dos leitores.

Assim, ao trabalhar com problemas e definições em língua materna em contexto escolar, o professor precisa tomar como referência a base de conhecimento específica dos estudantes e considerar as operações descritas por Duval (1995, 2004), evidenciadas em Pasa et al. (2025b), em seu modelo de compreensão textual: a segmentação do texto em unidades e a recontextualização dessas unidades segmentadas.

Além disso, destacamos a importância da segmentação e da recontextualização, explicitadas a seguir, no processo de *modelização semiocognitiva* em toda mudança de registro de representação que se faz necessária para a compreensão e resolução de problemas.

A dinâmica da segmentação

A segmentação consiste no desdobramento do problema em unidades portadoras de significado ao longo do processo de leitura. Cumpre destacar que a identificação dessas unidades depende diretamente do foco de atenção do leitor, podendo incidir tanto sobre uma palavra isolada quanto sobre um enunciado mais amplo. Não há, portanto, unidades pré-definidas que possam ser consideradas básicas ou universalmente válidas para qualquer ato de leitura.

Na teoria semiocognitiva de Duval (1995, 2004), a discriminação dessas unidades significantes constitui condição necessária para a aprendizagem intelectual, uma vez que possibilita ao leitor reconhecer e organizar os elementos relevantes do texto. A segmentação refere-se à habilidade de decompor uma situação complexa ou uma declaração matemática em partes menores e mais gerenciáveis. Para Duval, isso significa guiar o estudante a identificar os elementos significantes de um problema ou de uma definição. No contexto da Educação Básica, a segmentação não é apenas a leitura passiva do enunciado, mas a ativação de estratégias para "fatiar" a informação e construir um significado local.

Duval (1995, 2004) descreve três modalidades de segmentação que podem ser mobilizadas pelo leitor durante a leitura, com vistas a distinguir e estruturar as unidades de significado presentes no problema: *cognitiva*, que organiza o texto segundo unidades que acionam conhecimentos matemáticos

específicos do estudante; *proposicional*, que separa o enunciado em proposições lógicas independentes de seu conteúdo cognitivo; e *funcional*, que divide o texto conforme o papel comunicativo de cada parte (introduzir, definir, questionar, solicitar uma ação, etc.). Com o texto segmentado, para a compreensão, faz-se necessário recontextualizá-lo.

A dinâmica da recontextualização

A recontextualização corresponde à integração das unidades obtidas pela segmentação, estabelecendo relações entre elas para formar um conjunto coerente de significações. Essa operação organiza o texto em redes de conhecimento ou em estruturas próprias da redação do problema, permitindo realizar as inferências necessárias para suprir omissões e resolver ambiguidades. Assim como há distintos tipos de segmentação, também existem diferentes formas de recontextualizar.

A *recontextualização cognitiva* baseia-se nos conhecimentos do leitor sobre as situações, objetos ou temas abordados no texto. Já a *recontextualização redacional* relaciona as unidades segmentadas segundo a lógica discursiva do enunciado, permitindo reconhecer que diferentes formas linguísticas podem expressar o mesmo conteúdo cognitivo e favorecendo maior flexibilidade de leitura.

Assim, a recontextualização é o processo de transferir e adaptar conhecimentos e habilidades previamente adquiridos para uma nova situação ou problema. É a ponte entre o que o estudante já sabe e o que ele precisa aprender ou aplicar. Para o professor, facilitar a recontextualização significa criar oportunidades para que os estudantes reconheçam padrões, analogias e apliquem conceitos em diferentes cenários, reforçando a flexibilidade cognitiva. A compreensão de um texto, que pode ser um problema ou uma definição matemática, depende sempre da articulação entre segmentação e recontextualização, cuja combinação, em suas diferentes modalidades, permite classificar distintos modelos de compreensão textual.

Ao ensinar os estudantes a segmentar e recontextualizar um texto, o professor os capacita não apenas a resolver problemas específicos, mas a desenvolver um raciocínio matemático adaptável, utilizando definições e teoremas como guias para análise de novas situações. Essa abordagem alinha-se à visão de que a compreensão conceitual advém da manipulação ativa e flexível do conhecimento em diversos contextos.

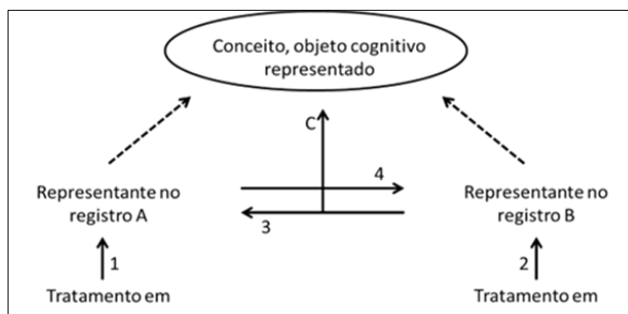
Hipótese fundamental da aprendizagem e representações de apoio

Segundo Duval (2012), a aprendizagem matemática ocorre por meio da articulação entre diferentes registros de representação semiótica (RRS) do objeto matemático a ser apreendido. Como precursor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), Duval (2003) destaca a relevância e a diversidade dos RRS mobilizados na atividade matemática, ao afirmar que a “originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ou na possibilidade de mudar constantemente de um registro para outro” (Duval, 2003, p. 14).

Nessa perspectiva, um RRS pode ser compreendido como um sistema de representações semióticas que envolve as três atividades cognitivas fundamentais, formação, tratamento e conversão, já explicitadas anteriormente. De acordo com Duval (2012), essas três atividades cognitivas constituem a base dos processos de construção e compreensão do conhecimento matemático e, a partir deste entendimento, apresenta a Hipótese Fundamental da Aprendizagem, a qual pressupõe a coordenação de ao menos dois RRS, como visto na Figura 1. As flechas 1 e 2 correspondem às transformações internas a um registro, os tratamentos, e as flechas 3 e 4 às transformações externas, ou seja, as conversões coordenadas, que levam às mudanças de registro, as quais são imediatas ou não, dependendo das variações de congruência semântica. A flecha C representa a compreensão, supondo uma coordenação de dois registros. As flechas pontilhadas demonstram a distinção entre representante e representado.

Figura 1

Hipótese Fundamental da Aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização (Duval, 2012, p. 282)



A hipótese fundamental apresentada na Figura 1 é crucial no processo de *modelização semiocognitiva*, pois associa a compreensão em matemática à conversão coordenada entre ao menos dois registros de representação semiótica do objeto matemático. Contudo, uma conversão coordenada nem sempre é possível de forma direta, sendo necessários elementos que contribuem para tal. Esses elementos são os apresentados aqui, os quais fazem parte do processo de *modelização semiocognitiva*.

No caso da compreensão de textos especificamente, a conversão coordenada também é essencial. A compreensão textual, embora fundamente-se nas operações de segmentação e recontextualização, também pressupõe, necessariamente, uma mudança de registro de representação, uma vez que a passagem do texto a ser compreendido para o discurso que o explica ou o analisa, não pode ocorrer de forma direta, isto é, permanecendo no mesmo registro discursivo. Essa transição exige um desvio explícito por uma representação não discursiva, que funcione como *representação intermediária* ou *auxiliar* entre o texto original e o discurso interpretativo. É por meio do trabalho cognitivo requerido por esse desvio que se torna possível aprender a compreender textos e, de modo análogo, resolver problemas matemáticos.

Duval (1995, 2004) enfatiza que a aprendizagem da compreensão de textos - neste estudo, centrada em problemas e definições matemáticas - constitui um dos principais desafios do ensino e da aprendizagem da Matemática, uma vez que exige do estudante a capacidade de interpretar e extrair informações relevantes para a resolução do problema em questão. A leitura de um texto matemático configura-se como uma atividade situada, determinada pelo contexto e pelo domínio cognitivo do sujeito. Segundo o autor, a compreensão matemática de um texto demanda que o estudante seja capaz de transitar entre diferentes RRS, mobilizando, para tanto, representações intermediárias (Duval, 1995, 2004) ou representações auxiliares (Duval, 2001).

As representações intermediárias caracterizam-se por conter grande parte dos elementos semiocognitivos presentes na representação principal, apresentando-se, contudo, de forma mais estruturada. Quando um texto matemático é apresentado ao estudante, seja na forma de problema, definição ou teorema, ele se encontra, com frequência, em um registro da linguagem materna ou em uma notação simbólica pouco transparente para a compreensão. Conforme assinala Duval (1995, 2004), na compreensão de um texto as representações intermediárias atuam como um elo entre a linguagem materna e os símbolos matemáticos, favorecendo a compreensão ao tornar explícitas as relações implícitas no enunciado. Já as representações auxiliares podem ser

compreendidas como representações de suporte à representação principal, contribuindo para a construção de outra representação. Conforme afirma Duval, uma representação principal encontra-se “associada a uma ou mais representações auxiliares para formar um todo que constitui uma ‘hiper-representação’”, sendo nesse conjunto que se pode identificar a função desempenhada pela representação auxiliar (Duval, 2001, p. 57).

Os dois tipos de representação descritos são cruciais tanto para a compreensão e resolução de problemas como para a compreensão de definições matemáticas. Em razão disso, denominamos essas representações como *representações de apoio* no processo de *modelização semiocognitiva*, entendendo-as como instrumentos essenciais para a construção de significados.

Os elementos semiocognitivos evidenciados - segmentação e recontextualização; formação, tratamento e conversão de RRS, e representações de apoio, quando mobilizados, possibilitam a compreensão do texto (problema ou definição) e são recursos para resolução no caso de problemas matemáticos.

Ressalta-se que a *modelização semiocognitiva* constitui um processo previamente planejado pelo professor e pode ser empregada em diferentes contextos sempre que se faz necessária a mudança de registro para a compreensão e resolução de problemas. No caso de enunciados apresentados em língua materna, a *modelização semiocognitiva* inicia-se com a seleção e o destaque dos elementos significantes (segmentação), seguida de uma recontextualização que possibilite a compreensão do enunciado e a inferência sobre sua resolução. Em seguida, exige uma mudança de registro, por exemplo, da língua materna para uma representação algébrica, sendo este processo acompanhado de tratamentos específicos no novo registro, auxiliados por representações de apoio. Dependendo das características do problema, outras mudanças de registro podem ser requeridas, cada uma demandando etapas de segmentação, recontextualização, utilização de representações de apoio e aplicação de tratamentos específicos correspondentes.

Na sequência apresentamos dois exemplos de *modelização semiocognitiva*, para um problema e para uma definição, respectivamente.

MODELIZAÇÃO SEMIOCOGNITIVA PARA COMPREENDER E RESOLVER PROBLEMAS - O CASO DA ÁREA MÁXIMA

A compreensão em matemática perpassa a integração e articulação dos aspectos anteriormente explicitados, formando o que chamamos de *modelização semiocognitiva*.

A resolução de problemas é um pilar do processo ensino e aprendizagem da matemática, e a compreensão de definições e teoremas é sua base formal. No entanto, para o professor da Educação Básica, muitas vezes o desafio é transpor a barreira entre a enunciação formal e a mobilização por parte do estudante. A teoria semiocognitiva de Duval, embora focada nos RRS, dialoga profundamente com processos metacognitivos como a segmentação e a recontextualização, essenciais para a compreensão de textos e, assim, para a construção do conhecimento matemático.

Apresentamos um problema comum em livros didáticos de ensino médio a fim de estruturar e exemplificar a *modelização semiocognitiva* proposta para compreender e resolver problemas, apontando as inter-relações possíveis entre os elementos semiocognitivos e como eles se manifestam na capacidade dos estudantes de transcender a formalidade para alcançar uma compreensão funcional e aplicável.

Problema envolvendo área máxima. (Adaptado de Souza, Garcia, 2016, p. 126).

Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso ele comprou 78 m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível para o galinheiro. Quais devem ser as medidas dos lados desse galinheiro? Qual será a área máxima desse galinheiro?

Este problema aparece com diferentes variações de contexto em livros didáticos, sendo necessário que o estudante o compreenda para, então, resolvê-lo mobilizando conhecimento matemático.

A dinâmica da segmentação

A *segmentação cognitiva*, como mencionado anteriormente, consiste em decompor o problema em unidades significantes que acionam diretamente conhecimentos matemáticos específicos, de modo que cada unidade segmentada se vincula a um determinado conceito. Esse processo pode ser promovido por meio de questionamentos elaborados pelo professor, voltados à explicitação dos conceitos mobilizados na situação-problema, tais como a geometria de retângulos, as fórmulas de área, problemas de otimização, cálculo de perímetro, o vértice da parábola ou, ainda, procedimentos de tentativa e erro.

Perguntas como: Qual formato do terreno? O que significa cercar um terreno? O que é o perímetro de um terreno retangular? O que significa “dimensões” de um terreno? O que é a área de um terreno? A que se refere o valor de 78 m? Dois retângulos com o mesmo perímetro podem possuir áreas

diferentes? Se for o caso, cite dois deles; são norteadoras na atividade do professor com a turma.

Ao envolver a mobilização de múltiplos conceitos por parte dos estudantes, a compreensão deste tipo de problema demanda ações pedagógicas intencionais do professor ao longo do processo de ensino.

Outra forma de segmentação relevante neste caso é a *segmentação funcional*, entendida como o processo de decomposição do problema segundo as partes do texto e o papel comunicativo que cada uma desempenha no enunciado. Tal segmentação mostra-se fundamental para a compreensão da estrutura discursiva do problema, uma vez que organiza seus elementos constitutivos e explicita as ações necessárias à sua resolução. No caso analisado, a primeira sentença introduz a situação e explicita a tarefa a ser realizada - “Pedro pretende cercar uma região retangular”. A segunda sentença apresenta os dados relevantes acerca das características do terreno e do perímetro do retângulo - “Para isso ele comprou 78 m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível para o galinheiro”. Por fim, as duas últimas sentenças apresentam a demanda do problema: “Quais devem ser as medidas dos lados desse galinheiro? Qual será a área máxima desse galinheiro?”. Assim, o objetivo consiste em determinar as dimensões de um terreno retangular que maximize a área, respeitando uma restrição previamente estabelecida do perímetro.

Essa forma de segmentação deve favorecer a compreensão por parte do estudante da função específica de cada componente do texto, possibilitando a organização coerente de sua estratégia de resolução. Para tanto, é necessário que o estudante identifique o objeto de estudo (o terreno retangular), a ação envolvida (cercar), a condição associada ao perímetro (78 m de cerca), o objetivo matemático (maximizar a área do terreno) e o que se busca determinar (as dimensões do terreno, isto é, comprimento e largura).

A dinâmica da recontextualização

A atividade de recontextualização, conforme já destacado, consiste na compreensão das relações entre as unidades de informação, integrando os segmentos previamente identificados. Essa atividade é responsável por sustentar as múltiplas inferências necessárias à compreensão de um problema, permitindo ao leitor preencher lacunas informacionais e dirimir ambiguidades decorrentes do processo de leitura. Nesse sentido, para a compreensão do problema, podem ser identificadas duas modalidades de recontextualização, as quais são promovidas a partir da intencionalidade do professor no ensino.

A *recontextualização cognitiva* mobiliza, primordialmente, conhecimentos relacionados às situações, aos objetos ou às questões evocadas pelo problema, independentemente do grau de explicitação presente em sua formulação textual. Em outras palavras, nesse tipo de recontextualização, o problema é compreendido a partir dos saberes prévios do estudante acerca do conteúdo ou do tema abordado. Assim, o professor instiga o estudante a reorganizar cognitivamente as informações disponíveis de modo a estruturar o raciocínio matemático requerido para a resolução da situação-problema.

No caso em análise, a recontextualização cognitiva implica considerar, de forma articulada, os conceitos matemáticos subjacentes envolvidos no problema. Neste caso, se um terreno retangular deve ser cercado com 78 m de cerca, logo o terreno tem lados paralelos de igual tamanho e a soma de todos os lados é 78 ($2x + 2y = 78$). Como é a área que será máxima, o estudante precisa conhecer como se calcula a área de um retângulo ($A = x \cdot y$) e, por fim, concluir que a área do retângulo em questão pode ser dada pela função $A = x \cdot (39 - x)$ ou $A = -x^2 + 39x$, a qual é do tipo quadrática e cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo. Ou seja, a função que representa a área possui um ponto máximo no vértice da parábola.

Assim, recontextualiza-se a demanda do problema “Quais devem ser as medidas dos lados desse galinheiro? Qual será a área máxima desse galinheiro?”. Dessa forma, uma vez recontextualizadas, as unidades de significação possibilitam a compreensão global do problema ao mobilizar conhecimentos matemáticos como: a definição da área do retângulo como o produto entre comprimento e largura; a estrutura típica de problemas de otimização e função quadrática; o fato de que, ao realizar a substituição das variáveis, obtém-se uma função quadrática cuja concavidade permite identificar o valor máximo ou mínimo no vértice. Nessa perspectiva, a recontextualização cognitiva promove a transformação da narrativa original, expressa no registro da língua materna, em um conjunto articulado de elementos abstratos, relações matemáticas e um plano de ação, passíveis de atividade de conversão, do registro de representação da língua materna para os registros algébrico e/ou gráfico.

A *recontextualização redacional* explicita as relações estabelecidas entre as unidades discriminadas por meio da segmentação funcional. Esse processo possibilita ao estudante compreender que diferentes formas linguísticas e estruturas discursivas podem expressar uma mesma organização lógica subjacente, isto é, um conteúdo cognitivo equivalente. Dessa maneira, o estudante deixa de se fixar em um modelo específico de enunciado e passa a

desenvolver maior flexibilidade cognitiva e textual. Em termos didáticos, é como se a reescrita do problema se constituísse em uma estratégia para sua própria compreensão.

Esse tipo de recontextualização pode ocorrer, ainda, por meio da simplificação da estrutura do enunciado, com vistas à redução do custo cognitivo envolvido. Exemplos disso incluem a utilização de valores numéricos menores ou a supressão temporária de aspectos mais complexos da otimização, mantendo-se a ideia central de maximização, porém com custos simplificados e números que favoreçam o cálculo e a exploração do problema previamente apresentado. Ademais, pode-se propor a resolução por meio de uma abordagem investigativa, baseada em tentativas sucessivas, atribuindo valores às variáveis x e y e calculando a área correspondente. Por fim, essa recontextualização pode ser articulada ao conteúdo de função quadrática, destacando que o valor máximo da função ocorre em seu vértice, estabelecendo, assim, uma conexão explícita entre a situação-problema e o tratamento matemático formal.

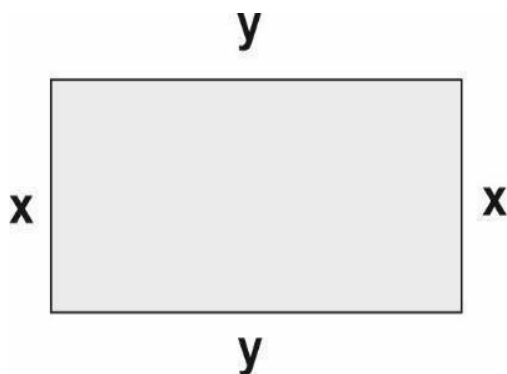
Hipótese fundamental da aprendizagem e representações de apoio

Compreensão de textos envolve, fundamentalmente, as operações de segmentação e recontextualização, que exigem a decomposição do texto em unidades significantes e sua posterior integração. Esse processo demanda a mudança de registro de representação, uma vez que a compreensão não ocorre diretamente no mesmo registro do texto original, mas por meio de representações de apoio, frequentemente não discursivas. Conforme Duval (1995, 2004), compreender textos matemáticos constitui um dos principais desafios do ensino e da aprendizagem, pois requer a capacidade de extrair informações relevantes e de transitar entre diferentes registros de representação. Nesse sentido, as representações de apoio desempenham papel central na construção de significados e na resolução de problemas matemáticos.

No problema em questão, é importante a utilização de representações de apoio, as quais permitem inferir sobre aspectos cognitivos do problema. Neste caso, uma representação geométrica permite a visualização dos lados do retângulo, enquanto as representações algébricas, como apresentada na Figura 2, permitem inferir sobre a função que representa a área.

Figura 2

Representação geométrica do retângulo de lados x e y



As equações que representam o perímetro e a área formam um sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = 78 \\ A = x \cdot y \end{cases}$$

que resulta nas seguintes representações algébricas para área do retângulo:

$$A = x \cdot (39 - x) \rightarrow A = -x^2 + 39x \quad (1)$$

$$A - \left(+\frac{1521}{4}\right) = -\left(x - \left(+\frac{39}{2}\right)\right)^2 \quad (2)$$

A equação (1) é a função que representa a área em função da medida x de um dos lados do retângulo. A equação (2) é obtida a partir de (1), mas sua apresentação permite identificar o vértice da parábola.

A partir de tais representações algébricas é possível optar pelo processo de tentativa, por meio de uma representação tabular, substituindo valores para x que pertencem ao domínio da função e calculando o valor da área. Nesse processo também se faz necessário segmentar e recontextualizar, já que unidades significativas precisam estar claras para proceder desta forma. Para isso, algumas perguntas podem ser feitas, como: Qual o valor que o x pode assumir, levando em conta que ele representa a medida de um dos lados do retângulo em questão? Como calcular a área para certos valores de x ? Tal questionamento deve permitir a conclusão de que $x \in R$ e $0 < x < 39$, uma vez que $x + y = 39$. Assim, pode-se construir uma tabela de valores.

Tabela 1*Atribuindo valores de x e buscando a maior área possível*

Valores de x	Valores de y	Valores da área (A)
1	38	38
2	37	74
5	34	175
10	29	290
15	24	360
20	19	380
25	14	350
35	4	140

Esse processo, apresentado na Tabela 1, embora intuitivo e com capacidade de fornecer um valor aproximado ou um intervalo de x , cuja área seja a maior, não resolve o problema, uma vez que o valor x que soluciona o problema não é inteiro.

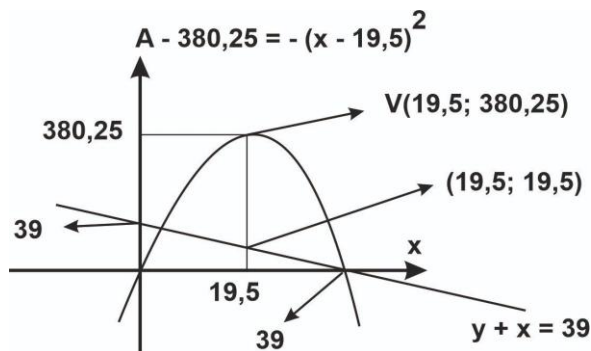
Outra possibilidade consiste em, diante da clareza do fato de o valor máximo ser o y do vértice - y_V , utilizando tratamentos, encontrar as raízes da função área e também o ponto máximo – vértice ($V(x_V, y_V)$). Isso é possível a partir das fórmulas $-x^2 + 39x = 0$ e $x_V = -\frac{b}{2a}$. Todavia, enfatizamos a ideia de Moretti (2003), embasada em Duval (2011), apresentada na equação (2), cujo esboço da parábola se dá por meio da apreensão global qualitativa ao utilizar a translação como recurso de interpretação global. Neste caso, a área representada pela função (1) precisa ser escrita na forma reduzida (2), ou seja,

$$A - \left(+\frac{1521}{4} \right) = -\left(x - \left(+\frac{39}{2} \right) \right)^2$$

sendo (x_V, y_V) as coordenadas do vértice da parábola, ou seja, (19,5; 380,25). Em outras palavras, a parábola que representa graficamente a função área ($A(x)$) no problema é a translação da parábola “base” $A(x) = -x^2$, 19,5 unidades à direita e 380,25 unidades para cima da origem do sistema cartesiano, apresentada na Figura 3, juntamente com a função que representa o perímetro ($2x + 2y = 78$).

Figura 3

Representação gráfica da área e do perímetro



Uma possível compreensão da situação perpassa, novamente, a segmentação e a recontextualização. Neste caso, pode-se propor a seguinte ideia: imagine que uma formiga parada em $(0,0)$ começa a caminhar sob o eixo x na direção de $x = 39$. O que acontece com a área e com o retângulo? Levando em conta o domínio e o fato que $x + y = 39$, uma possível resposta seria: quando a formiga está na origem, ou seja, em $x = 0$, não existe retângulo e, portanto, não há área. À medida que ela começa a caminhar, por exemplo em $x = 1$, o y se torna 38, forma-se um retângulo bastante estreito, mas com uma certa área. Quando ela chega em $x = 19,5$ cm, a área é máxima e o retângulo se torna um quadrado de 19,5 cm de lado. Saindo de $x = 19,5$ cm e indo na direção de $x = 39$ cm, a área começa a diminuir e quando chega perto de $x = 39$ cm, o retângulo se torna novamente muito estreito até desaparecer exatamente em $x = 39$ cm.

No caso desse problema de área máxima, a *modelização semiocognitiva* compreende várias etapas não lineares. A Figura 4 sintetiza e explicita os diversos passos para sua compreensão e resolução.

Figura 4

Modelização semiocognitiva para o problema de área máxima.

Conversão ou tratamento	Etapas	Segmentação e recontextualização
	1) Enunciado do problema em língua materna	x
Conversão	↓	
	2) Desenho do retângulo de lados x e y	x
Conversão	↓	
	3) Equações algébricas $A = xy$ e $2y + 2x = 78$	x
Tratamento	↓	
	4) $A = -x(x - 39)$ e $y + x = 39$	x
Tratamento	↓	
	5) $A - \left(+\frac{1521}{4}\right) = -\left(x - \frac{39}{2}\right)^2$ e $y = 39 - x$	x
Conversão	↓	
	6) Esboço dos gráficos de A e y	x
Conversão e tratamento	↓	
	7) Solução	x
Conversão	↓	
	8) Desenho do quadrado de lados 19,5 cm por 19,5 cm e área 380,25 cm ² .	x
	Socialização da solução obtida	x

Como se pode perceber na Figura 4, na *modelização semiocognitiva*, a segmentação e a recontextualização não ocorrem uma única vez para a compreensão do enunciado, em cada etapa onde há conversão, elas se fazem necessárias. Ressalta-se que o processo de *modelização semiocognitiva* possibilita conversões coordenadas entre registros de representação distintos e é papel do professor planejar o ensino com base em tais elementos

semiocognitivos. Ademais, um problema desse tipo pode ser o ponto de partida para algum outro assunto ou conteúdo que o professor queira abordar.

MODELIZAÇÃO SEMIOCOGNITIVA PARA COMPREENDER UMA DEFINIÇÃO - O CASO DA FUNÇÃO

Além da compreensão e resolução de problemas, outra dificuldade encontrada em sala de aula é a compreensão de definições matemáticas. Tomemos como exemplo a definição de função, a seguir apresentada conforme um livro didático:

Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. (Iezzi, 2004, p.81)

Esta definição pode ser compreendida por meio de um processo de *modelização semiocognitiva*, organizado pelo professor, a partir da segmentação, recontextualização e da hipótese fundamental da aprendizagem, apresentada na Figura 1. Tal definição de função está na forma de um teorema do tipo necessário e suficiente, o que caracteriza de forma mais clara as condições para que uma relação possa ser uma função. Assim, para a definição de função, destacam-se três proposições, sendo A e B dois conjuntos não vazios:

p: f é função de A em B ,

q: cada elemento de A está relacionado de forma única com algum elemento de B ,

r: todos os elementos de A estão relacionados.

A dinâmica da segmentação e recontextualização vai procurar destacar esses três elementos: **p**, **q** e **r**.

A dinâmica da segmentação

Quando o professor apresenta a definição de função "Uma relação entre dois conjuntos A (domínio) e B (contradomínio) é uma função se para cada elemento de A existe um único elemento correspondente em B ", o mesmo pode explicitamente incentivar a *segmentação cognitiva*, fazendo os seguintes procedimentos:

Segmentação cognitiva 1: "Uma relação entre dois conjuntos A e B ...": O que é uma relação? Como ela se parece (pares ordenados, diagramas, gráficos)? Quais são os conjuntos A e B ?

Segmentação cognitiva 2: "...se para cada elemento de A...": Isso significa que todos os elementos de A devem estar associados a B. Nenhum elemento do domínio pode ser deixado de fora. Esta é a condição de necessidade.

Segmentação cognitiva 3: "...existe um único elemento correspondente em B.": isso significa que cada elemento de A só pode estar associado a apenas um elemento em B. Esta é a condição de unicidade que, no contexto de funções, pode ser vista como uma forma de complementaridade na correspondência de A para B.

Já para a *segmentação funcional*, é necessário identificar o papel comunicativo de cada parte do texto, ou seja, qual a função discursiva de cada segmento dentro da definição apresentada.

Segmentação funcional 1: "Uma relação entre dois conjuntos A (domínio) e B (contradomínio)" - função discursiva: apresenta a ideia central do texto, ou seja, que a função será uma relação entre dois conjuntos. Essa parte indica a estrutura básica do conceito. O papel desta segmentação no texto é introduzir o objeto de estudo (função) e fornecer o contexto (teoria dos conjuntos).

Segmentação funcional 2: "Se para cada elemento de A" - função discursiva: definir a condição de aplicabilidade de uma função. Essa parte explica que todos os elementos de A, sem exceção, precisam participar de algum tipo de associação. O papel desta segmentação no texto é estabelecer o alcance (ou escopo) da relação.

Segmentação funcional 3: "Existe um único elemento correspondente em B" - função discursiva: apresentar o critério de validade para que uma relação seja uma função. Essa parte clarifica o aspecto mais importante das funções: a unicidade. O papel desta segmentação no texto é criar a restrição principal da definição.

Ao segmentar uma definição, o professor ajuda os estudantes a atribuir significado a cada parte, evitando a memorização vazia e preparando o terreno para a identificação das propriedades cruciais ao conceito e ao comportamento das funções.

A importância da recontextualização

Como possibilidades de procedimentos para *recontextualização cognitiva*, a partir da definição, temos:

Recontextualização cognitiva 1: Relação entre elementos de dois conjuntos. Uma função é uma relação que conecta um elemento de um conjunto A a exatamente um elemento do conjunto B. Em termos intuitivos, cada entrada ($x \in A$) está associada a uma única saída ($y \in B$).

Recontextualização cognitiva 2: Princípio de unicidade: a ideia de função consiste em garantir que para cada x em A, existe apenas um único y correspondente em B. Isto é, nenhuma entrada no conjunto A pode estar associada a mais de uma saída no conjunto B.

Recontextualização cognitiva 3: Par ordenado (x, y) como representação: uma função pode ser vista como um conjunto de pares ordenados (x, y) , onde $x \in A$ e $y \in B$, e nenhum valor de x aparece em mais de um par. Isso recontextualiza a definição formal pela estrutura dos pares ordenados que compõem f .

E, para a *recontextualização redacional*, que organiza o texto, alterando a forma como ele é apresentado linguisticamente sem deixar de conter o mesmo conteúdo semântico e matemático, considerando a definição de função, podemos ter:

Recontextualização redacional 1: "Uma função é uma relação entre dois conjuntos A (domínio) e B (contradomínio), tal que cada elemento do conjunto A se relaciona com exatamente um elemento do conjunto B. Isso significa que para qualquer $x \in A$, existe apenas um $y \in B$ correspondente".

Recontextualização redacional 2: "Uma aplicação f , de A em B, é chamada de função se, e somente se, cada elemento de A se associa (ou 'aponta') para um único elemento de B. Em outras palavras, nenhum valor de x em A está associado a mais de um valor de y em B".

Recontextualização redacional 3: "Dada uma relação f entre dois conjuntos A e B, podemos chamá-la de função quando, para todo elemento x do domínio A, existe um único elemento y no contradomínio B, de modo que o par ordenado (x, y) pertença à relação f ".

Como pontuado anteriormente, segmentar e recontextualizar um texto, no caso, uma definição, não garante a compreensão deste. A compreensão somente se consolida por meio de conversões coordenadas - hipótese fundamental da aprendizagem - as quais são possíveis a partir de representações de apoio.

Hipótese fundamental da aprendizagem e representações de apoio

A conversão é a transformação de uma representação de um objeto matemático em uma representação do mesmo objeto em um registro diferente. Duval afirma que é na conversão que reside o verdadeiro cerne da compreensão matemática, pois exige que o estudante reconheça a invariância do objeto conceitual apesar das mudanças em sua forma semiótica. As dificuldades de conversão são uma das principais causas de insucesso em matemática.

Para enfrentar este problema de insucesso, o professor pode propor atividades que exijam explicitamente a conversão entre registros, focando no conceito de função e suas propriedades. A partir da definição de função (verbal), uma representação de apoio muito utilizada nos livros didáticos que auxiliam na ideia do que é função, é uma representação a partir de diagrama de Venn, a qual pode expressar relações que são funções e relações que não são funções, destacando visualmente as condições de necessidade e unicidade. Essa atividade auxilia o estudante a internalizar o conceito ao exigir uma exteriorização ativa de sua compreensão.

Nos casos apresentados nas Figuras 5 e 6, temos a conversão do registro de *representação língua materna* $\leftrightarrow$ *representação diagrama de Venn*.

Figura 5

Representação de função por meio do diagrama de Venn.

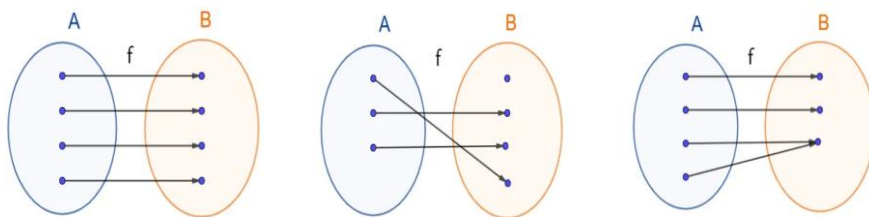
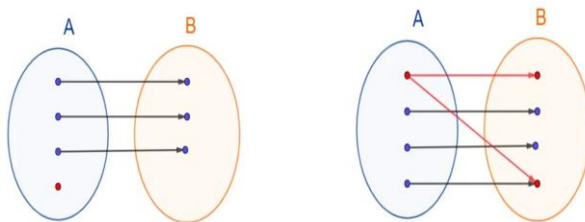


Figura 6

Representações de não função por meio do diagrama de Venn.



A partir disso, o professor pode apresentar exemplos como:

- Problema: "A relação que associa a cada número natural o seu sucessor é uma função?".

- Conversão para diagrama de Venn: o estudante desenha dois conjuntos e as setas, convertendo a descrição verbal em um diagrama visual. Isso permite que ele visualize as condições da definição, verificando que cada natural tem um único sucessor (necessidade e unicidade/complementaridade).

- Contrapositiva em conversão: apresentar um diagrama de Venn (registro em diagrama) no qual um elemento do domínio (conjunto A) possui duas setas saindo dele (violando a unicidade), ou um elemento do domínio sem nenhuma seta (violando a necessidade). Pedir que os estudantes convertam este registro de representação em diagrama em uma explicação verbal (registro da língua materna) do porquê não é uma função, utilizando a definição e a contrapositiva: "esta relação não é uma função porque, convertendo o diagrama para a definição, o elemento 'x' do domínio, por exemplo, possui duas imagens distintas 'y₁' e 'y₂' no contradomínio, o que contradiz a condição de 'um único elemento correspondente'". Ou "o elemento 'z' no domínio não possui nenhuma imagem, contrariando 'para cada elemento de A'".

Ao enfatizar a conversão, o professor não só auxilia o estudante a identificar a função em diversos RRS, mas a compreender a profundidade de sua definição, incluindo a unicidade (complementaridade) e como sua ausência caracteriza uma "não-função" através da contrapositiva. Isso fortalece a capacidade do estudante de elaborar uma compreensão conceitual e aplicar o conceito de função de maneira flexível em diferentes situações e representações.

O papel da noção da contrapositiva na compreensão das definições e teoremas

A implicação direta e a implicação contrapositiva são proposições equivalentes, ou seja, possuem a mesma tabela lógica de valor verdade:

$$s \Rightarrow t \quad \text{e} \quad \sim t \Rightarrow \sim s$$

são equivalentes do ponto de vista lógico¹. Temos que: “ $\sim$ ” é o operador lógico de negação, “ $\wedge$ ” o operador de disjunção, “ $\vee$ ” o operador de conjunção.

¹ No que segue, “ $\sim$ ” indica o operador lógico de negação, “ $\wedge$ ” o operador de disjunção, “ $\vee$ ” o operador de conjunção; $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$.

A dupla implicação $s \Leftrightarrow t$ é o mesmo que $s \Rightarrow t \wedge t \Rightarrow s$, que por sua vez é equivalente a

$$\sim t \Rightarrow \sim s \wedge \sim s \Rightarrow \sim t.$$

A definição de função tem a forma de um argumento de dupla implicação.

Com as proposições **p**, **q** e **r** definidas anteriormente (**p**: f é função de A em B , **q**: cada elemento de A está relacionado de forma única com algum elemento de B , **r**: todos os elementos de A estão relacionados), e considerando A e B dois conjuntos não vazios, podemos reescrever a definição de função conforme a tabela a seguir.

Tabela 2

Argumentos na definição de função e argumentos contrapositivos.

Argumento	Argumento contrapositivo
$p \Leftrightarrow q \wedge r$	$\sim q \vee \sim r \Leftrightarrow \sim p$
$p \Rightarrow q \wedge r$	$\sim q \vee \sim r \Rightarrow \sim p$
	caso não ocorra q ou não ocorra r ou não ocorra ambas as proposições, acontece $\sim p$ (f não será função)
e	e
$q \wedge r \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q \vee \sim r$
	$\sim p$ (f não será função) caso não ocorra q ou não ocorra r ou não ocorra ambas as proposições

A função definida na linha 1 da Tabela 2 é equivalente à definição contida nas linhas 2 e 3; a segunda coluna contém argumentos contrapositivos.

Podemos relacionar esta definição a partir da fala de um professor, em sala de aula:

[...] quando sair duas flechas de um mesmo elemento de A ou quando algum elemento de A não tiver flecha não é função. O resto todo é função. Basta vocês gravarem esses dois contraexemplos para identificar quando é função ou não (Sistema de Ensino Energia (2006) como citado em Moretti et al., 2012, p. 480).

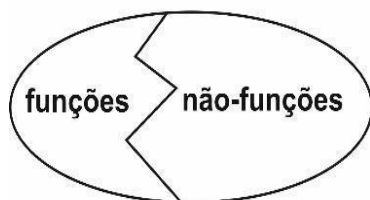
Nesta verbalização identifica-se o uso da contrapositiva como representação de apoio, se bem que há uma confusão entre não-exemplo, que é

o caso exposto, de contraexemplo. Há ainda um outro fato embutido nesse discurso, uma vez preenchido o requisito de haver dois conjuntos A e B não vazios e uma regra que associa o conjunto A ao conjunto B, no universo das relações, há tão somente funções e não-funções, como visto na Figura 7.

Figura 7

Universo das relações

Universo das relações



Essa dicotomia nem sempre ocorre, como é o caso, por exemplo, das funções pares e ímpares: uma função pode não ser par, mas não significa que ela seja ímpar. Analisemos uma situação mais próxima do cotidiano com o objetivo de compreender os argumentos direto e contrapositivo para o argumento “se chover, então leva o guarda-chuva”, dado como verdadeiro:

- argumento direto: se chover, então leva o guarda-chuva;
- argumento contrapositivo: se não leva o guarda-chuva, então não chove.

Passado um certo tempo em que pode ter chovido ou não, o que se pode concluir sobre a afirmação “o sujeito não vai aparecer molhado pela chuva de modo algum”?

O que se pode afirmar nos casos:

- se choveu: pelo argumento direto, o sujeito levou o guarda-chuva, portanto não se molhou;
- se não choveu: examinando os argumentos direto e contrapositivo, nada se pode afirmar, ou seja, ele pode ter levado ou não o guarda-chuva, mas se pode concluir que ele não se molhou porque não houve chuva;
- se não levou o guarda-chuva: significa, pelo argumento contrapositivo, que não choveu, assim, ele também não se molhou;
- se levou o guarda-chuva: não se sabe se choveu ou não, porém, com chuva ou sem chuva ele não vai se molhar porque levou o guarda-chuva.

Em resumo, o sujeito não vai aparecer molhado de modo algum.

É importante que o professor avalie a precisão na identificação das violações e na formulação das justificativas pelos estudantes. A clareza na aplicação da contrapositiva é um indicador de compreensão conceitual.

A partir dessas discussões, a apresentação da definição de função a partir da *modelização semiocognitiva* pode ser sistematizada conforme a Figura 8, a seguir.

Figura 8

Modelização semiocognitiva para a definição de função.

Conversão ou tratamento	Etapas	Segmentação e Recontextualização
	1) Representação da definição de função na língua materna	x
Conversão	↓	
	2) Representação diagrama de Venn	x
Tratamento	↓	
	3) Identificação das relações visualizando quando é ou não função.	x
Conversão	↓	
	4) Representação gráfica	x
Tratamento	↓	
	5) Identificação no gráfico das unidades significativas - Variáveis visuais	x
Conversão	↓	
	6) Exemplos e contra exemplos	x
Conversão e tratamento	↓	
	Compreensão do conceito de Função, via definição	x

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A *modelização semiocognitiva* aqui apresentada caracteriza-se como um processo de ensino estruturado de forma intencional pelo professor em sala de aula, com o objetivo de favorecer a aprendizagem do estudante. Nesse contexto,

o contrato didático, proposto por Brousseau (1996), estabelece que o professor precisa organizar e gerir a dinâmica da classe visando os objetivos de aprendizagem. Para tanto, torna-se necessário considerar o triângulo didático como referência analítica, que envolve:

- o saber a ser ensinado e que compõe o currículo de ensino escolar;
- o estudante que é o sujeito que se coloca em processo de aprendizagem a conceitos que fazem parte do currículo escolar;
- o professor que tem a função de gestar a sala de aula e didatizar os objetos de conhecimento tendo em vista a aprendizagem conceitual.

A escolha do tema a ser trabalhado deve ser feita de forma criteriosa, pois a *modelização semiocognitiva* requer a explicitação dos sistemas semióticos que comporão as atividades propostas pelo professor. No caso do problema da área de um terreno, em que se busca determinar a área máxima, estão envolvidos os sistemas discursivos da língua materna e da linguagem algébrica, bem como os sistemas não discursivos cartesiano e geométrico. Trata-se, portanto, de um problema aparentemente simples, mas que integra quatro sistemas semióticos distintos.

Isso exige a capacidade de abstrair as características essenciais do problema, como a relação linear, o ponto inicial e a taxa de variação e relacioná-las às condições e conclusões das propriedades matemáticas. A habilidade de recontextualizar esses elementos é um indicador da compreensão do conhecimento matemático.

A compreensão de uma definição matemática é uma evidência da necessidade da *modelização semiocognitiva*. Se a compreensão fosse meramente o armazenamento de um enunciado na memória, as dificuldades de transposição e aplicação observadas nos estudantes seriam inexistentes.

A dificuldade em matemática, frequentemente, não reside na complexidade inerente ao objeto matemático em si, mas na incapacidade dos estudantes de gerenciar e articular as diversas representações semióticas que o veiculam (Duval, 1995). As definições, como estruturas lógicas e operacionais, exigem essa fluidez e mobilidade. A mobilização bem sucedida de uma definição em um problema indica a mobilidade eficaz da formação, tratamento e conversão de suas representações, guiada pela segmentação do problema e pela recontextualização estratégica das definições.

Portanto, a análise de como os estudantes interagem com definições matemáticas em suas múltiplas representações e estratégias não apenas

corroborar com a relevância da *modelização semiocognitiva*, mas a eleva a uma potência didática. Para que os estudantes transitem da memorização para a compreensão e mobilização de conceitos de forma flexível, os professores precisam intencionalmente planejar atividades que estimulem essa dinâmica semiocognitiva, fazendo das definições um campo fértil para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Um dos papéis primordiais da *modelização semiocognitiva* é contribuir para as conversões coordenadas. Os questionamentos, provocados pelo professor, fazem esse papel uma vez que vão além do que está sendo tratado no problema. Como por exemplo, a questão: Qual formato do terreno? Sugere que um terreno pode ter vários formatos e, em consequência disso, as fórmulas da área e do perímetro não serão as mesmas. Em um primeiro momento, as questões visam a compreensão do enunciado do problema em língua materna para destacar os elementos significantes. Em um segundo momento, uma vez destacados esses elementos significantes (área, perímetro, lados, retângulo etc.), a conversão para a linguagem algébrica ocorre. No caso da Etapa 6 da Figura 4, a conversão pode ser completamente coordenada, que é um dos assuntos em destaque oriundo desse problema.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

M.T.M. foi responsável pela concepção do estudo e levantamento e análise das fontes. B.C.P. e C.M.N. contribuíram com o aprofundamento teórico e com a definição dos procedimentos metodológicos. Todos os autores participaram da redação do manuscrito, da análise dos dados e realizaram a revisão final do texto, participando ativamente da elaboração do artigo e da aprovação da sua versão final.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

O compartilhamento de dados não é aplicável a este artigo, pois baseia-se em pesquisas usando bibliografia publicamente disponível.

REFERENCES

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>

- Brousseau, G. (1996). Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: Brun J. *Didática das matemáticas*. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, (01), pp. 35-113.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2001). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Edição e impressão: Cali – Colombia.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas, SP: Papirus.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción: Myriam Veja Restrepo.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Duval, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros, 1988. Trad. Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), 06(2), 96-112.
- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322. Florianópolis, 07(2), 266-297.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning of some two-digit addition and subtraction procedures. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hatrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, pp. 153-192. Erlbaum.
- Iezzi, G. & Murakami, C. (2004). *Fundamentos de Matemática Elementar: Conjunto e Funções*. Ed. São Paulo-SP: Atual.

- Meneghetti, F. K. (2011). O que é um ensaio-teórico? *Revista de Administração Contemporânea*, 15(2), 320–332.
- Moretti, M. T. (2003). A translação como recurso no esboço de curvas através da interpretação global de propriedades figurais. In Machado, S. D. A. de (org). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus.
- Moretti, M. T; Brandt, C. F. & Almouloud, S. A. (2022) Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. *Quadrante*, 31(1), 92-112
- Moretti, M. T.; Brandt, C. & Franco, P. L. (2012). Estudo das formas de negação no processo de ensino da matemática: ponto de encontro com os registros de representação semiótica. *Ciência & Educação*, 18(2), 469-486.
- Pasa, B. C., Nehring, C. M. & Moretti, M. T. (2025a). Sobre o livro Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual de Raymond Duval: Estudo hermenêutico do capítulo VI. *RECEM – Revista Catarinense de Educação Matemática*, 4(5). <https://doi.org/10.37001/recem.v4i5.4656>
- Pasa, B. C., Nehring, C. M. & Moretti, M. T. (2025b). Compreensão de problemas de cálculo: Um estudo sob a ótica de Raymond Duval. *Caderno Pedagógico*, 22(13), e21785. <https://doi.org/10.54033/cadpedv22n13-227>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 334-370. Macmillan.
- Souza, J. & Garcia, J. (2016). *#Contato Matemático*. v.1. São Paulo: FDT.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>