

A Regra De Três sob o enfoque da Modelagem Matemática Reversa

Gleison de Jesus Marinho Sodré^a 

Saddo Ag Almouloud^b 

José Messildo Viana Nunes^b 

Renato Borges Guerra^b 

^a Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, Estado do Pará, Brasil

^b Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciência e Matemática, Instituto de Educação Matemática e Ciências, Estado do Pará, Brasil

RESUMO

Contexto: A Educação Matemática tem destacado a modelagem como uma atividade que inter-relaciona situações e modelos. Entretanto, pouca atenção tem sido dada ao processo inverso, que consiste na utilização e no estudo de modelos matemáticos para delimitar e problematizar situações associadas. **Objetivo:** Discutir, à luz da Teoria Antropológica do Didático, a modelagem matemática reversa como dispositivo metodológico para a formação de professores. **Design:** Apresenta-se um percurso formativo fundamentado em recursos teórico-metodológicos desse campo teórico. **Ambiente e participantes:** Professores em formação de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública, envolvidos no estudo do modelo matemático da regra de três em contraste com situações matemáticas. **Coleta e análise de dados:** Analisa-se um recorte empírico produzido com os participantes durante o desenvolvimento do percurso formativo. **Resultados:** Os resultados, de caráter localizado e exploratório, sugerem a pertinência metodológica da modelagem reversa para o estudo de situações matemáticas e indicam que o uso do computador pode atuar como condição didática favorável ao surgimento de novas questões de estudo e a mudanças na qualidade das relações dos participantes com a regra de três. **Conclusões:** Os achados empíricos, ainda que introdutórios, sugerem a fecundidade da regra de três, mobilizada por meio da modelagem reversa, para a concepção de organizações praxeológicas mais amplas voltadas ao ensino da matemática escolar. Além disso, estimulam investigações futuras sobre a regra de três como hipótese para o estudo de problemas abertos e para a construção de novas articulações entre modelos matemáticos e situações com matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática Reversa; Teoria Antropológica do Didático; Regra de Três; Formação de Professores.

The rule of three from the perspective of reverse mathematical modeling

ABSTRACT

Background: Mathematics education has emphasized modeling as an activity that interrelates situations and models. However, little attention has been given to the reverse process, which consists of using and studying mathematical models to define and problematize associated situations. **Objective:** To discuss, in light of the Anthropological Theory of Didactics, reverse mathematical modeling as a methodological tool for teacher education. **Design:** We present a training program grounded in the theoretical and methodological resources of this theoretical field. **Setting and participants:** Pre-service teachers in a mathematics education program at a public institution, engaged in the study of the mathematical model of the rule of three in contrast to mathematical situations. **Data collection and analysis:** An empirical sample generated with the participants during the development of the training program is analyzed. **Results:** The results, which are localized and exploratory in nature, suggest the methodological relevance of reverse modeling for the study of mathematical situations and indicate that the use of computers can serve as a pedagogical condition conducive to the emergence of new research questions and changes in the quality of the participants' relationships with the rule of three. **Conclusions:** The empirical findings, though preliminary, suggest the potential of the rule of three, applied through reverse modelling, for the design of broader praxeological frameworks focused on the teaching of school mathematics. Furthermore, they encourage future research on the rule of three as a hypothesis for studying open-ended problems and for building new connections between mathematical models and real-world mathematical situations.

Keywords: Reverse mathematical modeling, Anthropological theory of teaching, Rule of three, Teacher training.

La regla de tres desde la perspectiva del modelado matemático inverso

RESUMEN

Contexto: La educación matemática ha destacado la modelización como una actividad que interrelaciona situaciones y modelos. Sin embargo, se ha prestado poca atención al proceso inverso, que consiste en la utilización y el estudio de modelos matemáticos para delimitar y plantear como problemas las situaciones asociadas. **Objetivo:** Analizar, a la luz de la Teoría Antropológica de la Didáctica, la modelización matemática inversa como herramienta metodológica para la formación del profesorado. **Diseño:** Se presenta un itinerario formativo basado en recursos teórico-metodológicos de este campo teórico. **Entorno y participantes:** Profesores en formación de una carrera de Licenciatura en Matemáticas de una institución pública, que participan en el estudio del modelo matemático de la regla de tres en contraste con situaciones matemáticas. **Recopilación y análisis de datos:** Se analiza un fragmento empírico obtenido con los participantes durante el desarrollo del itinerario formativo. **Resultados:** Los resultados, de carácter localizado y exploratorio, sugieren la pertinencia metodológica del modelado inverso para el estudio de situaciones

matemáticas e indican que el uso del ordenador puede actuar como una condición didáctica favorable para que surjan nuevas cuestiones de estudio y se produzcan cambios en la calidad de las relaciones de los participantes con la regla de tres.

Conclusiones: Los resultados empíricos, aunque preliminares, sugieren la utilidad de la regla de tres, aplicada mediante el modelado inverso, para la concepción de organizaciones praxeológicas más amplias orientadas a la enseñanza de las matemáticas escolares. Además, estimulan futuras investigaciones sobre la regla de tres como hipótesis para el estudio de problemas abiertos y para la construcción de nuevas articulaciones entre modelos matemáticos y situaciones matemáticas.

Palabras clave: Modelización matemática inversa; teoría antropológica de la didáctica; regla de tres; formación del profesorado.

INTRODUÇÃO: A DIDÁTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA REVERSA

A literatura em Educação Matemática reconhece a importância da modelagem matemática, doravante MM, nos currículos e nas práticas de ensino escolar, sobretudo por seu papel na resolução de problemas de interesse pessoal, profissional, cívico e científico, como assinalam Krawitz, Schukajlow, Yang e Geiger (2025).

Embora Krawitz, Schukajlow, Yang e Geiger (2025) apontem a inexistência de uma compreensão unívoca da MM, assumimos os pressupostos teórico-metodológicos do Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática (Sodré; Guerra, 2018; Sodré, 2019), daqui em diante C IMM, e, de modo mais amplo, da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1989, 1999, 2005, 2019), ou simplesmente TAD, ao situar que “grande parte da atividade matemática pode ser identificada com uma atividade de modelagem matemática” (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001, p. 51), não como simples dimensão da atividade matemática, mas como atividade de MM em si.

Sob as lentes teóricas da TAD, Chevallard (1989) define a MM como um processo entre sistemas e modelos, estruturado em três etapas: definição do sistema a ser estudado, construção do modelo matemático e trabalho no/do modelo. As noções de sistema e modelo matemático são funcionais e variam conforme o meio institucional analisado.

Nessa perspectiva, os sistemas podem ser entendidos como domínios de realidade (Chevallard, 1980, 2005), matemáticos ou extramatemáticos, e os modelos matemáticos como construções artificiais (Chevallard, 1989) voltadas à desmagificação “de *partes da realidade* por meio de modelos que, longe de serem representações exatas, revelam-se ‘máquinas’ capazes de produzir

conhecimento sobre a realidade em questão”¹ (Chevallard, Bosch & Gascón, 2006, p. 2, grifos dos autores, tradução nossa).

Pressupomos que a introdução de condições mínimas, a partir da didática do CIMM (Sodré & Guerra, 2018; Sodré, 2019), para o uso, o estudo e o desenvolvimento de modelos matemáticos em articulação com o estudo das situações pode se mostrar necessária, em nosso entendimento, tanto nas instituições de ensino quanto na formação de professores, em razão de seu “duplo papel funcional enquanto dispositivo didático-metodológico: para o ensino-aprendizagem de MM e para a formação docente” (Sodré, 2021, p. 17).

A organização praxeológica do CIMM é descrita por seis tarefas sequenciais, a saber:

- Tarefa T_0 – Construir uma Situação de Referência Inicial para o problema em contexto;
- Tarefa T_1 – Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relacionados ao problema em contexto;
- Tarefa T_2 – Encontrar situações com matemática que podem ser associadas a um modelo matemático;
- Tarefa T_3 – Avaliar os modelos matemáticos;
- Tarefa T_4 – Desenvolver um modelo matemático;
- Tarefa T_5 – Difundir e defender o modelo matemático.

O CIMM mantém e preserva as características de um percurso de formação à luz da TAD, ao considerar uma situação em contexto que demanda conhecimentos ou saberes para seu enfrentamento. Essa situação deve ser potencialmente capaz de ser traduzida por uma ou mais questões de estudo (Q_i), a serem enfrentadas por uma classe.

Com o objetivo de encontrar uma resposta útil (R), senão adequada, à questão (Q_0), o percurso de formação é desenvolvido pela classe a partir da instituição do sistema de estudos e investigação, designado sistema didático $S_D(X; P; Q_0)$, do qual devem derivar novas situações e questionamentos (Q_d), que, quando julgados de interesse para o ensino ou para a formação pelo professor (P), orientam o fluxo iterativo de criação de novos sistemas didáticos

¹ Fragmentos do texto: [...] of ‘a piece of reality’ by means of models that, far from being exact representations, turned out to be “machines” good at producing knowledge about the reality in question.

$S_D(X; P; Q_d)$, até que a classe julgue consensualmente ter encontrado a resposta útil (R) adequada ao processo de estudos.

Depreende-se do CIMM o subciclo constituído pelos tipos de tarefas T_0 , T_1 e T_2 , que, em unidade, foi denominado por Sodré, Ferreira e Guerra (2022) de modelagem matemática reversa, ou simplesmente MMR, por essa estrutura permitir encaminhar “a desconstrução e reconstrução de um modelo matemático com construções e reconstruções de situações” (Sodré, Ferreira & Guerra, 2022, p. 562). Com esse olhar, compreendemos a MMR como um subciclo do CIMM constituído pelas tarefas T_0 , T_1 e T_2 , em unidade e, como tal, orientado para a desconstrução e reconstrução diante do uso ou estudo de modelos matemáticos, em articulação e integração com a construção e reconstrução de situações com matemática.

A MMR, como parte integrante do CIMM, atende ao interesse desta investigação como metodologia de pesquisa e formação de professores em MM, por destacar o estudo de situações com matemática (Sodré, 2023, p. 205), em que essa noção é aqui compreendida “a partir da noção de práticas sociais com matemática proposta por Chevallard (2005)” e, como tal, ultrapassa o terreno originalmente concedido, isto é, o contexto do ensino da matemática escolar, ao penetrar o conjunto dos usos da matemática e infiltrar-se em uma infinidade de espaços institucionais nos quais o saber matemático é pertinente e sua manipulação é observável.

A noção de situação com matemática é adotada nesta investigação em função de ela se apresentar como quase que transparente, senão ausente, nos ciclos dominantes de MM. O estudo da situação se faz presente em todos os tipos de tarefa da MMR e, em particular, no confronto entre o uso do modelo e uma situação.

A didática da MMR pode evidenciar o papel das situações com matemática em relação aos modelos matemáticos e oferecer respostas ao problema da desarticulação dos saberes da matemática escolar (Bosch, García, Gascón & Ruiz Higuera, 2006). Com isso, cria-se a possibilidade de retomar conteúdos, questioná-los e integrá-los em organizações de saberes situacionais mais amplas e consistentes.

Encontrar respostas para essa problemática da desarticulação dos saberes da matemática escolar constitui um dos objetos de interesse da TAD e, mais amplamente, da didática da matemática, entendida como ciência das condições e restrições institucionais (Chevallard, 2005, 2009). Nesse contexto, o caminho para delimitar possíveis respostas podem ser traçado, em nosso

entendimento, por meio da MMR (Sodré, Ferreira & Guerra, 2022; Sodré, Guerra & Ferreira, 2026), frente ao estudo da inter-relação entre modelos e situações com matemática.

A inter-relação dialética entre modelos e situações com matemática pode ser desenvolvida por meio do uso de modelos matemáticos socialmente legitimados, entendidos também como geradores de domínios de realidade (Chevallard, 1980, 2005). Entre esses modelos incluem-se aqueles de interesse para o ensino da matemática escolar, como a regra de três, que pode cumprir funções didáticas relevantes na articulação e integração de saberes matemáticos e não matemáticos. Nessa direção, Guerra e Silva (2009) e Silva (2017) destacam a regra de três como um instrumento importante para a modelagem de situações reais.

Tomamos como foco esse alcance nada desprezível da regra de três, assinalado por Silva (2017), para favorecer a reconstrução de organizações praxeológicas voltadas à obtenção de modelos matemáticos em relação ao estudo das situações associadas. Embora o ensino da regra de três se manifeste assentado nos fundamentos da proporcionalidade, como defendem Ávila (1986) e Lima (2001), interessa-nos destacar seu potencial como saber prático estruturante e independente do discurso teórico matemático da proporcionalidade, haja vista que, “em muitos casos, os elementos tecnológicos são até mesmo integrados à técnica [...], onde uma mesma expressão possui uma função dupla, técnica e tecnológica”² (Chevallard, 1999, p. 224, tradução nossa).

O ensino escolar e, não raro, os livros didáticos revelam o fazer da regra de três intimamente associado à noção de proporcionalidade, o que nos parece ocultar a “distância” existente entre a regra de três e a teoria das proporções sob o enfoque histórico-epistemológico, como evidencia Sarma (2002, p. 134, tradução nossa): “Com essa regra, é possível resolver facilmente vários tipos de problemas, mesmo sem o conhecimento da teoria geral da proporção”³. A regra de três e sua importância social fazem-se sentir pela necessidade de torná-la acessível às pessoas comuns, uma vez que “o objetivo das obras hindus é

² Fragmentos do texto: En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están integrados en la técnica. [...] en la que el mismo pequeño discurso tiene una doble función, técnica y tecnológica (...).

³ Fragmentos do texto: With this rule on can easily solve several types of problems even without a knowledge of the general theory of proportion.

fornecer um método que possa ser facilmente usado por pessoas comuns” (Datta & Singh, 1938, p. 217, tradução nossa).

Os vestígios histórico-epistemológicos (Datta & Singh, 1938; Sarma, 2002; Høyrup, 2012; Silva, 2011, 2017) da regra de três revelam distanciamentos em relação à teoria matemática das proporções, ainda que essa noção teórica pareça dotada de maior visibilidade, inclusive no ensino escolar, em detrimento da regra de três, pois “a visibilidade do bloco do saber aumenta, em detrimento do saber-fazer [...] classicamente apresentado como uma simples aplicação do saber”⁴ (Chevallard, 1999, p. 226, tradução nossa).

A compreensão apontada por Chevallard (1999), parafraseada para as noções de regra de três e proporcionalidade, pode revelar o papel coadjuvante atribuído à regra de três nos processos de ensino e aprendizagem da matemática escolar, como simples aplicação do discurso matemático da proporcionalidade. De outro modo, a proporção pode ser compreendida como um saber teórico, isto é, “um discurso cujo primeiro objetivo é justificar ‘racionalmente’ a técnica [...], de modo que uma racionalidade pode parecer pouco racional em outra instituição”⁵ (Chevallard, 1999, p. 224, grifos do autor, tradução nossa).

O *estilo de racionalidade* (Chevallard, 1999), legitimado pela instituição matemática acadêmica, afasta-se de noções associadas ao procedimento da redução à unidade, talvez pelo estranhamento decorrente da comparação entre grandezas de naturezas distintas, embora esse procedimento seja amplamente aceito em diferentes campos do conhecimento científico, nas ciências aplicadas, nas engenharias, na física escolar, na química, na geografia, na matemática escolar e em diversas atividades humanas.

Esse estranhamento em relação ao procedimento da redução à unidade também é evidenciado, segundo Silva (2017), em algumas pesquisas desenvolvidas no marco teórico da TAD, tais como Bosch (1994), Bolea (2003) e García (2005), que “não tratam propriamente das praxeologias da regra de três e de suas potencialidades para o desenvolvimento de novas praxeologias com outros objetos matemáticos [...] por não encontrar sentido no produto ou

⁴ Fragmento do texto: la visibilidad del bloque del saber aumenta, en detrimento del saber-hacer [...] classicamente como una simple aplicación del “saber”.

⁵ Fragmentos do texto: discurso cuyo primer objetivo es *justificar* “racionalmente” la técnica [...] de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución.

divisão de grandezas, principalmente quando são distintas” (Silva, 2017, p. 170).

Nessa direção, objetivamos evidenciar a MMR como dispositivo metodológico para a formação de professores, entendendo-a como condição necessária para desconstruir e reconstruir modelos matemáticos em articulação com o papel estratégico das situações com matemática (Sodré, 2023; Sodré & Guerra, 2024), a partir do uso da regra de três enquanto saber prático que preserva a ideia de variação entre grandezas.

Sob essas condições, encaminhamos o método da investigação e uma empiria orientada pela MMR como parte de um percurso de estudos e pesquisas para a formação de professores em MM, ou simplesmente PEP-FP, (Ruiz-Olarria, 2015; Barquero, Bosch & Romo-Vázquez, 2015; Sierra & Gascón, 2018; Florensa, Bosch & Gascón, 2019; Almouloud, Nunes, Pereira & Figueroa, 2021; Guerra & Ferreira, 2022), com professores em formação inicial.

O MÉTODO DA INVESTIGAÇÃO

Na perspectiva da TAD, o PEP-FP busca criar condições para o desenvolvimento de atividades apoiadas em uma epistemologia funcional dos saberes (Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Serrano, 2013), com base no paradigma do questionamento do mundo. Seu objetivo é familiarizar professores em formação com o PEP (Chevallard, 2005, 2013, 2019) como dispositivo metodológico para o desenvolvimento profissional (Almouloud, Nunes, Pereira & Figueroa, 2021), considerando que “o que importa não é tanto o que o aluno saberá com antecedência, mas o que ele será capaz de aprender com sua investigação, a fim de avançar” (Ladage & Chevallard, 2010, p. 2, tradução nossa).

Sierra e Gascón (2018, p. 96, tradução nossa) destacam que a noção de PEP-FP deriva de dois processos complementares: “o questionamento do modelo epistemológico dominante em uma instituição escolar em torno de um campo da matemática a ser ensinado [...] e o processo de transposição didática”.

Segundo Ruiz-Olarria (2015), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015), Sierra e Gascón (2018), Florensa, Bosch e Gascón (2019) e Almouloud, Nunes, Pereira e Figueroa (2021), o PEP-FP organiza-se em cinco módulos: **M₀**, **M₁**, **M₂**, **M₃** e **M₄**.

• **Módulo M₀: Explicitar as razões de ser do PEP-FP.** Inicia-se a partir de uma questão geratriz do tipo Q₀-FP: “Como ensinar um conteúdo matemático específico?”, isto é, como ensinar a regra de três? O objetivo é

responder a essa questão, ao menos parcialmente, ao final do processo de estudo. Esse primeiro módulo é desenvolvido por meio da busca por informações disponíveis em resultados de pesquisas e diretrizes curriculares. Trata-se de um módulo estratégico no PEP-FP, segundo Ruiz-Olarría, Bosch e Gascón (2019) e Florensa, Bosch e Gascón (2019), por permanecer “aberto” e incorporar os resultados produzidos nos demais módulos;

- **Módulo M₁: Vivenciar um PEP.** Os professores em formação são convidados a atuar como alunos, de modo a se familiarizarem com o processo de estudos;

- **Módulo M₂: Analisar o PEP vivenciado.** Após vivenciarem um ambiente de estudos interativo, os participantes são convidados a analisar as práticas desenvolvidas e a refletir sobre elas sob uma perspectiva praxeológica, didática e ecológica, considerando o conjunto de condições e restrições para sua exequibilidade em sala de aula;

- **Módulo M₃: Conceber um PEP como engenheiro didático.** A partir das experiências vivenciadas nos módulos anteriores, espera-se que os professores em formação construam organizações praxeológicas para o ensino;

- **Módulo M₄: Gerenciar e experimentar um PEP.** O objetivo é que os professores em formação inicial coloquem em ação, ainda que parcialmente, o gerenciamento de um PEP em sala de aula com os alunos, considerando as práticas construídas ou desconstruídas nos módulos anteriormente vivenciados, expressas por meio de eventuais mudanças na qualidade das relações (Chevallard, 2005) estabelecidas com os objetos de saber.

Nos módulos do PEP-FP, é preciso considerar que “o conteúdo do equipamento praxeológico útil não é definido de antemão: nós o descobriremos, embora muito parcialmente, à medida que investigamos [...]; é muito raro que os conhecimentos [...] *surjam espontaneamente para nós*” (Chevallard, 2013, p. 8, grifos do autor, tradução nossa).

Para delimitar o PEP-FP, consideramos uma empiria desenvolvida com 4 (quatro) professores de matemática em formação inicial⁶, vinculados ao curso

⁶ Os dados empíricos obtidos a partir da manifestação dos professores em formação inicial se deu no contexto de uma disciplina curricular de uma instituição pública de ensino superior. Nesse sentido, os registros dos professores aqui destacados não explicitam as suas identidades, suas imagens e vozes, zelando-se assim pela dignidade e devida proteção aos participantes da pesquisa científica. Por essa razão, não foi solicitada prévia avaliação ética pelos conselhos adequados do projeto de pesquisa de

de licenciatura em matemática. Trata-se, portanto, de um corpus reduzido, de natureza situada, que permite produzir interpretações analíticas sobre o processo observado, mas não sustenta generalizações amplas. A investigação foi orientada pela seguinte questão geratriz:

- **Q₀-FP:** *Como ensinar a regra de três como hipótese provedora para a construção e articulação de modelos matemáticos, em contraste com o papel estratégico desempenhado pela situação com matemática a ela associada?*

À luz da TAD, “estudar formalmente uma questão genérica é, em geral, trabalhar para lhe dar uma resposta [...]. Estudar um saber, mais precisamente uma entidade praxeológica, é realmente estudar algumas questões relativas à sua estrutura, às suas funções, à sua gênese etc.” (Chevallard, 2009, p. 16, grifos do autor, tradução nossa). É nessa direção que encaminhamos as análises e os resultados produzidos com professores em formação inicial.

Os dados coletados durante a empiria do PEP-FP incluem as falas manifestadas por alunos e professores em formação em sala de aula, os registros descritivos dos objetos matemáticos evidenciados durante os estudos escolares, os questionamentos levantados pela classe e, de modo mais enfático, as situações com matemática reveladas a partir dos modelos gerados, sob a hipótese didática da variação entre grandezas da regra de três e das relações estabelecidas entre elas.

Sob essa hipótese didática, a regra de três foi assumida funcionalmente como um saber prático e, como tal, dotada de potencialidades para o estudo de situações com matemática por meio do procedimento da redução à unidade, da descrição algébrica de fórmulas, do uso do computador na construção geométrica de superfícies e, não menos importante, da preservação da variação entre grandezas para a concepção e o estudo de outros modelos matemáticos de maior alcance didático.

Nesse sentido, os registros conceituais produzidos por alunos e professores em relação aos saberes, bem como suas falas durante o processo de estudos, constituem o corpus analisado nesta investigação. Esses registros foram interpretados à luz dos referenciais teórico-metodológicos da TAD e da

que o trabalho decorre. Assim, assumimos e eximimos a Acta Scientiae de quaisquer consequências daí decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa, conforme orienta a Resolução N° 510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil.

MMR, buscando evidenciar o papel estratégico das situações com matemática associadas aos modelos da regra de três que emergiram em sala de aula.

ANÁLISES E RESULTADOS ENCONTRADOS

As análises da empiria foram conduzidas à luz da MMR, tomada aqui como dispositivo teórico-metodológico para interpretar a articulação entre a desconstrução e a reconstrução do modelo matemático da regra de três e o estudo de situações com matemática emergentes ao longo do percurso formativo. Nesse enquadramento, a MMR permitiu examinar como as respostas produzidas pelos participantes, as questões formuladas em sala de aula e as relações estabelecidas entre grandezas evidenciaram deslocamentos nas relações com esse saber e abriram possibilidades de integração com outros objetos da matemática escolar.

A realização de um PEP-FP com os professores demandou a defesa das respostas **(R)** produzidas durante o módulo **M₄**, no qual os participantes gerenciaram e experimentaram um PEP específico em uma turma composta por 25 (vinte e cinco) alunos⁷ do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, em continuidade ao trabalho desenvolvido nos módulos anteriores.

Módulo **M₀**: Explicitar as razões de ser do PEP-FP

Orientados por esse módulo, os professores manifestaram, de forma consensual, as seguintes compreensões, das quais destacamos os excertos de fala de **P₁** e **P₃**:

- **P₁**: com a regra de três observamos o estudo de funções, teorema de tales, semelhança, os usos na física (Lei de Hooke, câmara escura), além do estudo com tabelas pela relação entre grandezas, gráficos e o método analítico-sintético [...];

⁷ Os dados empíricos obtidos a partir da manifestação dos alunos do 9º ano do ensino fundamental se deu no contexto de uma disciplina curricular de uma instituição pública do ensino básico. Nesse sentido, os registros dos alunos aqui destacados não explicitam as suas identidades, suas imagens e vozes, zelando-se assim pela dignidade e devida proteção aos participantes da pesquisa científica. Por essa razão, não foi solicitada prévia avaliação ética pelos conselhos adequados do projeto de pesquisa de que o trabalho decorre. Assim, assumimos e eximimos a Acta Scientiae de quaisquer consequências daí decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a qualquer dano resultante a quaisquer dos participantes da pesquisa, conforme orienta a Resolução Nº 510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do [Brasil](#).

- **P₃**: do assunto regra de três foi possível relacionar com a construção dos polinômios de primeiro e segundo grau.

Os destaques das falas dos professores **P₁** e **P₃** permitem situar o papel estratégico da regra de três em sua relação com a abertura de possibilidades didáticas para a construção de diferentes objetos matemáticos, tais como o estudo de funções polinomiais do primeiro e do segundo grau, o teorema de Tales, a semelhança de triângulos e a variação entre grandezas por meio da regra de três composta.

Esses objetos matemáticos, decorrentes dos processos de estudo desenvolvidos com a regra de três, permitiram à classe o encontro com diferentes situações, como a da câmara escura e a da Lei de Hooke, identificadas por esses professores como situações com matemática relevantes para o ensino escolar.

A partir dessas manifestações construídas consensualmente pelos professores, é possível interpretar que as situações com matemática, articuladas aos objetos matemáticos mencionados, indicam possibilidades didáticas de integração no interior do PEP, sob a hipótese da variação entre grandezas, conforme se desenvolve nos módulos subsequentes.

Módulos M₁/M₂: Vivenciar um PEP como aluno e analisá-lo sob condições praxeológicas, didáticas e ecológicas

Em consonância com os módulos **M₁** e **M₂** do PEP-FP, dois professores manifestaram as seguintes falas:

- **P₁**: Antes, eu imaginava a regra de três apenas como um procedimento mecânico: montar uma proporção, multiplicar em cruz e encontrar o valor desconhecido. Para mim, era um recurso restrito a situações simples do dia a dia, como calcular descontos, proporções em receitas ou resolver algum problema rápido de razão. Era algo útil, mas limitado, quase sem profundidade conceitual [...];
- **P₃**: Eu enxergava a regra de três como uma estratégia rápida e eficaz para encontrar grandezas desconhecidas, baseada na relação de proporcionalidade existente entre o que se busca e as informações que já são conhecidas, por exemplo, converter unidades de medidas. Apesar de utilizar desse saber, não compreendia sua importância e como ela podia se relacionar diretamente com outros tópicos importantes na matemática escolar [...];

As falas dos professores permitem interpretar, de modo pontual, indícios de mudanças na qualidade das relações (Chevallard, 2005) estabelecidas com a regra de três. Em particular, os registros de **P₁** e **P₃** sugerem um deslocamento de uma compreensão mais procedimental e restrita para outra, na qual esse saber passa a ser associado a diferentes objetos da matemática escolar. Trata-se, contudo, de uma interpretação situada, ancorada nas manifestações produzidas no processo formativo, e não de uma demonstração conclusiva de uma transformação estável. Nessa direção, a fala do professor **P₂**, apresentada a seguir, oferece elementos adicionais para essa leitura analítica:

- **P₂**: para exemplificar as etapas do método analítico-sintético e a construção das fórmulas algébricas, geral e específicas, vamos utilizar a seguinte questão: Se 12 trabalhadores constroem 32 metros de um muro em 8 dias. Quantos trabalhadores são necessários para construir 16 metros de um muro em 6 dias?

Na primeira etapa devemos esquematizar a regra de três em duas linhas, a da hipótese que são as informações já sabemos do problema e a da questão, que é o que buscamos descobrir. Na tabela a seguir temos o esquema que mostra na primeira linha a hipótese e na segunda linha a questão.

Dias (d)	Muro (m)	Trabalhadores (t)
8	32	12
6	16	t

A etapa da análise consiste em analisar as grandezas da questão, verificando se são diretamente ou inversamente proporcionais e reduzi-las a unidade para encontrar a constante de proporcionalidade k.

Dias (d)	Muro (m)	Trabalhadores (t)
$\downarrow$ $\frac{8}{8}$ 6	$\uparrow$ $\frac{32}{32}$ 16	$\uparrow$ $12 \cdot \frac{8}{32} = k$ t

Dias (d)	Muro (m)	Trabalhadores (t)
$\downarrow$ 1 6	$\uparrow$ 1 16	$\uparrow$ 3 = k t

Isso significa que 3 trabalhadores constroem 1 metro de muro em 1 dia e encontramos o valor da constante, desse modo:

$$k = \frac{t_0 \cdot d_0}{m_0} = 3$$

A partir da manipulação algébrica da constante, podemos obter a fórmula para encontrar o valor de t, que chamamos de fórmula geral:

$$t = \frac{k \cdot m}{d} = 3$$

Daí partimos para síntese, quando organizamos a fórmula específica que será utilizada para encontrar a resposta final.

$$t = \frac{3 \cdot 16}{6} \rightarrow \text{Síntese}$$

$$t = 8 \rightarrow \text{resposta}$$

Com todos os dados e respostas organizadas monta-se a tabela e fica aberta a possibilidade de verificar o gráfico que a função t gera.

Os encaminhamentos das falas dos professores e do contexto situacional analisado por **P₂** permitem identificar os seguintes elementos:

- O arranjo dos dados, conforme destaca Silva (2017), no estudo situacional da regra de três, considerando a variação entre as grandezas envolvidas;
- A análise do contexto do problema e a delimitação das relações entre as grandezas, sejam elas diretas ou inversas, por meio do uso de setas para representar essas relações;
- O sentido prático da constante da regra de três composta, utilizada com base no procedimento de redução à unidade;
- A construção da fórmula algébrica em contraste com o estudo da situação em contexto, a partir do método analítico-sintético vivenciado pelos professores como fundamento tecnológico-teórico matemático;
- A descrição das etapas do método analítico-sintético: a questão a ser respondida, a hipótese acerca do tipo de problema, o processo de análise e síntese e a obtenção de uma resposta para o problema específico, conforme apresenta Tilmant (1875);

Indícios, aqui interpretados como mudanças na qualidade das relações, no sentido proposto por Chevallard (2005), estabelecidas pelos professores com

a regra de três, considerando o caráter localizado do corpus constituído pelas falas de P_1 e P_3 :

- P_1 : agora, após construir esse mapa de saberes e perceber todas as ramificações possíveis, a minha visão mudou bastante. A regra de três deixou de ser apenas um algoritmo e passou a ser entendida como um ponto de partida para diferentes campos da matemática e até de outras ciências;
- P_3 : Apesar de utilizar desse saber, não compreendia sua importância e como ele podia se relacionar diretamente com outros tópicos importantes na matemática escolar, como a construção de tabelas e gráficos de funções algébricas;

Parafraseando as falas desses professores sob o olhar de Chevallard (2009), quando se dispõe de uma praxeologia que incorpora essa técnica e permite construir novas praxeologias para o ensino, a relação do sujeito com a regra de três se transforma. Ela “torna-se então um objeto que se sabe poder ser alcançado por um caminho que jamais imaginávamos trilhar de outra forma”⁸ (Chevallard, 2009, p. 5, tradução nossa).

A exploração das práticas situacionais com o uso da regra de três, apoiada no procedimento de redução à unidade, criou condições, em nosso entendimento, para evidenciar modelos matemáticos algébricos, analisar as relações entre as grandezas, construir tabelas numéricas para o estudo das relações de crescimento e decrescimento entre as grandezas e representar graficamente as superfícies, tomando como base a fórmula algébrica e as relações estabelecidas entre elas, em articulação por meio da inter-relação entre modelo e situação com matemática.

Ademais, esse olhar para a funcionalidade da formulação algébrica encaminhada por P_2 , no contexto de uma situação com matemática por ele explicitada, pode “tornar-se adequada para preparar os alunos para escrever e ler outras leis físicas ou mecânicas mais ou menos simples [...]” (Tilmant, 1875, p. 25, tradução nossa), além, é claro, de possibilitar aberturas didáticas acerca do papel estratégico do procedimento de redução à unidade na descrição de fórmulas.

Com base nos módulos M_0 , M_1 e M_2 do PEP-FP, os professores projetaram uma organização para o ensino da matemática escolar, tendo em

⁸ Fragmento do texto: [...] est alors un objet à quoi l'on sait pouvoir arriver par un Chemin. qu'on n'aurait pas imaginé d'emprunter sinon.

vista o uso da regra de três e a noção de variação entre grandezas como hipótese orientadora dos processos transpositivos empreendidos com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, conforme os módulos **M₃** e **M₄**.

Módulos M₃/M₄: Projetar e experimentar um PEP em sala de aula

Assentados nas práticas estudadas, analisadas e construídas nos módulos **M₀**, **M₁** e **M₂** do PEP-FP (Ruiz-Olarría, 2015; Barquero, Bosch & Romo-Vázquez, 2015; Sierra & Gascón, 2018; Florensa, Bosch & Gascón, 2019; Almouloud, Nunes, Pereira & Figueroa, 2021), os professores em formação, juntamente com uma turma composta por 25 (vinte e cinco) alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, conduziram os processos de estudo ao longo do ano letivo. Esses processos foram orientados pelo saber prático da regra de três, buscando explicitar, durante as aulas, tarefas didáticas que promoviam aberturas da regra de três em direção à construção de outros objetos matemáticos, sem perder de vista as situações matemáticas, de modo a atribuir sentido e significado a esses objetos.

Uma das tarefas (**t₁**) apresentadas pelos professores aos alunos consistiu em:

***t₁**: Considere que oitenta pedreiros constroem 32 m de muro em 16 dias. Quantos pedreiros serão necessários para construir 16 m de muro em 64 dias? Sob essas condições, determine:*

- a) a constante das relações entre as grandezas;
- b) as etapas do método analítico-sintético;
- c) as fórmulas algébricas;
- d) a construção da tabela numérica a partir das relações entre as grandezas.

A resposta construída e destacada pelo professor **P₄** diante da turma foi orientada pelo *estilo de racionalidade* (Chevallard, 1999) associado ao procedimento de redução à unidade, conforme expresso na Figura 1.

Figura 1

Registro do professor **P₄** em sala de aula: o uso da redução à unidade. (Acervo da pesquisa, 2025)

The image shows handwritten mathematical work on a grey background. At the top left, a table of proportions is written:

d	m	P
1	1	40
64	16	P

To the right of this table is the word "ANÁLISE" in blue ink. Below the table, the calculation $P = 40 \cdot \frac{16}{64}$ is written, followed by an arrow pointing to "SÍNTESE/RESPOSTA" in blue ink. Below this, the formula $P = \frac{40 \cdot m}{d}$ is written and boxed. To the right of this is the text "FÓRMULA ALGÉBRICA" in blue ink. At the bottom left, the formula $C \cdot P = K \cdot \frac{m}{d}$ is written and boxed. In the center, there is a box titled "Regra de três composta". Inside the box, a table is written:

(d) dias	muro (m)	(P)
1	1	40
64	16	P

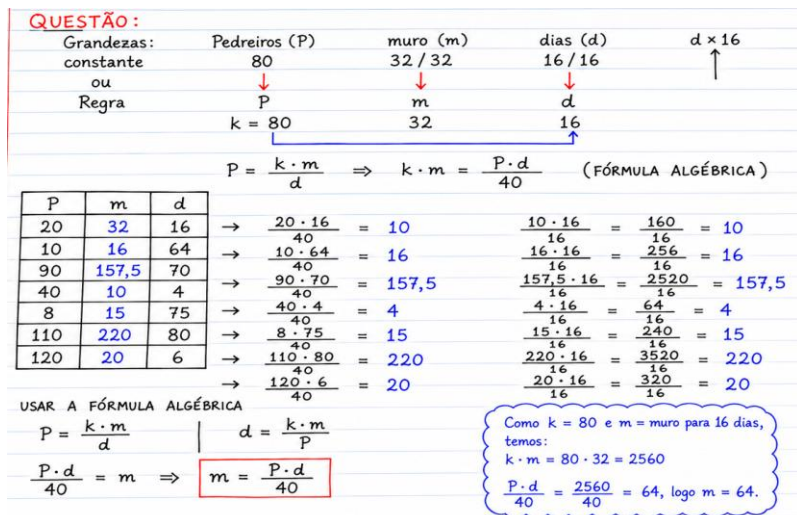
To the left of this table, the words "HIPÓTESE" and "QUANTIDADE" are written in blue ink with arrows pointing to the first and second columns respectively. To the right of the table, the calculation $\left(\frac{40 \cdot 16}{32} \right) = \frac{40}{K}$ is written, with a blue arrow pointing from the table's second column to the calculation. Below this, the word "ANÁLISE" is written in blue ink.

As manifestações do professor **P₄** revelam, localmente, diferentes objetos ostensivos, tais como: os arranjos de dados; a análise das relações entre as grandezas do problema considerado em seu contexto; a representação algébrica da fórmula da regra de três composta; o cálculo da constante das relações entre as grandezas a partir das condições iniciais do problema, sob o *estilo de racionalidade* (Chevallard, 1999) da redução à unidade; as etapas do método analítico-sintético, no sentido proposto por Tilmant (1875); e a construção de tabelas numéricas para o estudo das relações entre as grandezas.

A construção das tabelas numéricas permitiu o estudo das relações entre as grandezas por meio da substituição de valores numéricos na fórmula algébrica obtida, conforme busca evidenciar a Figura 2.

Figura 2

Construção de tabelas e fórmulas algébricas para as relações entre grandezas. (Acervo da pesquisa, 2025)



Diante da situação com matemática da regra de três composta, expressa na Figura 2, chamou atenção, a partir da construção da tabela numérica, a representação da fórmula algébrica descrita por $(p = 40 \cdot \frac{m}{d})$. Nesse caso específico, (**p**) representa o número de pedreiros, (**k = 40**) a constante da relação entre as grandezas, (**m**) o número de metros de muro a serem construídos e (**d**) o número de dias.

Sob esse conjunto de condições, a turma evidenciou as relações entre as grandezas envolvidas no problema em contexto em dois momentos situacionais distintos:

- Na situação com matemática dada pela relação linear entre as variáveis número de pedreiros (**p**) e tamanho do muro (**m**) a ser construído, adotou-se o número de dias (**d**) como valor fixo, no sentido de uma constante numérica, e não necessariamente como uma variável;
- Na situação com matemática específica das relações entre as grandezas número de pedreiros (**p**) e número de dias (**d**), interpretadas geometricamente sob a forma hiperbólica, considerou-se a variável tamanho do muro (**m**) como valor fixo, isto é, como uma constante

numérica e não propriamente como uma variável para essa situação em análise.

Essas interpretações apontam, em alguma medida, para possibilidades didáticas que podem ser exploradas a partir das ideias associadas à regra de três composta e à variação entre grandezas, quando se considera necessária a fixação de uma das variáveis como constante numérica para estabelecer relações entre as demais variáveis envolvidas.

Por outro lado, as relações entre as grandezas, quando descritas em linguagem funcional, podem ser tomadas como um ponto de partida heurístico para introduzir discussões sobre funções de várias variáveis. Nesse caso, a aproximação com temas como derivação ou integração de funções reais de duas variáveis deve ser compreendida em um sentido didático-exploratório, e não como decorrência formal imediata do trabalho realizado com a regra de três composta.

Nessa perspectiva, ao relacionar numericamente a quantidade de pedreiros e o tamanho do muro, pode-se fixar, para fins de análise, a grandeza “número de dias” como constante numérica, e vice-versa. A partir desses aspectos relacionais, a algebrização da regra de três composta pode ser interpretada como uma hipótese didática inicial para explorar, em nível introdutório, determinadas ideias associadas ao estudo de funções de duas variáveis.

Assim, eventuais tarefas envolvendo derivadas parciais de primeira ordem devem ser compreendidas como desdobramentos prospectivos e exploratórios dessa organização didática, e não como resultados diretamente demonstrados pela empiria aqui apresentada. Sob esse enquadramento, podem-se evidenciar as seguintes situações:

- Em relação a x (f_x): trata o y como uma constante e deriva em relação a x ;
- $f_x = 6 \cdot x \cdot y$
- Em relação a y (f_y): trata o x como uma constante e deriva em relação a y ;
- $f_y = 3x^2 + 5 - 3 \cdot y^2$;

De maneira articulada aos aspectos supracitados, o modo de pensar e operar entre as noções algebrizadas da regra de três composta e o estudo introdutório de funções reais de várias variáveis permite vislumbrar possíveis articulações didáticas, conforme sugerido na Figura 3, ao tomar a regra de três

composta como um caso particular dentro do universo das funções reais de várias variáveis.

Figura 3

Possibilidades didáticas entre a regra de três e o estudo de cálculo. (Autores da pesquisa, 2026)



Em todo caso, no estudo das relações entre as variáveis, tocou-se “na fronteira que separa o que pode ser chamado de ‘alfabetização algébrica’ do ‘analfabetismo algébrico’. Certas instituições [...] optam por ‘poupar’ seus alunos do ‘trabalho’ algébrico necessário [...]”⁹ (Strømskag & Chevallard, 2022, p. 384, tradução nossa).

Diante da construção da fórmula algébrica ($p = 40 \cdot \frac{m}{d}$) e do estudo das relações entre as variáveis, o professor **P₃** levantou a seguinte questão (**q₁**):

- **q₁:** Como representar graficamente a relação entre as grandezas expressa por: $p = 40 \cdot \frac{m}{d}$?

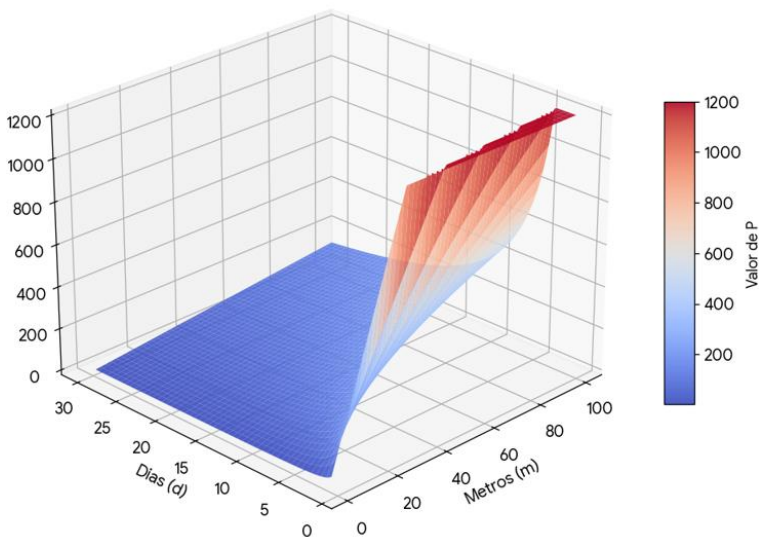
O enfrentamento da questão (**q₁**) pela turma exigiu a introdução de uma condição didática ao processo de estudo, nos termos de Chevallard (2009): o uso do computador. Essa condição mostrou-se relevante para viabilizar a representação geométrica da superfície, cuja construção e organização esquemática seriam mais limitadas sem esse recurso. Além de possibilitar a visualização gráfica das relações entre as grandezas, o uso do computador

⁹ Fragmentos do texto: We are touching here the borderline that will separate what can be called “algebraic literacy” from “algebraic illiteracy”. Certain institutions [...] choose to 'spare' their students the necessary algebraic 'work'.

favoreceu a exploração das variações associadas à constante ($k = 40$), determinada a partir das condições da situação com matemática em análise, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4

Representação geométrica da relação algébrica entre $\left(p = 40 \cdot \frac{m}{d}\right)$. (Acervo da pesquisa, 2025)



Sob a perspectiva das condições didáticas, incluindo o uso do computador pela turma no estudo das relações expressas por $\left(p = 40 \cdot \frac{m}{d}\right)$, é preciso considerar que “as condições não podem ser enumeradas a priori: a sua descoberta é progressiva” (Chevallard, 2009, p. 12, grifos do autor, tradução nossa).

Assim, o processo de estudo mediado pelo uso do computador possibilitou o surgimento de novas questões:

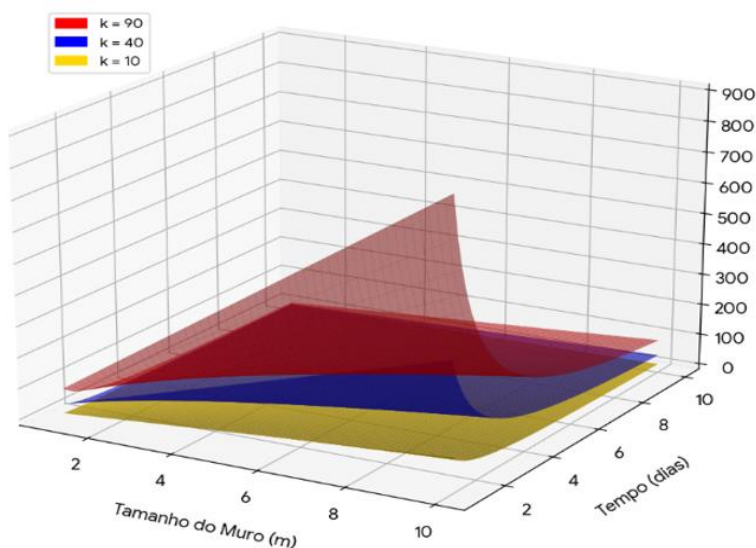
- **P₃ → q_{1.1}:** o que acontece com a representação gráfica diante da mudança do valor numérico da constante (**k**), ou seja, se essa constante for um numeral menor que 40? E se o valor for maior que 40, como fica?

- $P_2 \rightarrow q_{1,2}$: como ficará representado no gráfico, o ponto referente ao número de pedreiros (**p**), em função de 220 metros de muro em 80 dias?
- $P_2 \rightarrow q_{1,3}$: como ficará representado no gráfico, o ponto referente ao tamanho do muro a ser construído (**m**), em função da quantidade de 90 pedreiros em 70 dias de trabalho?

O uso do computador pela turma de alunos da Educação Básica evidenciou, em nosso entendimento, seu potencial para a exploração de projeções e análises do gráfico da superfície, especialmente no estudo da variação da constante (**k**) entre as grandezas envolvidas nesse tipo de problema em contexto, conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5

*O impacto da análise da constante (**k**) na relação entre as grandezas. (Acervo da pesquisa, 2025)*



A variação da constante (**k**) suscitou as seguintes manifestações dos sistemas didáticos S_1 , S_2 e S_3 , respectivamente:

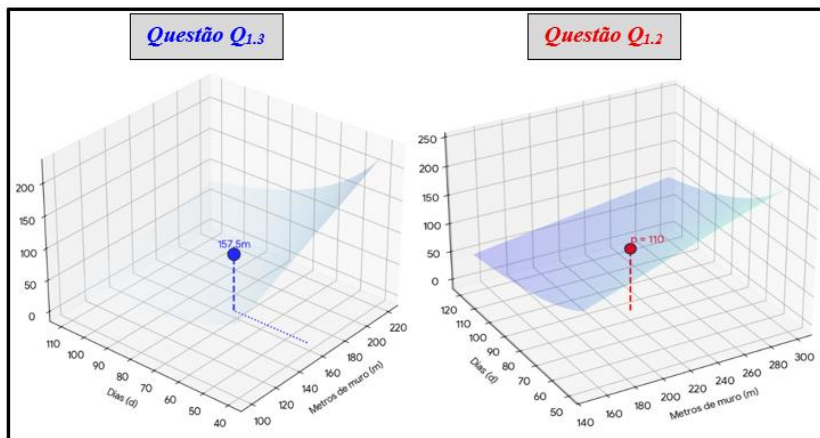
- $S_1 (X_{q_{1,1}}, P_{3(q_{1,1})}, q_{1,1})$: Quando a constante (**k**) é maior, mais mão de obra vai precisar dependendo da demanda do tamanho do muro que será construído [...];

- $S_2 (X_{q_{1.1}}, P_{3(q_{1.1})}, q_{1.1})$: Quanto maior o número (k), maior o número de pedreiros e mais metros de muro eles fazem; em consequência, menos tempo será necessário; achamos que se não entendemos errado, trata-se do comportamento de crescimento esticando ou achatando [...];
- $S_3 (X_{q_{1.1}}, P_{3(q_{1.1})}, q_{1.1})$: professor, olhando o gráfico dá pra ver bem que a constante (k) pesa muito no número de pedreiros necessários. Quando o (k) aumenta (tipo para $k = 90$), a superfície cresce bem mais rápido, principalmente quando o tempo é curto, ou seja, precisa de muito mais gente pra dar conta no mesmo prazo. Já com (k) menor (tipo para $k = 10$), o crescimento é bem mais suave, então a demanda de pedreiros não cresce tanto, mesmo aumentando o tamanho do muro. [...] a principal conclusão é que o (k) funciona como um fator de “intensidade” do problema: ele amplifica ou suaviza o impacto do tamanho do muro e do tempo. E fica claro aquele comportamento inverso com o tempo, quanto mais dias, menos pedreiros, mas esse efeito fica muito mais crítico quando o (k) é mais expressivo.

As situações matemáticas pontuais aqui analisadas permitiram o estudo das questões ($q_{1.2}$) e ($q_{1.3}$), relacionadas à localização de pontos na superfície do gráfico, conforme se depreende da Figura 6.

Figura 6

Representação geométrica de pontos específicos na superfície. (Acervo da pesquisa, 2025)



O encaminhamento dado pela classe ao estudo das questões $\{q_1, q_{1.1}, q_{1.2}, q_{1.3}\}$ não apenas revelou, em nosso entendimento, a construção de qualidades de relações (Chevallard, 2005) com objetos visuais mediadas pelo uso do computador, mas também evidenciou como essa condição didática ($\mathbb{C}_1$) ampliou as possibilidades de realização de cálculos relacionais entre as variáveis, bem como de visualização geométrica de seus comportamentos de crescimento e decrescimento.

Nessa perspectiva, o contato com tais objetos pode favorecer diferentes níveis de aproximação a uma praxeologia. Como assinala Chevallard (2009, p. 20, grifos do autor, tradução nossa), “conhecer uma praxeologia $\wp$ pode ser simplesmente cruzar com $\wp$, sem mais, ou manipular bem $\wp$ um pouco, ou trabalhar um tanto, até o estudo mais aprofundado”¹⁰.

Sob esse enfoque, o uso do computador sinalizou possibilidades de articulação, aqui compreendida como uma extensão das atividades humanas, conforme concebido pela teoria da reorganização de Tikhomirov (1981, p. 278), segundo a qual há situações “nas quais um problema é resolvido conjuntamente por humanos e computador, isto é, pelo próprio sistema homem-computador”.

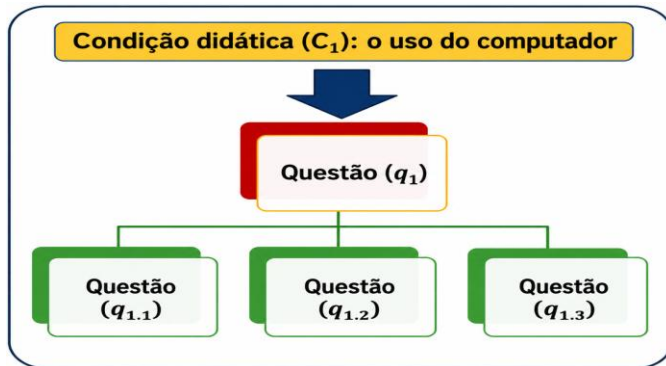
Nessa mesma direção, Tikhomirov (1989, p. 352) argumenta que a “interação entre o operador humano e o computador assume traços cada vez mais marcantes de atividade conjunta- cooperação ou rivalidade”. A dinâmica da relação homem-máquina evidenciou possibilidades de ampliação da ação do sujeito diante do estudo de uma situação com matemática.

Desse modo, além de possibilitar a abertura de novas perspectivas didáticas “para processar modelos com termos de função complexos ou para reduzir o esforço de cálculo. As ferramentas digitais podem executar uma série de tarefas no ensino de modelagem matemática” (Greefrath & Vorhölter, 2016, p. 21, tradução nossa), o uso do computador criou condições para o estudo de diferentes questões decorrentes da construção geométrica das fórmulas algébricas associadas à regra de três composta. As questões, embora situadas no campo dos possíveis, poderiam permanecer despercebidas ou não ser antecipadas sem o emprego dessa condição didática introduzida no processo de estudo, conforme ilustrado na Figura 7.

¹⁰ Fragmento do texto: rencontrer une praxéologie $\wp$, ce peut être simplement *croiser* $\wp$, sans plus, ou bien *manipuler* $\wp$ un tant soit peu, ou encore *travailler* $\wp$ quelque peu, voire *l'étudier* d'une façon plus approfondie.

Figura 7

O papel estruturante do uso do computador como condição didática. (Autores da pesquisa, 2026)



Com esse olhar, o uso do computador como ente integrante e necessário às atividades desenvolvidas pela classe permite vislumbrar pistas de articulações, ainda que pontuais no corpus aqui analisado, acerca de possíveis alterações na epistemologia da regra de três enquanto saber-fazer social prático. Tais articulações apresentam potenciais indícios para a estruturação de outros objetos matemáticos, inclusive os polinômios, motivadas pelas seguintes questões:

- q_2 : Como calcular a população brasileira em determinado recorte temporal?
- $q_{2.1}$: qual é o tempo médio do uso diário de telas em aparelhos celulares?

O estudo da questão q_2 levou em consideração dados reais da população brasileira referentes aos anos de 2000, 2010 e 2020, correspondentes, respectivamente, a aproximadamente 174,7, 191 e 212 milhões de habitantes, disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A Figura 8 busca evidenciar as relações didáticas estabelecidas entre os anos considerados, o ano de referência e a população correspondente, de forma aproximada, em cada período analisado.

Figura 8

Estimativa da população com o uso do modelo matemático. (Acervo da pesquisa, 2025)

ANOS	REF.	POPULAÇÃO	K_1	K_2
2000	0	174,7	1,63	
2010	10	191	2,1	0,0235
2020	20	212		

i) $\frac{191 - 174,7}{10 - 0} = 1,63$

ii) $\frac{212 - 191}{20 - 10} = 2,1$

iii) $\frac{2,1 - 1,63}{20 - 0} = 0,0235$

}

POLINÔMIO: $P(x) = y$

$y = y_0 + K_1(x - x_0) + K_2(x - x_0)(x - x_0)$

$y = 174,7 + 1,395x + 0,0235x^2$

$P(15) = 200,93$

$P(25) = 224,26$

Uma situação com matemática específica foi delimitada para o estudo da questão (q_2), mais precisamente com o objetivo de calcular, por meio de uma tarefa matemática, o valor numérico do polinômio obtido para estimar a população brasileira nos anos de 2015 e 2025. A projeção realizada nesse recorte temporal levou em consideração as variações entre as grandezas, descritas sucessivamente da seguinte forma:

- Primeira variação: $k_1 = \frac{191 - 174,7}{10 - 0} = 1,63$;
- Segunda variação: isto é, a variação da variação entre as grandezas: $k_2 = \frac{2,1 - 1,63}{20 - 0} = 0,0235$;

O estudo dessa situação com matemática, em contraste com o modelo matemático polinomial gerado pelas relações de variação entre as grandezas, conduziu o sistema didático auxiliar $S_3(X_{q_2}, P_{3(q_2)}, q_2)$ à seguinte manifestação:

- O modelo do polinômio do segundo grau é aceitável pelas respostas encontradas, pois apresenta uma boa estimativa para a contagem da população, ao considerar os valores percentuais dos erros ao comparar as respostas encontrados com o polinômio do segundo grau em relação aos valores fornecidos pelo IBGE para a contagem da população.

As manifestações da classe foram orientadas pelos professores em formação por meio do estudo e da construção, diante da turma, de polinômios de 1º e 2º graus. Para isso, adotou-se como hipótese de sustentação a regra de três diretamente proporcional, segundo a qual a razão entre as grandezas e suas variações permanecem constantes. Essas constantes, designadas por k_1 e k_2 , correspondem, respectivamente, à primeira e à segunda variação, conforme evidenciam os registros apresentados na Figura 9.

Figura 9

Descrição algébrica dos polinômios a partir da variação entre grandezas. (Acervo da pesquisa, 2025)

x_1	y_1
x_0	y_0

Se as grandezas são diretamente proporcionais,

Logo: $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = K_1 \Rightarrow K_1 = \text{primeira variação}$

$y_1 - y_0 = K_1 (x_1 - x_0)$

$y_1 = y_0 + K_1 (x_1 - x_0)$

$y = y_0 + K_1 (x - x_0)$

$y = y_0 + K_1 (x - x_0)$

Assim, a expressão: $y = y_0 + K_1 (x - x_0)$, pode ser escrita como:

$P(x) = y_0 + K_1 (x - x_0)$.

Para três pontos temos:

x_i	y_i	K_1	K_2
x_0	y_0	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	$\frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$
x_1	y_1	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
x_2	y_2		

$y_2 = y_0 + K_1 (x_2 - x_0) + K_2 (x_2 - x_0) (x_2 - x_1)$

$\vdots$

$y = y_0 + K_1 (x - x_0) + K_2 (x - x_0) (x - x_1)$

} Função polinomial de 1º grau

A experimentação do PEP sob a estrutura metodológica da MMR permite identificar, a partir das manifestações da classe, o estudo de diferentes situações matemáticas (Sodré, 2023) e o deslocamento da regra de três, enquanto saber prático, para formas mais amplas de organização dos saberes.

Nesse movimento, a compreensão das variações entre grandezas pode ser relacionada, em chave interpretativa e didática, a ideias presentes no método de interpolação polinomial de Newton por diferenças divididas finitas. Essa aproximação, contudo, deve ser compreendida como uma analogia formativa e uma hipótese de articulação conceitual, e não como uma equivalência formal já estabelecida pela análise empírica desenvolvida neste trabalho.

Nessa perspectiva, o enfoque aqui atribuído à regra de três, sob o *estilo de racionalidade* diretamente proporcional (Chevallard, 1999), e à fórmula geral da interpolação de Newton por diferenças divididas pode ser correlacionado didaticamente nos seguintes termos. Para tanto, delimitamos, de maneira introdutória, dados envolvendo apenas duas variações entre as grandezas, conforme pode ser observado no Quadro 1.

Quadro 1

*Possíveis relações didáticas entre a regra de três e a interpolação de Newton.
(Autores da pesquisa, 2026)*

Regra de três	Interpolação de Newton por Diferenças divididas
Primeira variação $k_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	Primeira ordem $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
Segunda variação: a variação da variação $k_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$	Segunda ordem $\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \\ = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \end{aligned}$

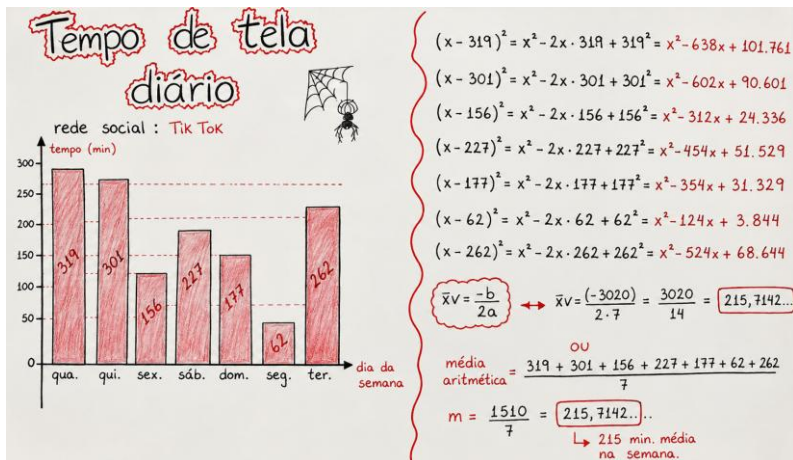
Mediado por esse contexto introdutório, e tomando os coeficientes $b_0 = f[x_0]$, $b_1 = f[x_0, x_1]$, $b_2 = f[x_0, x_1, x_2]$, ..., $b_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, o polinômio interpolador pode ser expresso por:

• $P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$, onde $b_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$.

O estudo dos polinômios de 2º grau possibilitou, pontualmente, à classe criar condições para responder à questão (Q2.1), referente ao tempo médio diário de uso de telas em aparelhos celulares, tomando como base um aplicativo escolhido consensualmente pelos participantes. Os dados obtidos por meio desse aplicativo são apresentados na Figura 10.

Quadro 10

Cálculo do tempo médio do uso de tela. (Acervo da pesquisa, 2025)



A descrição do polinômio de 2º grau $[E(x) = (x - 319)^2 + (x - 307)^2 + (x - 156)^2 + (x - 227)^2 + (x - 177)^2 + (x - 62)^2 + (x - 262)^2 = 7x^2 - 3020x + 375.692]$, abriu possibilidades didáticas para a problematização da razão de ser dos produtos notáveis e do cálculo do valor que minimiza o polinômio. Esse contexto foi aqui interpretado por meio de um tipo de tarefa matemática que consiste em determinar o valor que minimiza uma função.

Esse polinômio chama a atenção porque o valor que minimiza a função pode ser interpretado, nesse contexto, como uma aproximação da média aritmética dos termos $\{319, 307, 156, 227, 177, 62 \text{ e } 262\}$. Essa abertura didática, fundamentada na minimização da soma dos erros quadráticos, permite sugerir uma relação conceitual com o método dos mínimos quadrados.

Em termos mais precisos, pode-se afirmar que a média aritmética surge como um caso particular de um problema de ajuste por mínimos quadrados, quando se busca determinar um valor constante que melhor represente um conjunto de dados por meio da minimização da soma dos quadrados dos desvios. Nessa formulação, convém apresentar essa relação como uma conexão matemática específica e claramente delimitada, evitando tratá-la como uma decorrência ampla do próprio percurso empírico desenvolvido neste trabalho.

Assim, obtém-se o seguinte problema de minimização:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

Considerando uma função constante $f(x) = \mu$, o problema de minimização conduz à seguinte expressão:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow \text{Média aritmética}$$

Considerando um conjunto de dados formado por cinco termos genéricos, $\{p, q, r, s, t\}$, o problema de determinar o valor de (x) associado ao vértice da parábola que minimiza a soma dos erros quadráticos pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_3(x) &= (x - p)^2 + (x - q)^2 + (x - r)^2 + (x - s)^2 + (x - t)^2 \\ E_3(x) &= (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \cdot x^2 - 2(p + q + r + s + t) \cdot x + (p^2 + q^2 \\ &\quad + r^2 + s^2 + t^2) \\ E_3(x) &= 5 \cdot x^2 - 2 \cdot (p + q + r + s + t) \cdot x + (p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2) \end{aligned}$$

O valor de (x) correspondente ao vértice da parábola, denotado por (x_v) e dado por: $x_v = -\frac{b}{2 \cdot a}$, que minimiza a função polinomial de 2º grau, quando $(a > 0)$, pode ser expresso por:

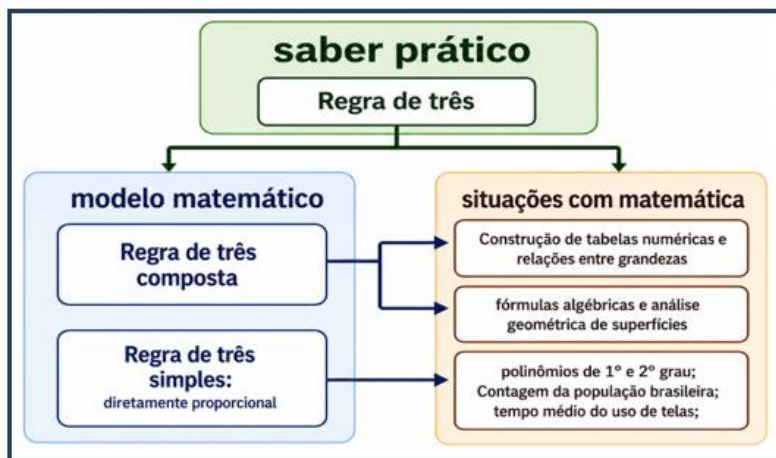
$$x_v = \frac{-(-2)(p + q + r + s + t)}{2 \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1)} \rightarrow M_A = \frac{(p + q + r + s + t)}{5}$$

Em última análise, o recorte empírico aqui destacado sugere, em caráter introdutório, o papel metodológico da MMR ao conduzir a classe, durante o processo de estudo, ao encontro de situações matemáticas colocadas em contraste com modelos matemáticos organizados sob a hipótese didática da regra de três, orientada pela análise das variações entre grandezas relacionadas entre si.

Nesse contexto específico, essa hipótese desempenhou a função de ponto de partida para a exploração didática de diferentes objetos matemáticos de interesse para o ensino escolar, entre os quais se destacam a construção de tabelas numéricas, o estudo das relações entre grandezas, a descrição de fórmulas algébricas, a análise de superfícies geométricas e o estudo de polinômios de 1º e 2º graus. Essas explorações foram desenvolvidas sob as restrições institucionais próprias da classe do ensino fundamental, conforme sintetizado na Figura 11.

Figura 11

A MMR: o enfoque das situações com matemática. (Autores, da pesquisa, 2026)



A Figura 11 sintetiza e evidencia resultados aqui interpretados como indícios de mudanças na qualidade da relação dos professores com a regra de três, tendo como foco o estudo das inter-relações entre situações matemáticas e o modelo. Nesse contexto, a dinâmica metodológica da MMR criou condições, ainda que não suficientes para abarcar a totalidade das possibilidades de estudo, para atribuir sentido e significado a diferentes objetos matemáticos que, frequentemente, se apresentam dissociados de uma possível ecologia de saberes articulados entre si. Assim, os saberes puderam ser mobilizados em diferentes contextos, não como conhecimentos isolados e dependentes de situações específicas, mas como elementos integrantes de uma rede de relações matemáticas.

As manifestações dos professores, orientadas pelo invariante da noção de variação entre grandezas e pelas relações estabelecidas entre elas, evidenciam, de modo introdutório, contribuições localizadas e exploratórias para o ensaio de uma possível resposta ao problema apontado por Bosch, García, Gascón e Ruiz Higuera (2006) sobre a desarticulação dos saberes na matemática escolar.

ENCAMINHAMENTOS FUTUROS: O “PROBLEMA ABERTO” DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DA REGRA DE TRÊS

Esta investigação objetivou evidenciar a MMR como dispositivo metodológico para a formação de professores, compreendendo-a como uma condição necessária à inter-relação entre modelo e situação, capaz de favorecer processos de desconstrução e reconstrução de modelos matemáticos em estreita articulação com o papel estratégico e, em muitos casos, indispensável, desempenhado pelas situações com matemáticas (Sodré, 2023; Sodré & Guerra, 2024). Nessa perspectiva, a preservação da ideia de variação entre grandezas foi interpretada como elemento de centralidade, por produzir, no sentido atribuído por Chevallard (2005, p. 77, grifos do autor, tradução nossa) e reforçado pela empiria construída com os professores, um “equilíbrio contraditório *entre passado e futuro*: é um *objeto transacional* entre passado e futuro”.

Embora a regra de três seja destacada, de modo predominante, pelo discurso teórico da proporção enquanto *estilo de racionalidade* (Chevallard, 1999), seu percurso histórico-epistemológico (Datta & Singh, 1938; Sarma, 2002; Høyrup, 2012; Silva, 2011, 2017) não se reduz a essa interpretação. Sua relevância social em diferentes campos científicos, escolares e profissionais evidencia a força e o papel estruturante do procedimento de redução à unidade, ainda pouco valorizado em parte da literatura especializada, dos documentos curriculares oficiais e de algumas pesquisas desenvolvidas no campo da TAD.

Os resultados empíricos encontrados indicam que a ideia de variação entre grandezas, interpretadas no estudo realizado como diretamente proporcionais, ocupou uma posição organizadora na construção de modelos matemáticos polinomiais e na abordagem de situações matemáticas (Sodré, 2023), tais como a projeção populacional e a análise do tempo médio de uso de telas. Esses resultados podem ser compreendidos como contributos localizados da metodologia da MMR (Sodré, Ferreira & Guerra, 2022; Sodré, Guerra & Ferreira, 2026).

Cumpramos ressaltar, contudo, que a possibilidade de compreender progressivamente a variação entre grandezas em articulação com procedimentos análogos aos mobilizados pelo método de interpolação polinomial de Newton constitui, neste artigo, uma hipótese interpretativa de ampliação didática, cuja pertinência deverá ser aprofundada e examinada em estudos posteriores.

A MMR favoreceu, entre os professores em formação, mudanças na qualidade das relações estabelecidas com a regra de três (Chevallard, 2005), ao possibilitar a articulação desse objeto com outros conhecimentos de interesse para o ensino da matemática escolar e, igualmente, com diferentes campos do conhecimento, cujas formas de pensar e agir encontram-se assentadas, em maior ou menor medida, em ideias associadas à regra de três.

Ademais, a introdução do uso do computador, à luz da teoria da reorganização proposta por Tikhomirov (1981, 1989), fez emergir novas questões de estudo, atuando, em nossa interpretação, como importante mediador para a exploração de representações geométricas e para o estudo relacional das variações entre grandezas, aspectos que dificilmente seriam desenvolvidos pela classe com a mesma agilidade em sua ausência. Sob outro prisma, o computador, compreendido como uma das condições de estudo no sentido da TAD, pode ser interpretado, à luz de Tikhomirov (1981), como uma extensão das atividades humanas.

Em última instância, os processos analisados nas situações matemáticas, em contraste com os modelos da regra de três, oferecem evidências localizadas compatíveis com a hipótese formulada por Silva (2017), segundo a qual a regra de três pode exercer um papel estruturante na modelagem matemática escolar de diferentes objetos matemáticos.

Os achados empíricos aqui descritos, ainda que introdutórios, sugerem a fecundidade dessa hipótese para o estudo das relações entre grandezas e para a estruturação dos polinômios de 1º e 2º graus que emergiram durante o processo investigativo. Nesse sentido, o trabalho incentiva futuras investigações, sob a ótica da MMR, voltadas à concepção de organizações praxeológicas de maior alcance para o estudo de situações matemáticas, considerando o papel da variação entre grandezas no contexto analisado.

Sob essas perspectivas, a problemática própria do campo de investigação da didática da matemática em que se insere a TAD, relativa à questão de como ensinar a regra de três, tomando-a como hipótese provedora para a construção e a articulação das inter-relações entre modelos matemáticos e situações, é aqui interpretada como um tipo de *problema aberto* (Gompertz, 2016, Aldon, 2021) de transposição didática.

Essa interpretação decorre do potencial que essa problemática apresenta para suscitar novos programas de investigação e diferentes cenários de estudo, envolvendo não apenas objetos matemáticos ao alcance do ensino

fundamental, mas também outros domínios, como os logaritmos, a função exponencial e a matemática financeira, entre outros.

Talvez por essa razão, Chevallard (2019, p. 74, tradução nossa) afirme que “problemas de extensão e complexidade (ou sutileza) são os principais fatores e incentivos da transposição didática”. Nessa direção, os resultados aqui apresentados permitem sustentar, ainda que de forma exploratória, a pertinência de aprofundar o estudo da regra de três como objeto de investigação didática capaz de favorecer novas articulações entre saberes matemáticos escolares e de ampliar as possibilidades de construção e reconstrução de modelos para o estudo de situações com matemáticas.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

GJMS, SAA e JMVN encaminharam a investigação apresentada. SAA, JMVN e RBG supervisionaram o planejamento e execução delimitando o uso metodológico da modelagem matemática reversa. GJMS e SAA planejaram a questão de investigação, o objetivo, os recursos teórico-metodológicos, as análises e resultados empíricos encontrados, bem como os encaminhamentos e perspectivas futuras da investigação.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que respaldam este estudo e investigação serão disponibilizados pelos autores para correspondência (GJMS), mediante solicitação prévia.

REFERÊNCIAS

- Aldon, G. (2021). *Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon 2011-2020*. Lyon: IREM de Lyon; Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon, 1-149.
- Almouloud, S. A., Nunes, J. M. V., Pereira, J. C. S., & Figueroa, T. P. (2021). Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. *Revista de Educação do Vale do São Francisco*, 11(24), 426–466.
- Ávila, G. (1986). Razões, proporções e regra de três. *Revista do Professor de Matemática*, (8), 1–8.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tese de doutorado, Universitat Autònoma de Barcelona).

- Barquero, B., Bosch, M., & Romo-Vázquez, A. (2015). Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 34(4), 202–219.
- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Tese de doutorado, Universidad de Zaragoza).
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática* (Tese de doutorado, Universitat Autònoma de Barcelona).
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz Higuera, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar: Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37–74.
- Chevallard, Y. (1980). Mathématiques, langage, enseignement: La réforme des années soixante. *Recherches*, (41), 71–99.
- Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir: Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Université Joseph Fourier.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–265.
- Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor.
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Artmed.
- Datta, B., & Singh, A. N. (1938). *History of Hindu mathematics*. Asia Publishing House.
- Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). Study and research paths: A model for inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 102(2), 191–212.
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tese de doutorado, Universidad de Jaén).

- Gompertz, A. (2016). *Les problèmes ouverts, une piste de différenciation pédagogique? (CMI)* (Dissertação de mestrado). DUMAS.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German-speaking countries*. Springer.
- Guerra, R. B., & Silva, F. H. S. (2009). Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. *Perspectivas da Educação Matemática*, 2(3), 95–119.
- Høyrup, J. (2012). *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture*. Birkhäuser.
- Krawitz, J., Schukajlow, S., Yang, X., & Geiger, V. (2025). A systematic review of international perspectives on mathematical modelling: Modelling goals and task characteristics. *ZDM – Mathematics Education*, 57, 193–212.
- Ladage, C., & Chevallard, Y. (2010). Enquêter avec l'Internet: Étude d'une nouvelle condition du travail didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(1), 85–115.
- Lima, E. L. (2001). *Meu professor de matemática e outras histórias*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tese de doutorado, Universitat Autònoma de Barcelona).
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, 4(2), 106–131.
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tese de doutorado, Universidad Autónoma de Madrid).
- Ruiz-Olarría, A., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. *Educación Matemática*, 31(2), 132–160.
- Sarma, S. R. (2002). Rule of three and its variations in India. In Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts, & B. van Dalen (Eds.), *From*

- China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas* (pp. 133–156). Franz Steiner Verlag.
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: Análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tese de doutorado, Universitat Ramon Llull).
- Sierra, T. A., & Gascón, J. (2018). Los recorridos de estudio e investigación en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 30(2), 9–35.
- Silva, D. P. (2011). *Regra de três: Prática escolar de modelagem matemática* (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará).
- Silva, D. P. (2017). *A invariável prática da regra de três na escola* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Pará).
- Sodré, G. J. M. (2019). *Modelagem matemática escolar: Uma organização praxeológica complexa* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Pará).
- Sodré, G. J. M. (2021). Mathematical modelling and didactic moments. *Acta Scientiae*, 23(3), 96–122.
- Sodré, G. J. M. (2023). O descortinar da noção de situação em modelagem matemática escolar. *Educação Matemática Pesquisa*, 25(1), 200–226.
- Sodré, G. J. M., Ferreira, R. S. R., & Guerra, R. B. (2022). Modelagem matemática reversa. *Acta Scientiae*, 24(6), 552–583.
- Sodré, G. J. M., & Guerra, R. B. (2018). O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 20(3), 239–262.
- Sodré, G. J. M., & Guerra, R. B. (2024). Um cenário da matemática financeira escolar sob a modelagem matemática reversa. In S. A. Almouloud, R. B. Guerra, J. M. V. Nunes, & J. C. S. Pereira (Orgs.), *Grupo de estudos e pesquisas em didática da matemática: Contribuições para a educação matemática* (pp. 109–134). Editora Akademy.
- Sodré, G. J. M., Guerra, R. B., & Ferreira, R. S. R. (2026). Um modelo matemático e várias anomalias. *Educação Matemática Pesquisa*, 28, 1–26.
- Strømskag, H., & Chevallard, Y. (2022). Inquiry in mathematics education from the perspective of the Anthropological Theory of the Didactic. *Journal of Mathematical Behavior*, 65, Article 100934.

- Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of computerization. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (p. 256–278). M. E. Sharpe.
- Tikhomirov, O. K. (1989). The theory of activity changed by information technology. In Y. Engeström, R. Miettinen, & R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (p. 347–364). Cambridge University Press.
- Tilmant, V. (1875). *Réforme analytique de la règle de trois ou règle d'or et notions d'analyse mathématique d'après Descartes, Pascal et Arnauld*. Librairie Classique de Paul Dupont.