

MODELO M³ (Matemáticas - Música - Modelado): un modelo didáctico alternativo a la enseñanza tradicional de matemáticas

Yasmim Julieta Silva^a 
 Fredy Enrique González^a 

^aUniversidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática; Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.

RESUMEN

Contexto: Este estudio se enmarca dentro del contexto empírico, teórico y epistemológico de la enseñanza de las matemáticas en la *escuela primaria y secundaria*. Aborda el problema de la *matefobia*, definida como una actitud generalizada de rechazo, tensión y temor hacia las matemáticas que conduce a un bajo rendimiento académico. La pregunta de investigación principal fue: *¿Cómo pueden las relaciones entre las matemáticas y la música contribuir al aprendizaje del conocimiento matemático en estudiantes de primaria?* **Objetivo:** Explorar y caracterizar las posibles contribuciones de la articulación entre la música y las matemáticas, mediada por el modelado matemático en la enseñanza de las matemáticas, para fomentar el aprendizaje de los estudiantes en una escuela pública. **Justificación:** El valor práctico, afectivo y social del estudio se demuestra al ofrecer el Modelo M³ como una alternativa a la enseñanza tradicional, lo que prueba que es posible transformar las experiencias negativas previas de los estudiantes en enfoques agradables y motivadores a través de la interdisciplinariedad. **Metodología:** Se trata de una investigación de campo cualitativa desarrollada en una escuela pública ubicada en la región sur del estado de Minas Gerais, Brasil. Participaron 13 estudiantes de octavo grado, organizados en tres grupos de aprendizaje cooperativo según sus intereses musicales. Siguiendo las cinco etapas del Modelo de Burak, se recopilaban datos a partir de grabaciones de audio, fotografías y diarios de campo. La información se sistematizó e interpretó mediante la estrategia analítica de la *Dialéctica de la Inmersión Arqueológica-Contemplación Hermenéutica*. **Resultados:** Los hallazgos indican que el Modelo M³ opera con una estructura multiplicativa y proximal donde cada dimensión mejora a las demás, lo que permite a los estudiantes pasar de ser receptores pasivos a protagonistas activos de su propio conocimiento matemático. **Reflexiones generales:** En general, se destaca la trascendencia del modelo para superar la *matefobia*, reconfigurando el rol del docente como mediador neuropedagógico y transformando la visión del aula en un espacio holístico donde la formalidad matemática coexiste con la cultura y la alegría del estudiante. **Perspectivas:** El estudio sienta las bases para realizar investigaciones futuras que evalúen la implementación de este modelo didáctico en la formación inicial

Autor de correspondencia: Yasmim Julieta Silva.
 E-mail: yasmimjulieta2211@gmail.com

del profesorado, o la creación de manuales específicos para universalizar la relación pentadimensional del Modelo M³.

Palabras clave: Mateofobia; Educación matemática; Modelización matemática; Interdisciplinariedad; Modelo didáctico.

MODELO M³ (Matemática-Música-Modelagem): um modelo didático alternativo ao ensino tradicional de Matemática.

RESUMO

Contexto: Este estudo se insere no contexto empírico, teórico e epistemológico do ensino da matemática na escola primária. Aborda o problema da fobia matemática, definida como uma atitude generalizada de rejeição, tensão e medo em relação à matemática, que acarreta um baixo desempenho acadêmico. *A questão central da pesquisa foi: Como as relações entre matemática e música podem contribuir para o aprendizado do conhecimento matemático em alunos do ensino fundamental?*

Objetivo: Explorar e caracterizar as possíveis contribuições da articulação entre música e matemática, mediada pela modelagem no ensino de matemática, para melhorar a aprendizagem dos alunos em uma escola pública. **Justificativa:** O valor prático, afetivo e social do estudo é demonstrado ao oferecer o Modelo M³ como uma alternativa ao ensino tradicional, mostrando que é possível transformar as experiências negativas anteriores dos alunos em abordagens agradáveis e motivantes através da interdisciplinaridade. **Metodologia:** Foi realizada uma pesquisa qualitativa de campo em uma escola pública da região sul do estado de Minas Gerais, Brasil. Participaram treze alunos do oitavo ano, organizados em três grupos de trabalho cooperativos de acordo com seus interesses musicais. Seguindo as cinco etapas da metodologia de modelagem de Burak, os dados foram coletados por meio de gravações, fotografias e diários de campo. A informação foi sistematizada e interpretada utilizando a estratégia analítica da *Dialética de Imersão Arqueológica-Contemplação Hermenêutica*.

Resultados: As avaliações indicam que o Modelo M³ opera com uma estrutura multiplicativa e proximal em que cada dimensão melhora as outras, permitindo aos alunos passar de receptores passivos para protagonistas ativos do seu próprio conhecimento matemático. **Reflexões gerais:** A nível global, torna-se evidente a importância do modelo para superar a fobia às matemáticas, que reconfigura o papel do professor como mediador neuro-pedagógico e transforma a visão da sala de aula em um espaço holístico onde a formalidade matemática coexiste com a cultura e a alegria do aluno. **Abordagem prospectiva:** A possibilidade de realizar estudos futuros para avaliar a transposição deste modelo didático na formação inicial dos professores, ou a criação de manuais específicos que universalizem a relação pentadimensional do Modelo M³, está bem fundamentada.

Palavras-chave: Fobia à matemática; Educação matemática; Modelagem matemática; Interdisciplinaridade; Modelo didático.

INTRODUCCIÓN

Este artículo surge de una investigación realizada en una escuela pública de una ciudad al sur del estado de Minas Gerais (Brasil), con una clase de alumnos de octavo grado como participantes. La principal motivación del estudio fue la observación de la primera autora sobre el rechazo de sus compañeros hacia las matemáticas. Además, es música (flautista) y pertenece a una familia de profesionales de diversos campos, casi todos ellos músicos. Esto la llevó a percibir la relación entre las matemáticas y la música desde muy temprana edad. Este fue el tema que eligió para su tesis de licenciatura (Silva, 2023), en la que realizó un estudio de metainvestigación sobre trabajos que abordan la relación entre matemáticas y música.

En una de las consideraciones finales de esta tesis, el autor expresó que *«las matemáticas y la música establecen el vínculo más profundo, no solo teórico sino también pedagógico, y esto puede explorarse ampliamente si se hace correctamente»* (Silva, 2023, p. 43). Pero, *¿cómo podría utilizarse la relación entre matemáticas y música para que los estudiantes —por ejemplo, los de primaria— dejen de rechazar las matemáticas y se acerquen a ellas de forma placentera?*

Esta fue la inquietud que llevó a la autora al Programa de Maestría en Didáctica de las Matemáticas de la UFOP, donde, entre los primeros cursos que cursó, se encontraba uno llamado Modelado en Didáctica de las Matemáticas, impartido por el propio creador de esta perspectiva sobre la Didáctica de las Matemáticas, el Profesor Dr. Dionísio Burak. Así surgió la tercera de las tres M: Modelado, que, al articularse con las de Matemáticas y Música, permitió concebir una estrategia para la enseñanza de las Matemáticas que aprovechaba las interacciones y el potencial mutuo de la relación entre MATEMÁTICAS, MÚSICA y MODELADO, dando origen al Modelo M³, concebido como una opción para superar la matefobia (Fernandes; Santos; Vasconcelos; Gonzaga, 2024) se observa en estudiantes de educación primaria y también en otros niveles educativos (Felicetti y Giraffa, 2008; Ferreira et al., 2023).

La matefobia (*término* introducido por Mihalko (1978, citado por Wood, 1988) es uno de los inhibidores del aprendizaje de las matemáticas; básicamente, consiste en una actitud de rechazo hacia las matemáticas y todo lo relacionado con esta disciplina. Esta actitud es una de las razones del bajo rendimiento de los estudiantes en la escuela y se caracteriza principalmente por un miedo, a menudo inexplicable, a las matemáticas. Jacobini (2004) la concibe de la siguiente manera.

[...] la denominada fobia a las matemáticas está relacionada con la ansiedad matemática y se produce principalmente debido a experiencias negativas previas con el aprendizaje de las matemáticas, que fueron experimentadas por los estudiantes [...] y debido a las ansiedades y sentimientos de tensión y miedo presentes en la mayoría de los estudiantes, derivados de la manipulación de números y la resolución de problemas matemáticos, que existen no solo en entornos académicos sino en la vida en general [...] (Jacobini , 2004, p. 48).

Como se puede inferir de la declaración de Jacobini (2004), el miedo asociado con la fobia a las matemáticas puede ser generado por una serie de experiencias vividas (Van Manen, 2003) por los estudiantes, tales como fracasos en las evaluaciones, ansiedad por el desempeño, falta de apoyo, comparaciones y presiones, métodos de enseñanza inadecuados, entre otros.

Es importante saber que esta actitud de rechazo debe y puede cambiarse. *¿Cómo lograrlo?* ha sido objeto de investigación, como la de Núñez García (2017), quien considera que los juegos podrían funcionar como estrategia para superar la fobia a las matemáticas y fomentar el interés por aprenderlas. Implementa una serie de juegos centrados en diferentes contenidos para demostrar que aprender matemáticas puede ser una tarea divertida.

Otros estudios resaltan la importancia de motivar a los estudiantes y despertar su curiosidad. Torres (2021) señala que las actividades grupales, el uso de la tecnología en el aula, las tareas vinculadas a la vida cotidiana del estudiante y los proyectos didácticos como práctica docente pueden captar su atención y, por ende, despertar su curiosidad. De esta manera, se puede incrementar el interés de los estudiantes por las matemáticas, lo que contribuye a superar su aversión.

Estas y otras estrategias pueden implementarse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, fomentando un ambiente en el aula que no permita la aparición de emociones negativas, como el miedo.

Ante este panorama, se planteó la idea de utilizar el modelado en la enseñanza de las matemáticas (Burak, 1992), que, al integrarse en el aula, se empleó como estrategia para apoyar a los estudiantes. Su implementación implica una serie de pasos que modifican la forma tradicional de enseñanza, situando a los estudiantes en el centro del proceso de aprendizaje y utilizando sus intereses para impartir contenidos matemáticos.

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados anteriormente, esta investigación se delimitó a partir de la siguiente pregunta orientadora: *¿Cómo pueden las relaciones entre las matemáticas y la música contribuir al aprendizaje del conocimiento matemático por parte de los alumnos de primaria?*

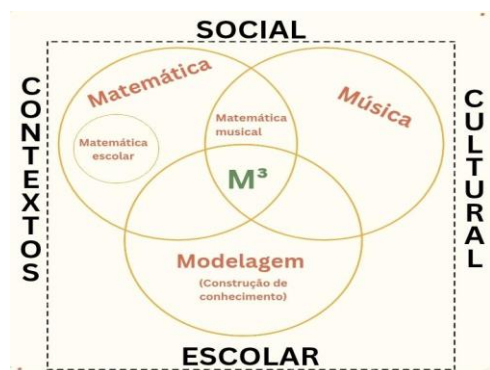
A partir de esto, se estableció el objetivo de la investigación: *explorar las posibles contribuciones de la articulación entre Música y Matemáticas, mediada por el Modelado en la Educación Matemática, al aprendizaje de los estudiantes de primaria en una escuela pública del sur de Minas Gerais.*

REPERTORIO DE COORDENADAS TEÓRICO-CONCEPTUALES DE REFERENCIA

Esta sección presenta el Repertorio de Coordenadas Teórico-Conceptuales de Referencia (RCT-CR) (González, 2017); este RCT-CR indica que el investigador construye un posicionamiento teórico y conceptual apropiado para su trabajo específico; por lo tanto, aquí se consideraron los contextos sociales, culturales y escolares, como se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Contextos asociados a la construcción del Modelo M^3



Para conectar estos tres contextos, se presentará una síntesis sobre las matemáticas escolares; las matemáticas *de y para* la escuela misma, más precisamente de la educación primaria, ya que éste es el nivel determinado para esta investigación; las relaciones entre las matemáticas y la música; la decisión de utilizar el modelado; y, la integración de matemáticas, música y modelado.

Según David, Moreira y Tomaz (2013), las matemáticas escolares se pueden ver

[...] como un conjunto de prácticas y conocimientos asociados al desarrollo del proceso de educación escolar en Matemáticas (que no se limitan a lo que se enseña a los estudiantes en la escuela, ya que también incluyen, por ejemplo, el conocimiento profesional vinculado al trabajo docente en este proceso (David; Moreira; Tomaz, 2013, p.45).

Las matemáticas escolares constituyen un campo amplio que trasciende la idea de que las matemáticas académicas adaptadas a los estudiantes deban simplemente trasladarse al entorno escolar. Se construyen en la escuela, por la escuela y para la escuela, considerando sus contextos físicos, sociales y culturales. No deben entenderse únicamente como una disciplina compuesta de contenidos que se transmiten, sino como una construcción elaborada en articulación con la práctica docente y la cultura escolar que la sustenta.

Partiendo de las prácticas y los conocimientos adquiridos en el contexto de las matemáticas escolares, es posible establecer relaciones con otras áreas del saber, contribuyendo significativamente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta propuesta se fundamenta en un enfoque interdisciplinario, entendido, según Fazenda (1994), ante todo, «como una actitud de respeto mutuo, intercambio, escucha y reconocimiento de la importancia de otros saberes» (Fazenda, 1994, p. 17). Para el autor, la interdisciplinariedad trasciende la simple unión de disciplinas: es una actitud dialógica, de intercambio y construcción colectiva del saber. Es con este espíritu que en este trabajo se propone el uso de la música como recurso para fomentar esta construcción integrada del saber matemático.

Para construir conocimiento que conecte ambas áreas, es esencial adoptar un proceso apropiado en el contexto de las clases de matemáticas. En este trabajo, se optó por el Modelado en la Educación Matemática como enfoque pedagógico, ya que permite la integración de contenidos de una manera más fluida y significativa. Como señala Bassanezi (2002), el modelado matemático ofrece la oportunidad de integrar conocimientos de diferentes disciplinas, favoreciendo un aprendizaje significativo. Este enfoque resalta el potencial de cada área involucrada y contribuye a la participación estudiantil al

proponer una práctica que rompa con la lógica tradicional¹ de la enseñanza. A continuación, se presentará una descripción más detallada del modelado.

Modelización en la enseñanza de las matemáticas

El modelado en la educación matemática surgió cuando los educadores matemáticos se mostraron preocupados por la visión del mundo respecto a las matemáticas. Esta visión percibía las matemáticas como inmutables e inflexibles, y estaba experimentando una crisis en términos de enseñanza y aprendizaje. Burak (1987) enfatizó que

Las dos últimas décadas han demostrado que la educación en general, y la enseñanza de las matemáticas en particular, atraviesa una de sus crisis más graves en lo que respecta al proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta crisis tiene repercusiones en todos los niveles educativos, ya sean primario, secundario o terciario (Burak, 1987, p. 12).

En un intento por cambiar la situación, comenzaron a investigar y desarrollar enfoques pedagógicos que pudieran presentar las matemáticas de una manera más crítica y reflexiva, y que resultaran atractivas para los estudiantes.

Desarrollado inicialmente en el extranjero, el modelado llegó a Brasil entre 1960 y 1970, cuando matemáticos brasileños participaron en congresos internacionales y entraron en contacto con esta nueva perspectiva sobre la investigación.

Entre los primeros precursores brasileños de este modelado se encuentran:

[...] Arístides Camargo Barreto, Ubiratan D' Ambrosio , Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Meyer, Marineuza Gazzetta y Eduardo Sebastiani, quienes iniciaron un movimiento de modelaje a finales de la década de 1970 y principios de la de 1980, ganando seguidores en todo Brasil (Biembengut, 2009b, p. 1).

¹En este contexto, la enseñanza tradicional se entiende como enseñanza teórica, basada en la memorización y la repetición de contenidos, donde el estudiante asume un papel pasivo.

Burak (2008) reafirma la afirmación de Biembengut indicando que

La introducción del modelado matemático en Brasil se debe a un grupo de profesores, especialmente Ubiratan D'Ambrosio y Rodney Carlos Bassanezi, ambos del Instituto de Matemáticas, Estadística e Informática de la Universidad Estatal de Campinas (IMECC/UNICAMP), quienes inicialmente difundieron este método alternativo de enseñanza de las matemáticas en forma de un curso de especialización para docentes. En 1983, en la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de Guarapuava-PR (FAFIG), ahora Universidad Estatal del Medio Oeste (UNICENTRO), comenzó la difusión de esta alternativa para la enseñanza de las matemáticas, con cursos de especialización para profesores de matemáticas. El método de trabajo buscaba romper con la forma habitual de enseñar matemáticas, que consistía en contenido teórico y ejercicios de aplicación. (Burak, 2008, p. 2).

Biembengut (2009) destaca que "gracias a estos precursores, las discusiones que abarcan desde cómo crear un modelo matemático hasta cómo enseñar matemáticas simultáneamente permitieron que surgiera la línea de investigación de Modelado en la Educación Matemática en la educación brasileña". (Biembengut, 2009, p. 2)

El trabajo que se estaba realizando aún no se denominaba "modelado matemático" como se conoce hoy en día, pero ya presentaba las características necesarias para definirlo como tal.

[...] Durante este período, el trabajo buscó desarrollar una estrategia de enseñanza que utilizara modelos matemáticos como motivación para el estudio de las Matemáticas, la cual fue llevada a cabo por la Pontificia Universidad Católica de Río de Janeiro (PUC/RJ), específicamente por el Profesor Aristides Camargo Barreto (Fiorentini, 1996, np).

Gracias a los resultados positivos de la investigación inicial, el modelado comenzó a utilizarse en proyectos escolares, universitarios y otros entornos para desarrollar disertaciones, tesis, artículos y otros materiales que posteriormente se publicarían, lo que aumentó aún más la visibilidad de este nuevo enfoque. Como resultado, el modelado se consolidó y ganó terreno en la enseñanza de las matemáticas.

El modelado matemático ha ocupado un espacio significativo e importante en Brasil, teniendo su propio grupo de trabajo (GT) dentro de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática (SBEM) llamado [GT- N°. 10] Modelado Matemático. Según la SBEM,

La misión de GT10 es fomentar el debate y la colaboración entre investigadores brasileños que realizan investigaciones sobre modelización matemática desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, contribuyendo al desarrollo de esta área de investigación en el país.

Las líneas de investigación de GT10 giran en torno al modelado desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles y modalidades didácticas, con intersecciones con otras tendencias en la enseñanza de las matemáticas, como las tecnologías de la información y la comunicación, la etnomatemática y la formación del profesorado, entre otras (SBEM, 2012).

Hoy, al igual que cuando se creó, el modelado matemático cuenta con figuras destacadas que lo representan, defienden y utilizan, entre ellas Jonei Cerqueira Barbosa y Maria Salett. Biembengut, Ademir Donizeti Caldeira y Dionísio Burak. Cada uno lo desarrolló de una manera distinta, según sus investigaciones, valores y creencias.

A continuación, en la Tabla 1, se presenta un resumen de las concepciones sobre el modelado según los autores citados anteriormente.

Tabla 1

Conceptos sobre modelización avalados por diversos autores

Investigador Criterios	Jonei Cerqueira Barbosa	Maria Salett Biembengut	Ademir Donizeti Caldeira	Dionísio Burak
DEFINICIÓN	Un entorno de aprendizaje en el que se invita a los estudiantes a indagar y/o investigar, a través de las matemáticas, situaciones que se	Un espacio para investigar un problema, con el fin de matematizarlo y transformarlo en un modelo.	Una metodología dinámica e investigativa que se desarrolla a partir del pensamiento crítico.	La modelización matemática consiste en un conjunto de procedimientos cuyo objetivo es establecer un paralelismo para explicar matemáticamente los fenómenos

	originan en otros ámbitos de la realidad.			presentes en la vida cotidiana de los seres humanos, ayudándoles a hacer predicciones y tomar decisiones.
EL PAPEL DEL MODELADO	Desarrollar habilidades generales para explorar y comprender el papel sociocultural de las matemáticas.	Una forma de despertar en el estudiante el interés por temas matemáticos que aún desconoce, al tiempo que aprende el arte del modelado matemático.	Como una de las posibles vías para establecer una nueva forma de integrar, en los espacios escolares, una manera de concebir las relaciones entre el conocimiento matemático y una sociedad más participativa y democrática.	Implica la concepción de unas matemáticas que no se limitan a su propio contexto, sino que son capaces de relacionar lo que se aprende dentro y fuera de la escuela: unas matemáticas construidas sobre la interacción del hombre con el mundo, unas matemáticas con historia.
ETAPAS	No	Sí, 1. interacción; 2. matematización; 3. modelo matemático.	No	Sí, 1) Selección del tema; 2) Investigación exploratoria; 3) Identificación del problema; 4) Solución(es) del problema y desarrollo de contenido y matemáticas relacionadas con el tema; 5) Análisis crítico de las soluciones.
NECESIDAD DEL MODELO	No lo considera necesario	Sí, un paso fundamental en su concepción.	No	No, pero eso no descarta su construcción si se da el caso.

La elección

Considerando la información anterior, este trabajo utilizó el modelo desarrollado por Dionísio Burak, ya que los autores se identifican con sus supuestos teóricos y metodológicos, al considerar que esta perspectiva ofrece un apoyo coherente a los objetivos de la investigación y a la forma en que comprende el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, articuló Matemáticas, Música y Modelado, constituyendo lo que aquí se denomina M³. Las Matemáticas como conocimiento a construir, la Música como herramienta para facilitar la comprensión de este conocimiento, fruto del interés personal del primer autor de este artículo, y el Modelado como proceso para la implementación y construcción del conocimiento.

METODOLOGÍA

El campo

El primer paso fue elegir la escuela donde se realizaría la investigación y qué grupo dentro de esa escuela participaría en el estudio. Se seleccionó una escuela pública estatal en una ciudad del sur del estado de Minas Gerais (Brasil). La escuela imparte clases de los últimos años de primaria (de 6° a 9° grado) por la tarde y de bachillerato (de 1° a 3° año) por la mañana, con un grupo de primer año de bachillerato por la tarde. Se aceptan estudiantes residentes de la ciudad donde se ubica la escuela, estudiantes de barrios cercanos y estudiantes de ciudades vecinas, siempre que haya plazas disponibles.

Este lugar se eligió principalmente por estar situado en una ciudad donde muchos estudiantes tienen una conexión con la música gracias a la banda local, y también por el cariño que la investigadora siente por ella, ya que fue su lugar de estudio durante sus años escolares y posteriormente durante sus prácticas universitarias. Además, se eligió por su fácil acceso. Cabe destacar que los estudiantes no necesitan tener una conexión con la música para participar en la investigación, pero esta es una característica del trabajo de campo.

Esta investigación involucró a un grupo regular de 13 estudiantes de octavo grado de la escuela mencionada. El grupo se seleccionó inicialmente según los niveles de la escuela primaria. Posteriormente, se consideraron los demás grupos y se determinó que los alumnos de noveno y sexto grado estaban en proceso de transición escolar, por lo que no habría tiempo suficiente para

realizar el estudio. Por lo tanto, se eligieron los alumnos de séptimo y octavo grado, ya que su nivel de conocimientos era ligeramente más avanzado.

La investigación de campo se guió por la dinámica contemplada en el modelo de Dionísio Burak (2004).

Para el ejercicio práctico de modelado, se consideraron sus 5 etapas²:

Paso 1: Elegir un tema:

En esta primera etapa, los estudiantes eligieron el tema a desarrollar durante los encuentros; su opinión siempre se tiene en cuenta y el tema surge de sus intereses. Para poder utilizar la música, se sugirió como tema principal, y dentro de este ámbito, los grupos eligieron el subtema que querían investigar. La clase se dividió en tres grupos, y los temas elegidos fueron: Sertanejo (música country brasileña), Pagode (un tipo de samba brasileña) y Zezé di Camargo y Luciano (artistas brasileños).

Paso 2: Investigación exploratoria:

En este caso, se recopilaban datos según los temas propuestos; los estudiantes investigaron para encontrar información sobre los temas a tratar. Utilizaron el laboratorio de computación de la escuela para investigar el tema y preparar sus presentaciones.

Paso 3: Identificar el/los problemas(s):

Con base en los datos recopilados, se realizaron presentaciones y se plantearon problemas y preguntas de los grupos de estudiantes para su resolución. Los problemas que plantearon fueron: "*¿Se puede representar el pagode con una fracción?*", "*¿Cómo se puede resolver la canción 'Sonho de Amor' usando una ecuación?*" y "*Cornélio Pires grabó la canción en 1929; ¿cuántos años han transcurrido desde esa grabación hasta ahora?*".

Paso 4: Solución(es) al/los problema(s) y desarrollo del contenido y las matemáticas relacionadas con el tema:

En esta etapa, se utilizan conceptos matemáticos para resolver los problemas planteados. Previamente a este encuentro, el investigador elaboró posibles soluciones para cada uno de los problemas, de modo que los estudiantes pudieran resolverlos posteriormente, durante el encuentro.

²La totalidad del trabajo desarrollado en este campo se presenta en detalle en el trabajo de grado de maestría al que se refiere este artículo (Silva, 2026).

Paso 5: Análisis crítico de las soluciones:

Se realizan debates y discusiones sobre los resultados para consolidar el aprendizaje; en la investigación en cuestión, se organizó una mesa redonda con preguntas dirigidas a los estudiantes para que pudieran expresar sus opiniones.

Análisis de la información recopilada

Una vez finalizado el trabajo de campo, la información recogida se interpretó mediante la estrategia analítica denominada Dialéctica de Inmersión Arqueológica-Contemplación Hermenéutica (González y Villegas, 2009, p. 103), que permitió organizar la información en tablas.

La estrategia aplicada en la organización y el análisis de la información permitió explicar la dinámica epistemológica del Modelo M^3 representado en la Figura 2.

Figura 2

Dinámica epistemológica del modelo M^3



Desde el punto de vista epistemológico, el Modelo M^3 funciona como una estrategia didáctica en la que se generan múltiples interacciones, mediadas

por el docente-investigador, entre matemáticas, música y modelado. Estas interacciones se desarrollan a medida que se activan las cinco etapas diferentes de modelado en la enseñanza de las matemáticas propuestas por Burak.

La estrategia desarrollada para el análisis de la información permitió una reconstrucción retrospectiva de la cronogénesis del proceso de enseñanza y aprendizaje, impartido por la Profesora-Investigadora, quien generó sus mediaciones didácticas articulando Matemáticas y Música.

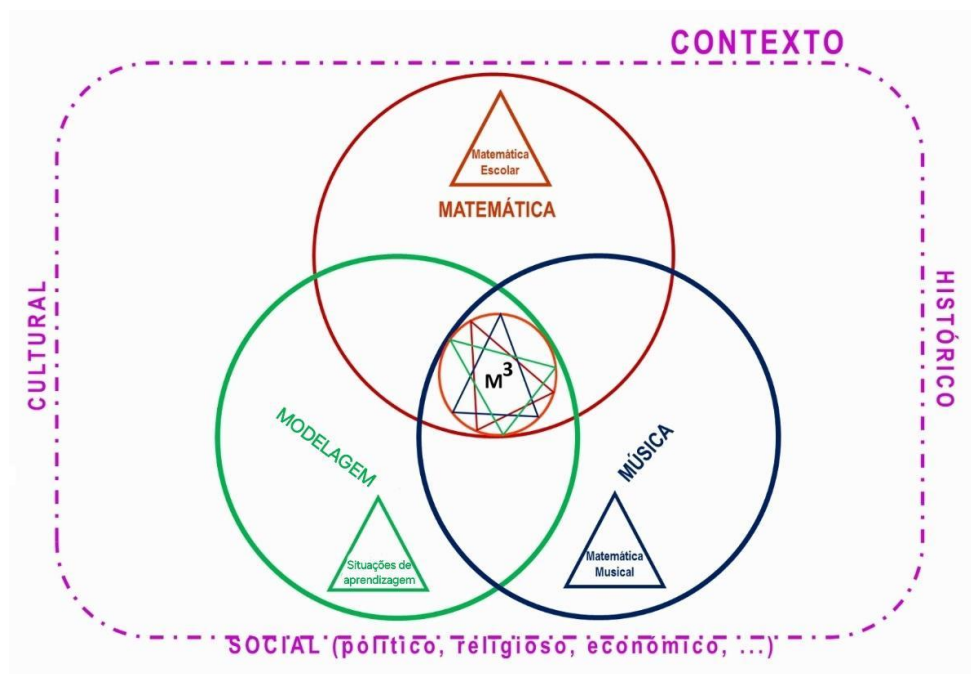
EL MODELO M^3 : QUÉ ES Y SUS DIMENSIONES FILOSÓFICAS.

Caracterización del Modelo M^3

Más que una expresión literaria o un simbolismo, M^3 indica un aspecto epistemológico de la investigación, donde cada M, que representa las iniciales de las tres áreas trabajadas aquí (**Matemáticas**, **Música** y **Modelado**), realiza a las otras dos (Figura 3).

Figura 3

Imagen ilustrativa del modelo M^3

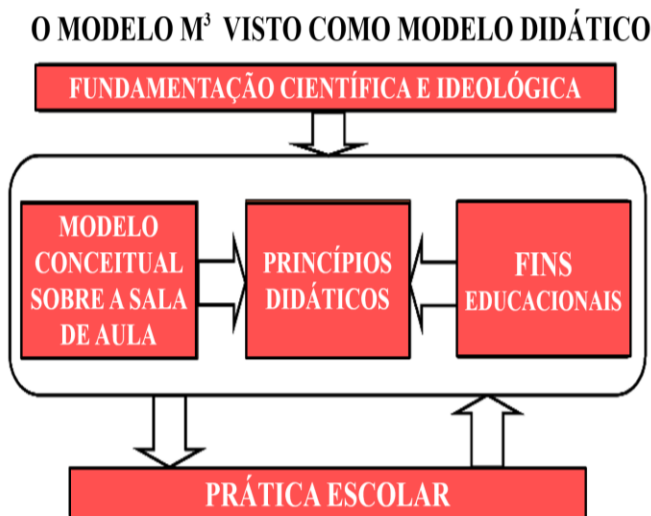


El Modelo M³ (Figura 4) se concibe como un modelo didáctico que, desde la perspectiva de González (2010), puede definirse como:

[...] una construcción teórico-formal que, basada en supuestos científicos e ideológicos, busca interpretar la realidad escolar y orientarla hacia ciertos fines y, además, permite dar respuestas plausibles a las siguientes preguntas: ¿Cómo se conceptualiza el aula? ¿Cuáles son los objetivos educativos que guían el trabajo didáctico? y ¿en qué principios didácticos se fundamenta la práctica escolar? (González, 2010, p. 51).

Figura 4

Componentes de un modelo didáctico (González 2010, p. 51)



Para una mejor comprensión, aquí hay un ejemplo: La **M (Música)** potencia las Matemáticas y el Modelado, ya que es a través de su temática que se desarrolla el trabajo de modelado en la disciplina. Y lo mismo ocurre con las otras M's.

La M (**Modelado**) potencializa el uso de la Música en las Matemáticas, facilitando una integración más significativa y fluida de ambas áreas. Asimismo, la M (**Matemáticas**) fomenta y posibilita la colaboración entre

Música y Modelado, al resolver problemas musicales matemáticamente mediante un enfoque de modelado.

Así, cada **M** es una dimensión (y no un componente) del modelo que tiene una estructura multiplicativa y no aditiva, de modo que las situaciones multiplicativas implican cantidades en relación constante entre sí y tienen una correspondencia "uno para muchos" y no solo una "uno para uno" como ocurre en la estructura aditiva.

En la caracterización del Modelo **M³**, se considera la perspectiva pentadimensional (González, 2005, 2008). Esta propuesta reúne las cinco dimensiones filosóficas de la investigación en Educación Matemática, que son: ontológica, epistemológica, axiológica, teleológica y metodológica.

DISCUSIÓN: ¿DÓNDE CONFLUYEN LAS CINCO DIMENSIONES?

La propuesta pentadimensional de González constituye la base de todo el trabajo desarrollado en la investigación llevada a cabo; sus aspectos están presentes en todo, desde la construcción hasta el análisis de la información.

Dimensiones previas al análisis de la información

El modelo **M³** integra tres campos del conocimiento: Matemáticas, Música y Modelado. Cabe destacar que la inicial de estas tres palabras es **M**, de ahí su denominación como Modelo **M³**. La música forma parte del interés personal de la investigadora, derivado de sus experiencias y las de su familia, compuesta por músicos y profesionales que trabajan con las matemáticas. La música, que guarda una estrecha relación con las matemáticas, como ya explicó Pitágoras, por ejemplo, con el monocordio (ABDOUNUR, 2002), se utilizó para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. El modelado se empleó como metodología de trabajo en el aula, adoptándose para esta investigación la perspectiva de modelado de Burak (1992).

La cuestión de qué es el Modelo **M³** es de naturaleza ontológica, ya que está directamente relacionada con el ser del asunto sobre el cual se está disertando. Esta dimensión tiene en cuenta las experiencias humanas y las vivencias. Según González (2020), la ontología indica el aspecto de la realidad que interesa al investigador (por ejemplo, las acciones, expresiones y sentimientos de las personas; la expresión, en la vida de un individuo, de una historia social colectiva; el significado atribuido a sus acciones por los protagonistas de una situación social específica; el significado subjetivo de la acción social; el estilo de vida de un grupo de personas; la vida cotidiana en

una comunidad; las experiencias sociosimbólicas de una estructura social, etc.) (González, 2020, p. 158).

El Modelo M³ se construyó a partir del trabajo de campo con estudiantes de octavo grado de primaria, donde se utilizaron las cinco etapas de modelado propuestas por Burak (1992) para la integración de Música y Matemáticas. Tras la recopilación de datos (realizada mediante grabaciones de audio, vídeos e imágenes fotográficas; notas en un diario de campo; apuntes de los estudiantes en sus cuadernos escolares y cualquier otra información generada por ellos, oral o escrita, que permita capturar, de la manera más holística posible, todo lo que ocurre durante el trabajo de campo), se analizaron los datos. Todos estos pasos y decisiones se refieren a la dimensión metodológica del modelo.

Dimensiones en el análisis de la información: el potencial del modelo

A continuación, se presentan algunos aspectos positivos que surgieron durante el trabajo de campo.

El interés de los estudiantes y una nueva postura: de receptores pasivos a protagonistas activos.

Según Burak (2019), “El hecho de que el grupo comparta el proceso de enseñanza, elija lo que quiere estudiar, tenga la oportunidad de expresarse, debatir y proponer, genera mayor interés en cada persona dentro del grupo” (p. 105). En esta investigación, el interés de los estudiantes estuvo presente en todas las etapas del modelado en la enseñanza de las matemáticas.

En la *primera etapa*, su curiosidad por saber qué se haría y la posibilidad de elegir en qué trabajar dentro del campo de la música generó interés, lo que los llevó a buscar temas, discutirlos y decidir qué materia elegir.

En la *fase de investigación exploratoria*, el hecho de llevar a cabo su propia investigación y tener que planificar y preparar sus presentaciones mantuvo su interés en buscar información, encontrar respuestas y aprender más sobre el tema elegido.

Durante la *fase de resolución de problemas*, al igual que en las demás etapas, el interés por aprender sobre los temas de los grupos de sus compañeros se mantuvo alto, compartiendo lo que habían preparado con todos y aprendiendo más sobre música. Dado que los problemas eran planteados por ellos mismos, el interés por saber si se podían resolver y cómo, estuvo presente

en todo momento; para cada problema, buscaban maneras de encontrar una solución, discutían las soluciones con sus compañeros, se ayudaban mutuamente, superaban las dificultades y siempre estaban interesados en descubrir la solución a sus problemas.

La Rueda de Conversación, durante la fase *de análisis crítico de las soluciones*, también mantuvo el interés de los estudiantes, ya que les permitió expresar sus opiniones, compartir ideas y escuchar y reflexionar sobre las contribuciones de sus compañeros.

El protagonismo que se da en todas las etapas del modelado en la enseñanza de las matemáticas ayuda a mantener el interés de los estudiantes, ya que ven que todo el proceso de aprendizaje está orientado hacia ellos, sus intereses y sus acciones.

Una de las expectativas que genera la aplicación de MEM es otorgar a los estudiantes un papel más destacado en la construcción de su propio aprendizaje, ya que en MEM la enseñanza es más dinámica.

[...] es más vívido y, por consiguiente, más significativo para cada estudiante y, por lo tanto, contribuye a que la construcción del conocimiento de un contenido determinado sea más intensa y eficiente por parte de cada participante, del grupo y del docente, basándose en el conocimiento individual y potenciando las relaciones interpersonales e interdisciplinarias. (Burak, 2019, p. 105)

Durante la fase práctica, la dinámica del aula se transforma por completo: el profesor ya no está al frente de la clase, y los alumnos ya no se limitan a escuchar y tomar apuntes. En MEM, y en esta investigación, la investigadora, quien asumió el rol de docente durante las etapas, solo sugirió y guió las acciones a realizar. Las decisiones —relacionadas con la elección de grupos, la selección de temas, el método de investigación, la organización y el montaje de las presentaciones, la formulación de problemas, la elección del primer problema a resolver, los debates para superar las dificultades encontradas, por ejemplo— y las acciones derivadas de estas decisiones fueron llevadas a cabo por los propios alumnos, mientras que la investigadora solo actuó como mediadora, les brindó asistencia cuando se lo solicitaron, y también por parte de los alumnos, y los guió durante las etapas, ya que eran nuevas para ellos.

Las etapas tienen características distintivas y requieren que los estudiantes realicen diferentes movimientos en cada una, lo que excluye la

forma rutinaria en que se suelen impartir las clases de matemáticas y, por lo tanto, atrae a los estudiantes.

En esta propuesta, el enfoque principal se centra en valorar a los estudiantes, respetar sus opiniones, responder a sus preguntas y considerar sus intereses. El enfoque de modelado propuesto por Burak, que es la mejor opción para este modelo porque aborda estas cuestiones, afirma que "trabajar con el modelado se origina en el siguiente principio: el interés del grupo o grupos" (Burak, 2004, p. 2).

En el aprendizaje, el procedimiento generado a partir del interés del grupo o grupos parece resultar beneficioso, ya que los estudiantes trabajan con lo que les gusta, lo que tiene significado para ellos, y por lo tanto se convierten en corresponsables del aprendizaje. (Burak, 2004, p. 2)

La dimensión axiológica se refiere a estos valores morales, éticos, estéticos y espirituales. En educación, esta dimensión se centra en considerar estos valores que humanizan a los estudiantes.

Cambios en las actitudes hacia las matemáticas

Una de las principales motivaciones de esta investigación fue contribuir a superar la fobia a las matemáticas y el rechazo a esta materia que presentan muchos estudiantes. La investigación realizada permite conjeturar que el uso de MEM podría contribuir a superar estos sentimientos negativos hacia la asignatura. En el caso de los estudiantes que participaron en esta investigación, se observó que manifestaron sentimientos positivos.

A lo largo de todas las etapas del programa de Modelado en la Educación Matemática, los estudiantes mostraron curiosidad, entusiasmo y comodidad, calificaron las actividades de " *excelentes* " e " *impresionantes* ", consideraron que la resolución de problemas era " *magnífica* " y siempre anotaron en sus cuadernos lo *interesantes, divertidas y sorprendentes* que les resultaron las actividades, entre muchas otras cosas, todo ello registrado en las tablas del Apéndice H del trabajo de grado del cual se derivó este artículo. Todos estos registros demuestran el gran interés y la participación de los estudiantes en la práctica y en esta forma diferente de abordar el contenido matemático, lo que contribuyó a un aprendizaje más significativo.

Según González (2020, p. 167), "la dimensión teleológica de la investigación se refiere a su propósito, es decir, la intencionalidad que el investigador tiene con su trabajo".

La principal intención de esta investigación es ayudar en el aprendizaje matemático de los estudiantes, pero, además, pretende lograr otros propósitos relacionados con la educación matemática, como el desarrollo del razonamiento lógico y crítico; conectar las matemáticas con situaciones cotidianas y con otras áreas del conocimiento, ayudando a los estudiantes a ver la relevancia práctica de los conceptos aprendidos; entre otros.

MEM como alternativa a la enseñanza tradicional de las matemáticas.

Esta investigación ha confirmado, una vez más, que MEM, desde la perspectiva de Burak, constituye una forma diferenciada de concebir la Educación en general, la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en particular, y, finalmente, la adopción de un nuevo rol para el docente. Este tercer aspecto se traduce en un hecho muy relevante que trasciende la función rutinaria asignada al docente, quien deja de ser un mero transmisor de información para asumir el rol de «[...] mediador entre el conocimiento matemático elaborado y el conocimiento de cada estudiante. Es la diferencia con respecto a la enseñanza tradicional, en la que, la mayor parte del tiempo, el docente es el centro del proceso». (Burak, 2019, p. 106)

El hecho de que los estudiantes eligieran el tema sobre el que trabajar, lo investigaran, plantearan los problemas que se resolvían en clase y los resolvieran juntos, mientras que la investigadora solo desarrollaba el inicio de una forma de resolver el problema, mediaba en los debates y prestaba ayuda cuando era necesario, cambió la forma en que los estudiantes construían el conocimiento, situándolos como parte del proceso y no simplemente como receptores de información preelaborada proporcionada por el profesor.

La dimensión epistemológica, es la relación entre un sujeto (persona) y su objeto de interés; en el caso de las clases de matemáticas, la relación profesor-alumno está mediada por las matemáticas, el profesor pretende enseñar y los alumnos aspiran a aprender, formando así un triángulo pedagógico (Houssaye, 1992; Mello, 1919, p. 6). La relación entre profesor y alumnos se da de forma cercana; ambos trabajan juntos para producir conocimiento. El profesor actúa como mediador, instruyendo y apoyando a los alumnos en su aprendizaje.

Según Beck (2016), «Es importante que el educador sea flexible, que domine las herramientas y técnicas que se pueden aplicar a la actividad propuesta, ya sea de forma individual o colectiva». Debe estar inmerso en todo el proceso de aprendizaje, enseñando a los estudiantes a aprender. El Triángulo

Pedagógico afirma que «nadie está por encima de nadie, que todos están integrados, que forman parte del entorno de aprendizaje. La actividad es tan importante como el estudiante, al igual que el educador» (Beck, 2016, s.p.). El modelo M³ se construyó con la intención de abarcar este concepto y sus fundamentos.

CONCLUSIÓN

Tras analizar la información, se puede concluir que el modelo M³ resultó satisfactorio y cumplió su objetivo.

La integración de las Matemáticas, la Música y el Modelado podría contribuir a motivar, generar interés, contextualizar el contenido, aportar aplicaciones prácticas y, lo que aquí se considera más importante, proporcionar alegría y otros sentimientos positivos en los estudiantes.

Estos sentimientos positivos transformaron la percepción que los estudiantes tenían de las matemáticas. Lo que antes se consideraba una materia aburrida y difícil, se convirtió en algo genial, divertido, interesante y sorprendente. Este cambio de actitud y perspectiva contribuye positivamente a superar la fobia a las matemáticas, ya que los estudiantes dejan de temer y de tener dificultades con la materia y comienzan a disfrutar estudiándola.

Además de todo el conocimiento generado y movilizado, la investigación contribuyó a que los estudiantes desarrollaran una nueva perspectiva sobre las matemáticas, descubriendo una forma diferente de aprender y experimentar la materia.

REFERENCIAS

- Abdounur , OJ (2002). *Matemáticas y música: pensamiento analógico en la construcción del significado* (4.^a ed.). Escrituras.
- Bassanezi, R. de S. (2002). *Modelado matemático: Un enfoque pedagógico*. Contexto.
- Beck, C. (2016). *El triángulo didáctico: vértice del conocimiento* . Andragogia Brasil. <https://andragogiabrasil.com.br/o-triangulo-didatico-vertice-do-saber/>
- Biembengut, MS (1999). *Modelado matemático e implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. FURB Press.
- Biembengut, M. S. (2009b). 30 años de modelado matemático en la educación brasileña: De las primeras propuestas a las propuestas actuales.

Alexandria: Journal of Science and Technology Education, 2 (2), 7–32.

- Burak, D. (1987). *Modelización matemática: una metodología alternativa para la enseñanza de matemáticas en 5º grado* [tesis de maestría, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho].
- Burak, D. (1992). *Modelado matemático: Acciones e interacciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje* [Tesis doctoral, Universidad Estatal de Campinas]. Proyecto Siem.
- Burak, D. (2004). Modelado matemático y el aula. En *Actas de la 1ª Reunión de Paraná sobre Modelado en la Educación Matemática (I EPMEM)*. Londrina, PR, Brasil.
- Burak, D. (2019). Modelado matemático desde la perspectiva de la educación matemática: múltiples y complejas visiones. *Educación matemática sin fronteras*, 1 (1), 96–111.
- Burak, D., & Klüber, T. (2008). Educación matemática: Contribuciones para comprender su naturaleza. *Acta Scientiae*, 10 (2), 93–106.
- David, M., Moreira, P., & Tomaz, V. (2013). Matemáticas escolares, matemáticas académicas y matemáticas cotidianas: una red de relaciones en investigación. *Acta Scientiae*, 15 (1), 42–60.
- Fazenda, I. C. de O. (1994). *Interdisciplinariedad: Historia, teoría e investigación*. Papirus.
- Felicetti, V. L., y Giraffa, L. M. M. (2008). Fobia a las matemáticas: lamentablemente una realidad escolar. Cómo evitarla. En *Actas del XII Encuentro Brasileño de Estudiantes de Posgrado en Educación Matemática*
- Fernandes, L.B. de B., Santos, RMB dos, Vasconcelos, T. C. & Gonzaga, A. E. de S. (2024). Matofobia y una propuesta de un conjunto de lineamientos metodológicos y evaluativos en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, 16 (7), Artículo e4964. <https://doi.org/10.55905/cuadv16n7-136>
- Ferreira, W., et al. (2023). matemáticas fobia y matemáticas ansiedad: enfoques multidisciplinares para una más inclusiva y equitativa educación en Brasil. *Concilio*, 23 (17), 663–677. <https://doi.org/10.53660/CLM-2205-23Q30>

- Fiorentini, D. (1996). brasileño investigación en matemáticas Modelado. En *Actas de la 8ª Internacional Conferencia en Matemático Educación (ICME-8)* (pág. 20). Sevilla, España.
- González, F. E. (2005). Uso del enfoque de quinta dimensión. en el análisis interno de productos escritos de investigación . *Revista Educação em Questão* , 23 (9), 7–15.
- González, F. E. (2008). Señala una crítica pentadimensional de Investigación socioeducativa. *Education in Question Journal* , 32 (18).
- González, F. (2010). Un modelo de enseñanza para Formación inicial de profesores de matemáticas. *Sapiens*, 11 (1), 47–59.
- González, F. E. (2017). Repertorio de coordenadas de referencia teórico-conceptuales (RCT-CR) en tesis del primer doctorado en Educación en Venezuela. En *Actas del VIII Congreso Educación matemática iberoamericana* .
- González, F. E. (2020). Reflexiones sobre algunos conceptos de la investigación cualitativa. *Revista Pesquisa Qualitativa*, 8 (17), 155–183.
- González, F. E. & Villegas, M. M. (2009). Fundamentos epistemológicos en allá Construcción de una metodología de investigación. *Actos de Investigación en Educación*, 4 (1), 89-121.
<https://doi.org/10.7867/1809-0354.2009v4n1p89-121>
- Houssaye, J. (1992). *El triángulo pedagógico*. Peter Lang.
- Jacobini, O. R. (2004). *El modelado matemático como instrumento de acción política en el aula* [Tesis doctoral, Universidad Estatal de São Paulo]. Repositorio Institucional de la UNESP.
- Mello, L. A. (2019). *La teoría de la transposición didáctica de Chevallard, Izquierdo y de Mello (CHIM)*. Portal UFS.
- Núñez García, E. F. (2020). Implementación del juego como estrategia para superarlo matofobia y propiciar el interés en él aprendizaje de matemáticas. *Revista de Investigación y Evaluación Educativa*, 4 (1), 66–77. <https://doi.org/10.47554/revie2017.4.46>
- Silva, Y. J. (2023). *Metainvestigación: Un análisis de obras que tratan sobre matemáticas y música* [Tesis de licenciatura, Instituto Federal del Sur de Minas Gerais]. Portal Pergamum IFSULDEMINAS.

- Silva, Y. J. (2024). Modelo M³: Una estrategia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria. En *Actas del IV Simposio sobre Investigación en Educación Matemática (SIMPEM)* (pp. 1–5). UFOP.
https://ppgedmat.ufop.br/sites/default/files/ppgedmat/files/anais_iv_simpem_compressed_01.pdf?m=1737559797
- Silva, Y. J. (2026). *Modelo M³: Matemáticas, música y modelado en el aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria* [Tesis de maestría, Universidad Federal de Ouro Preto].
- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (2012). *Grupos de Trabalho: GT-Nº10 Modelado Matemático*. SBEM.
<https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt-10>
- Torres, MK (2021). *Motivación de estudiantes y docentes en la enseñanza de las matemáticas* [Monografía, Universidad Federal de São João del Rei].
- Van Manen, M. (2003). *Investigación educativa y experiencia vivida: Ciencias humanas para la pedagogía humana. acción y de la Sensibilidad*. Libros de ideas.
- Wood, EF (1988). Matemáticas ansiedad y elemental Profesores: ¿Qué hace la investigación? decir nosotros? *Para el aprendizaje de Matemáticas*, 8 (1), 8–13.