

Un modelo integrador para la planificación y el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva

Claudia Lisete Oliveira Groenwald ^{ab} 

^a Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, RS, Brasil

^b Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS, Brasil

RESUMEN

Contexto: La planificación de tareas investigativas de alta demanda cognitiva constituye un desafío para la Educación Matemática, ya que exige la articulación entre diferentes referentes relacionados con la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia docente de Observar con Sentido. **Objetivos:** Analizar cómo un modelo integrador, fundamentado en estas cuatro dimensiones, puede orientar la planificación y el análisis de tareas investigativas en diferentes temáticas de las Matemáticas. **Diseño:** Estudio teórico, de naturaleza cualitativa, basado en el análisis y la integración de referentes consolidados de la Educación Matemática. **Entorno y participantes:** Las fuentes de análisis de la investigación son la producción científica sobre tareas matemáticas, demanda cognitiva, investigación matemática, mediación pedagógica y Observar con Sentido, así como dos tareas investigativas elaboradas para ilustrar la aplicación del modelo propuesto. **Recolección y análisis de datos:** Los referentes teóricos fueron analizados de forma interpretativa y se articularon en la construcción del Modelo Integrador para la Planificación y el Análisis de Tareas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva (MIPATI). Posteriormente, el modelo se aplicó al análisis de dos tareas investigativas de los temas de la Aritmética y de la Geometría/Álgebra. **Resultados:** Los análisis evidenciaron que el MIPATI integra de forma coherente la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido, lo que permite orientar la planificación, la implementación y el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva en diferentes contenidos matemáticos. **Conclusiones:** El modelo amplía las posibilidades de análisis y planificación de tareas investigativas y constituye un referente para las investigaciones en Educación Matemática y para la formación inicial y continua del profesorado, con potencial de aplicación en diferentes contextos de la Educación Básica.

Palabras clave: tareas investigativas; demanda cognitiva; planificación de tareas; Observar con Sentido; Educación Matemática.

Corresponding author: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.
Email: claudiag1959@gmail.com

An Integrative Model for Planning and Analyzing High Cognitive Demand Investigative Tasks

ABSTRACT

Context: The planning of investigative tasks of high cognitive demand is a challenge for Mathematics Education, since it demands the articulation between different references related to cognitive demand, mathematical investigation, pedagogical mediation and the teaching competence of Professional Noticing. **Objectives:** To analyze how an integrative model, based on these four dimensions, can guide the planning and analysis of investigative tasks in different fields of Mathematics. **Design:** This is a theoretical study of a qualitative nature, based on the analysis and integration of consolidated references of Mathematics Education. **Environment and participants:** The research has as sources of analysis the scientific production on mathematical tasks, cognitive demand, mathematical investigation, pedagogical mediation and Professional Noticing, as well as two investigative tasks elaborated to illustrate the application of the proposed model. **Data collection and analysis:** The theoretical frameworks were analyzed in an interpretative way and articulated in the construction of the Integrative Model for the Planning and Analysis of Investigative Tasks of High Cognitive Demand (MIPATI). Then, the model was applied to the analysis of two investigative tasks in the fields of Arithmetic and Geometry/Algebra. **Results:** The analyses showed that MIPATI coherently integrates cognitive demand, mathematical investigation, pedagogical mediation and Professional Noticing, allowing to guide the planning, implementation and analysis of investigative tasks of high cognitive demand in different mathematical contents. **Conclusions:** The model expands the possibilities of analysis and planning of investigative tasks, constituting a reference for research in Mathematics Education and for the initial and continuing training of teachers, with potential for application in different contexts of Basic Education.

Keywords: investigative tasks; cognitive demand; task planning; Professional Noticing; Mathematics Education.

RESUMO

Contexto: O planejamento de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva constitui um desafio para a Educação Matemática, uma vez que demanda a articulação entre diferentes referenciais relacionados à demanda cognitiva, à investigação matemática, à mediação pedagógica e à competência docente de Observar com Sentido. **Objetivos:** Analisar como um modelo integrador, fundamentado nessas quatro dimensões, pode orientar o planejamento e a análise de tarefas investigativas em diferentes temáticas da Matemática. **Design:** Estudo teórico, de natureza qualitativa, fundamentado na análise e integração de referenciais consolidados da Educação Matemática. **Ambiente e participantes:** A pesquisa tem como fontes de análise a produção científica sobre tarefas matemáticas, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido, bem como duas tarefas

investigativas elaboradas para ilustrar a aplicação do modelo proposto. **Coleta e análise de dados:** Os referenciais teóricos foram analisados de forma interpretativa e articulados na construção do Modelo Integrador para o Planejamento e a Análise de Tarefas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva (MIPATI). Em seguida, o modelo foi aplicado à análise de duas tarefas investigativas dos temas da Aritmética e da Geometria/Álgebra. **Resultados:** As análises evidenciaram que o MIPATI integra, de forma coerente, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido, permitindo orientar o planejamento, a implementação e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva em diferentes conteúdos matemáticos. **Conclusões:** O modelo amplia as possibilidades de análise e planejamento de tarefas investigativas, constituindo um referencial para pesquisas em Educação Matemática e para a formação inicial e continuada de professores, com potencial de aplicação em diferentes contextos da Educação Básica.

Palavras-chave: tarefas investigativas; demanda cognitiva; planejamento de tarefas; Observar com Sentido; Educação Matemática.

INTRODUCCIÓN

Las discusiones presentadas en este artículo derivan de las investigaciones desarrolladas por el Grupo de Estudios Curriculares en Educación Matemática (GECM), grupo de investigación vinculado al CNPq que estudia temas relacionados con el currículo, la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, la formación del profesorado y la integración de las tecnologías digitales en los procesos educativos. Entre las líneas de investigación desarrolladas por el grupo destacan los estudios sobre tareas matemáticas investigativas, orientados inicialmente a la elaboración e implementación de tareas de alta demanda cognitiva y, más recientemente, a la construcción de referentes teóricos que integren la planificación didáctica, los procesos investigativos de los estudiantes, la mediación pedagógica y la competencia profesional de Observar con Sentido.

La planificación constituye un componente esencial de la práctica docente, pues organiza de forma intencional los objetivos de aprendizaje, los contenidos, las metodologías, los recursos y las formas de evaluación, lo que influye directamente en las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los estudiantes (Coll, 1997). En la enseñanza de las Matemáticas, esta planificación se materializa, sobre todo, mediante las tareas propuestas, que orientan las formas de interacción con los conocimientos matemáticos y condicionan los procesos cognitivos movilizados durante su resolución (Ponte, 2010). De este modo, la selección de las tareas representa una decisión pedagógica que influye en el desarrollo del razonamiento, la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación matemática y la construcción de generalizaciones.

Las investigaciones en Educación Matemática evidencian que las tareas de alta demanda cognitiva favorecen aprendizajes conceptuales más profundos, pues requieren que los estudiantes establezcan conexiones, formulen conjeturas, justifiquen procedimientos, validen resultados y produzcan generalizaciones (Smith & Stein, 1998; Stein et al., 1996; Ponte, 2017). Desde esta perspectiva, Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) comprenden la investigación matemática como un proceso que implica explorar situaciones, identificar regularidades, formular y comprobar conjeturas, justificar estrategias y comunicar conclusiones, de modo que los estudiantes asumen un papel activo en la construcción del conocimiento matemático.

Sin embargo, el potencial formativo de las tareas investigativas no depende exclusivamente de su planificación. Sullivan et al. (2015) demuestran que la preservación de la demanda cognitiva se relaciona directamente con las decisiones que toma el profesor durante la implementación de la tarea, en especial con la calidad de la mediación pedagógica. De forma complementaria, Llinares et al. (2019) evidencian que la interpretación de las producciones de los estudiantes y su utilización como fundamento de las decisiones didácticas constituyen una competencia profesional esencial, denominada Observar con Sentido (*Professional Noticing*), que comprende la identificación de aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes, la interpretación de sus significados y la decisión sobre intervenciones pedagógicas coherentes con los objetivos de aprendizaje.

Aunque estos referentes se encuentran ampliamente consolidados en la literatura, por lo general se han discutido de forma independiente. Son escasos los estudios que articulan, en un mismo referente, la demanda cognitiva de las tareas, los procesos investigativos, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido, con el propósito de orientar simultáneamente la planificación, la implementación y el análisis de tareas investigativas. Esta laguna restringe la comprensión de las tareas como instrumentos capaces de promover el aprendizaje matemático y fundamentar el análisis y la mejora de la práctica docente, lo que favorece el perfeccionamiento de las prácticas de enseñanza en diferentes temas de la Educación Matemática desarrollados en la Educación Básica.

Investigaciones recientes han evidenciado que la planificación de tareas matemáticas exige la articulación entre los conocimientos sobre la demanda cognitiva, la comprensión del pensamiento de los estudiantes y la toma de decisiones didácticas (Groenwald & Llinares, 2019). Ante este contexto, se propone comprender la planificación de tareas investigativas como

un proceso integrado, en el cual la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido constituyan dimensiones interdependientes. Se sostiene que la articulación de estos referentes posibilita la construcción de un modelo teórico capaz de fundamentar tanto la elaboración como el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva.

En este contexto, la investigación se orienta por la siguiente pregunta: ¿Cómo puede un modelo integrador, fundamentado en la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido, orientar la planificación y el análisis de tareas investigativas en diferentes temas de la Educación Matemática?

Este estudio propone un modelo integrador para la planificación y el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva, construido a partir de la articulación entre resultados de investigaciones y referentes consolidados de la Educación Matemática. Se espera que esta sistematización contribuya a la investigación en Educación Matemática y a la formación del profesorado, y que aporte elementos para la elaboración, la implementación y el análisis de tareas investigativas en diferentes temas de la Educación Matemática en la Educación Básica.

A partir de esta pregunta, el objetivo de este artículo es analizar cómo un modelo integrador orienta la planificación y el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva en diferentes temas de las Matemáticas, con el propósito de evidenciar su consistencia como instrumento didáctico y analítico. Para ello, se presenta un modelo integrador que articula cuatro perspectivas consolidadas de la Educación Matemática y se ilustra su aplicación mediante el análisis de dos ejemplos de tareas investigativas.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico se organiza con el propósito de construir progresivamente los fundamentos que sustentan el modelo integrador propuesto. En primer lugar, se analizan las tareas matemáticas como elementos organizadores de las oportunidades de aprendizaje, a partir de su concepto, su relación con los objetivos de enseñanza y la introducción de la noción de demanda cognitiva. A continuación, se abordan las características de las tareas investigativas y su articulación con niveles elevados de demanda cognitiva. Posteriormente, se analiza la mediación pedagógica durante la implementación de las tareas, con énfasis en las acciones docentes que pueden preservar o reducir el desafío cognitivo previsto inicialmente. Después, se presenta la

competencia profesional de Observar con Sentido (*Professional Noticing*), comprendida a partir de los procesos de identificar, interpretar y decidir con base en las producciones de los estudiantes. Por último, estas dimensiones se articulan en un modelo integrador para la planificación y el análisis de tareas investigativas. Esta articulación constituye la principal contribución teórica de este estudio.

LAS TAREAS MATEMÁTICAS COMO ORGANIZADORAS DEL APRENDIZAJE

Las tareas matemáticas constituyen el principal medio a través del cual el currículo se materializa en la práctica pedagógica, pues organizan las experiencias de aprendizaje e influyen en los procesos de razonamiento que desarrollan los estudiantes. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991, 2000, 2014) destaca que la naturaleza de las tareas propuestas por el profesor determina las oportunidades para investigar, argumentar, establecer conexiones, resolver problemas y construir significados matemáticos. De este modo, su selección y planificación constituyen decisiones curriculares importantes para promover aprendizajes conceptuales profundos (NCTM, 2014).

Aunque con frecuencia se emplean como sinónimos, los conceptos de tarea y actividad poseen significados diferentes. La tarea corresponde a la propuesta formulada por el profesor, mientras que la actividad se refiere al conjunto de acciones que el estudiante desarrolla de manera efectiva durante su realización. Así, una misma tarea puede originar actividades distintas, de acuerdo con la interpretación de los estudiantes, las intervenciones del profesor y el contexto en el que se desarrolla. En consecuencia, el aprendizaje deriva de la actividad realizada por los estudiantes y no de la tarea en sí misma (Ponte, 2010, 2017).

Stein et al. (2000) amplían la comprensión de las tareas matemáticas al demostrar que su potencial para promover el aprendizaje no depende únicamente de su elaboración inicial, sino también de las transformaciones que ocurren a lo largo del proceso de enseñanza. Los autores proponen un ciclo constituido por cuatro momentos interdependientes: la tarea tal como fue planificada, que corresponde a las intenciones didácticas del profesor durante la planificación; la tarea tal como fue propuesta, que se refiere a la forma en que se presenta a los estudiantes en el aula; la tarea tal como fue implementada, que se caracteriza por las interacciones establecidas entre el profesor, los estudiantes y la tarea durante su resolución; y la tarea tal como fue realizada, que corresponde al trabajo desarrollado de manera efectiva por los estudiantes

y a las oportunidades de aprendizaje producidas. Esta perspectiva evidencia que la demanda cognitiva prevista inicialmente puede preservarse, ampliarse o reducirse en función de las decisiones pedagógicas adoptadas durante la implementación de la tarea, lo que refuerza la importancia de comprender la planificación como un proceso dinámico y continuo.

El análisis de la demanda cognitiva también constituye un componente del conocimiento profesional del profesor. Groenwald y Llinares (2019) evidencian que la selección de tareas compatibles con los objetivos de aprendizaje exige que el profesor sea capaz de analizar el tipo de razonamiento requerido para su resolución y articular la planificación didáctica con las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes. Desde esta perspectiva, clasificar las tareas según su demanda cognitiva constituye una competencia esencial para la planificación de la enseñanza de las Matemáticas.

Las tareas matemáticas pueden abarcar desde un conjunto de ejercicios rutinarios hasta un problema complejo y desafiante que centre la atención de los estudiantes en una idea matemática particular (NCTM, 2014). Las tareas son los proyectos, las preguntas, los problemas, las construcciones, las aplicaciones y los ejercicios en los que participan los estudiantes con el propósito de desarrollar el pensamiento matemático, y proporcionan los contextos intelectuales para su desarrollo matemático (NCTM, 1991).

Stein, Grover y Henningsen (1996), así como Smith y Stein (1998), comprenden las tareas matemáticas como propuestas de trabajo cuidadosamente planificadas para centrar la atención de los estudiantes en ideas matemáticas específicas y promover diferentes formas de pensamiento matemático. Estas tareas, elaboradas en el contexto de la interacción entre enseñanza y aprendizaje, orientan el desarrollo de conceptos matemáticos y son seleccionadas de forma intencional por el profesor para favorecer la participación de los estudiantes. Desde esta perspectiva, diferentes tareas proporcionan distintas oportunidades de aprendizaje, ya que movilizan diversos procesos de razonamiento y exigen diferentes formas de pensamiento matemático.

Esta concepción evidencia que la selección de las tareas no constituye una decisión meramente operativa, sino una elección pedagógica fundamentada en los objetivos de aprendizaje previstos. Al planificar una tarea, el profesor anticipa qué conocimientos desea desarrollar, qué estrategias podrán movilizar los estudiantes y qué formas de interacción pretende promover durante la clase. De este modo, la planificación establece una articulación entre los objetivos de enseñanza, los contenidos matemáticos y las experiencias de aprendizaje que

vivirán los estudiantes, por lo que las tareas se convierten en el principal vínculo entre la intención pedagógica del profesor y el aprendizaje matemático.

Para Ponte (2010, 2017), las tareas constituyen instrumentos de mediación de la enseñanza de las Matemáticas y pueden favorecer diferentes oportunidades de aprendizaje de acuerdo con su naturaleza, la forma en que se proponen, el ambiente de aprendizaje creado por el profesor y los conocimientos previos que movilizan los estudiantes. De este modo, el potencial educativo de una tarea no reside únicamente en su elaboración, sino también en las condiciones en las que se desarrolla en el aula.

Smith y Stein (1998) destacan que diferentes objetivos de aprendizaje exigen distintos tipos de tareas. Cuando el objetivo consiste en memorizar hechos, definiciones o reglas, pueden resultar adecuadas las tareas centradas en la reproducción de conocimientos. Sin embargo, cuando se pretende desarrollar la comprensión conceptual, la comunicación matemática, el razonamiento y la resolución de problemas, se requieren tareas que desafíen a los estudiantes a explorar ideas, establecer relaciones, justificar procedimientos y construir nuevos conocimientos. Por lo tanto, la elección de las tareas debe ser coherente con las competencias matemáticas que se pretende desarrollar. Esto evidencia que el aprendizaje no depende solo del contenido enseñado, sino también de la naturaleza de las experiencias cognitivas proporcionadas durante el proceso de aprendizaje.

En este contexto surge la noción de demanda cognitiva, comprendida como una característica que permite analizar el tipo y el nivel de pensamiento requeridos para resolver una tarea matemática. Según Penalva y Llinares (2011), la demanda cognitiva se refiere a la naturaleza y al nivel de los procesos de pensamiento que los estudiantes movilizan durante la resolución de una tarea matemática. Desde esta perspectiva, las características de la tarea condicionan las oportunidades de aprendizaje que ofrece, ya que diferentes niveles de exigencia cognitiva promueven distintas formas de razonamiento y de construcción del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, las tareas que abordan un mismo contenido pueden promover oportunidades de aprendizaje cualitativamente distintas, según los procesos intelectuales que movilicen. Por lo tanto, la demanda cognitiva desplaza el foco de la simple ejecución de procedimientos hacia el análisis de las formas de razonamiento exigidas a los estudiantes y constituye un referente importante para comprender el potencial formativo de las tareas matemáticas.

Con base en el grado de desafío matemático y en el grado de estructuración de las tareas, Ponte (2010) distingue cuatro categorías: ejercicios, problemas, exploraciones e investigaciones. Los ejercicios se caracterizan por ser tareas cerradas y de escaso desafío; los problemas presentan un alto grado de desafío, pero mantienen una estructura definida; las exploraciones corresponden a tareas abiertas y accesibles para la mayoría de los estudiantes; y las investigaciones constituyen tareas abiertas que exigen un elevado nivel de desafío matemático. Esta clasificación evidencia que las tareas investigativas se diferencian tanto por su grado de apertura como por su potencial para movilizar procesos matemáticos más complejos.

Esta discusión evidencia que las tareas matemáticas difieren no solo en cuanto a su formato o grado de apertura, sino, sobre todo, en cuanto a los procesos cognitivos que movilizan. En este contexto, la noción de demanda cognitiva constituye un referente fundamental para comprender por qué determinadas tareas ofrecen mayores oportunidades para el desarrollo del pensamiento matemático, aspecto que se profundiza en la siguiente sección.

TAREAS INVESTIGATIVAS Y DEMANDA COGNITIVA

La calidad de las experiencias matemáticas de los estudiantes se relaciona directamente con las características de las tareas propuestas y con las formas de razonamiento que estas movilizan. Mientras algunas tareas privilegian la reproducción de procedimientos conocidos previamente, otras favorecen la exploración, el establecimiento de relaciones, la formulación de conjeturas, la argumentación y la construcción de nuevos conocimientos matemáticos. En este contexto, destacan las tareas investigativas, que se caracterizan por promover formas más complejas de razonamiento y preservar niveles elevados de demanda cognitiva. Estas tareas incentivan a los estudiantes a explorar situaciones abiertas, elaborar diferentes estrategias de resolución, justificar procedimientos, validar resultados y construir generalizaciones.

Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) comprenden la investigación matemática como un proceso en el cual los estudiantes asumen un papel activo en la construcción del conocimiento y reciben la invitación de explorar situaciones, identificar regularidades, formular preguntas, plantear y comprobar conjeturas, validar resultados y producir generalizaciones. Desde esta perspectiva, investigar no significa solo resolver un problema, sino construir caminos propios de resolución, con la justificación de los procedimientos y la comunicación de argumentos matemáticos. Por lo tanto, la investigación se caracteriza como una actividad abierta, en la cual pueden surgir diferentes estrategias para su posterior discusión colectiva.

Homa, Groenwald y Llinares (2023) profundizan esta concepción al sostener que las tareas investigativas constituyen oportunidades de aprendizaje en las cuales se incentiva a los estudiantes a explorar conceptos matemáticos de forma libre, establecer relaciones, formular hipótesis, comprobar estrategias, validar resultados y comunicar sus conclusiones. Los autores destacan que estas tareas rompen con la lógica de la reproducción mecánica de algoritmos y desplazan el foco de la obtención de la respuesta hacia los procesos de pensamiento desarrollados durante la resolución. De este modo, las tareas investigativas permiten que los estudiantes hagan Matemáticas y movilicen de manera articulada conocimientos conceptuales y procedimentales.

Desde esta perspectiva, la investigación matemática puede comprenderse como un ciclo compuesto por diferentes procesos intelectuales interdependientes. En primer lugar, los estudiantes exploran una situación matemática con el propósito de identificar patrones, propiedades y relaciones relevantes. A partir de estas observaciones, formulan conjeturas que orientan nuevas exploraciones y experimentaciones. A continuación, comprueban estas conjeturas mediante diferentes estrategias y pueden reformularlas ante nuevas evidencias. Posteriormente, validan las conclusiones obtenidas con el apoyo de justificaciones y argumentos matemáticos consistentes. Por último, producen generalizaciones y amplían el alcance de las ideas construidas hacia nuevos contextos matemáticos. Este proceso investigativo favorece el desarrollo del pensamiento matemático, la comunicación y la argumentación, y constituye un ambiente propicio para aprendizajes conceptuales más profundos.

Las tareas investigativas favorecen el desarrollo de métodos propios de resolución por parte de los estudiantes, la exploración de diferentes estrategias y la construcción de conocimientos mediante el descubrimiento de regularidades, con la valoración de los procesos de autonomía intelectual y de producción de significados matemáticos (Llinares, 2000; Ponte, 2010, 2017; Homa, Groenwald & Llinares, 2023).

Estas características aproximan directamente las tareas investigativas a los niveles más elevados de demanda cognitiva propuestos por Smith y Stein (1998). En la clasificación presentada por los autores, las tareas pueden organizarse en cuatro niveles: memorización (Nivel 1), procedimientos sin conexión (Nivel 2), procedimientos con conexión (Nivel 3) y hacer Matemáticas (Nivel 4). Mientras los dos primeros niveles privilegian la reproducción de conocimientos ya establecidos, los niveles 3 y 4 exigen que los estudiantes establezcan conexiones entre conceptos, interpreten relaciones

matemáticas, justifiquen procedimientos y desarrollen formas más complejas de razonamiento.

Por lo tanto, las tareas investigativas tienden a situarse predominantemente en los niveles 3 y 4 de demanda cognitiva. En el Nivel 3, los estudiantes realizan procedimientos articulados con la comprensión conceptual, lo que los conduce a interpretar propiedades matemáticas, establecer conexiones entre diferentes ideas y justificar los procedimientos utilizados. En el Nivel 4, que se caracteriza por hacer Matemáticas, las tareas exigen un elevado esfuerzo cognitivo, no presentan caminos definidos previamente y requieren que los estudiantes seleccionen estrategias, tomen decisiones, formulen conjeturas, validen resultados y construyan generalizaciones. En estas situaciones, la resolución depende de la movilización integrada de los conocimientos matemáticos y no de la simple aplicación de algoritmos conocidos.

Esta relación entre la investigación matemática y la alta demanda cognitiva no es casual. Las propias características constitutivas de las tareas investigativas —apertura, múltiples caminos de resolución, necesidad de argumentación y producción de generalizaciones— hacen que estas tareas exijan formas sofisticadas de pensamiento matemático. Al explorar una situación, formular conjeturas, comprobar hipótesis y justificar conclusiones, los estudiantes necesariamente movilizan procesos cognitivos compatibles con una alta demanda cognitiva (niveles 3 y 4).

Sin embargo, como destacan Smith y Stein (1998), la alta demanda cognitiva no está determinada exclusivamente por la planificación de la tarea. El nivel previsto inicialmente puede reducirse durante su implementación si la mediación docente simplifica en exceso los desafíos propuestos, proporciona procedimientos ya elaborados u orienta de forma prematura a los estudiantes hacia un único camino de resolución. Por el contrario, cuando el profesor preserva la complejidad de la tarea, proporciona tiempo para la exploración, valora diferentes estrategias y estimula la argumentación matemática, aumenta la posibilidad de mantener los niveles 3 y 4 de demanda cognitiva a lo largo de la clase.

Esta comprensión evidencia que la calidad de una tarea no puede analizarse únicamente a partir de las características de su elaboración, sino también de la forma en que se desarrolla en el aula, ya que las decisiones pedagógicas adoptadas durante su implementación influyen directamente en las oportunidades de aprendizaje y en la preservación de la demanda cognitiva. Como destacan Ponte (2010, 2017), la tarea experimenta transformaciones

entre el momento en que el profesor la selecciona y su realización efectiva por parte de los estudiantes, pues recibe la influencia de la forma en que se presenta, se interpreta y se desarrolla en el aula.

Groenwald y Homa (2021) refuerzan esta perspectiva al sostener que la planificación de tareas investigativas de alta demanda cognitiva constituye una estrategia para promover ambientes de aprendizaje en los cuales los estudiantes asumen un papel activo en la construcción del conocimiento. Según los autores, las tareas abiertas, en especial cuando se articulan con las tecnologías digitales, favorecen la exploración de diferentes estrategias, la formulación y validación de conjeturas, la comunicación de argumentos y la producción de generalizaciones matemáticas, a la vez que preservan niveles elevados de razonamiento durante su resolución.

Las tareas investigativas también desempeñan un papel relevante en la formación inicial del profesorado de Matemáticas. Al analizar una experiencia pedagógica fundamentada en actividades investigativas, Contreras, Groenwald y Homa (2022) evidenciaron que este tipo de tarea favorece los procesos de exploración, argumentación, reflexión y toma de decisiones, al mismo tiempo que contribuye al desarrollo de la competencia de Observar con Sentido. Según los autores, la experiencia con actividades investigativas, en especial cuando se articula con las tecnologías digitales, amplía las oportunidades para que los futuros profesores analicen las estrategias de los estudiantes, interpreten sus producciones y fundamenten sus decisiones pedagógicas de una forma más consistente.

Estos resultados refuerzan la comprensión de que la planificación de tareas investigativas no se limita a la elaboración de situaciones desafiantes, sino que constituye un proceso que integra la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido, dimensiones que se articulan en la organización de ambientes de aprendizaje matemáticamente ricos.

Esta comprensión aproxima la investigación matemática a la perspectiva del desarrollo profesional docente. Al planificar tareas investigativas, el profesor necesita anticipar las posibles estrategias de los estudiantes, reconocer la demanda cognitiva implicada e interpretar las diferentes producciones matemáticas durante la clase para fundamentar sus decisiones pedagógicas. En este proceso, la competencia de Observar con Sentido (*Professional Noticing*) resulta indispensable, pues permite identificar los aspectos matemáticamente relevantes de las resoluciones presentadas, interpretar el pensamiento de los estudiantes y decidir nuevas acciones capaces

de preservar la naturaleza investigativa de la tarea y su elevado potencial formativo.

Esta competencia también comprende el análisis de las tareas matemáticas que se propondrán a los estudiantes. Groenwald y Llinares (2019), al investigar a futuros profesores de Matemáticas, evidenciaron que la competencia de Observar con Sentido se apoya en la capacidad de interpretar las características de las tareas, identificar su demanda cognitiva, anticipar las dificultades de los estudiantes y utilizar esta información para fundamentar decisiones relativas a la planificación docente.

De este modo, se sostiene que existe una relación intrínseca entre las tareas investigativas y los niveles elevados de demanda cognitiva. Las acciones de explorar, formular conjeturas, comprobar hipótesis, validar resultados, construir generalizaciones y comunicar argumentos matemáticos constituyen procesos característicos de la investigación matemática y, al mismo tiempo, corresponden a las exigencias cognitivas presentes en los niveles 3 y 4 de la clasificación de Smith y Stein. Esta articulación proporciona uno de los pilares del modelo integrador propuesto en este artículo, pues evidencia que la planificación de tareas investigativas debe buscar, de forma intencional, la preservación de niveles elevados de demanda cognitiva como condición para favorecer aprendizajes matemáticos más profundos y promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

MEDIACIÓN PEDAGÓGICA EN LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS TAREAS

La calidad de las oportunidades de aprendizaje que proporciona una tarea matemática no depende exclusivamente de su planificación, sino también de la forma en que se implementa en el aula. Incluso cuando una tarea se concibe para movilizar niveles elevados de demanda cognitiva, su complejidad puede preservarse, ampliarse o reducirse en función de las decisiones que adopta el profesor durante la mediación pedagógica. Por lo tanto, la implementación constituye un momento decisivo, en el cual la actuación docente influye directamente en los procesos de pensamiento que desarrollan los estudiantes y en las posibilidades de construcción del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, Sullivan et al. (2015) sostienen que la mediación pedagógica debe crear condiciones para que los estudiantes mantengan su participación en tareas desafiantes, exploren diferentes estrategias de resolución, justifiquen sus razonamientos, confronten ideas y

construyan argumentos matemáticos. En lugar de anticipar procedimientos o presentar algoritmos ya elaborados, el profesor organiza situaciones que favorecen la investigación, promueve discusiones matemáticas productivas e incentiva la explicación de las relaciones que establecen los estudiantes. Por lo tanto, la mediación no consiste en simplificar la tarea, sino en ofrecer apoyo para que los estudiantes avancen en su resolución sin renunciar a su autonomía intelectual.

Esta comprensión converge con los estudios de Smith y Stein (1998, 2011), que evidencian que la demanda cognitiva prevista inicialmente durante la planificación puede experimentar modificaciones a lo largo de la implementación de la tarea. Entre las acciones que tienden a reducir el desafío cognitivo destacan la demostración anticipada de los procedimientos, la indicación de un único camino de resolución, la fragmentación excesiva de la tarea, la valoración exclusiva de la respuesta correcta y la intervención constante del profesor para corregir u orientar las estrategias de los estudiantes. En estas situaciones, la tarea deja de movilizar procesos de exploración, toma de decisiones y argumentación, y se aproxima a actividades centradas en la reproducción de procedimientos conocidos previamente.

Por otra parte, determinadas acciones docentes favorecen la preservación de niveles elevados de demanda cognitiva. Entre ellas destacan la formulación de preguntas que estimulen la explicación del pensamiento matemático, la solicitud de justificaciones para las estrategias utilizadas, la comparación entre diferentes resoluciones, la valoración de múltiples caminos de solución, la promoción de discusiones colectivas y la institucionalización de las ideas construidas por los estudiantes. Estas intervenciones mantienen el foco en los procesos de razonamiento y permiten que los estudiantes establezcan conexiones conceptuales, formulen y validen conjeturas, construyan generalizaciones y comuniquen sus argumentos matemáticos.

En el contexto de las tareas investigativas, la mediación pedagógica asume un papel aún más relevante, pues la naturaleza abierta de estas tareas exige que el profesor acompañe de forma continua los procesos de investigación desarrollados por los estudiantes. Según Ponte, Brocardo y Oliveira (2003), investigar en Matemáticas implica explorar situaciones, identificar regularidades, formular preguntas, comprobar conjeturas y justificar conclusiones. Por lo tanto, la mediación docente debe favorecer estos procesos sin sustituir la actividad intelectual de los estudiantes y debe crear oportunidades para que expliquen sus razonamientos, confronten diferentes

interpretaciones y construyan colectivamente nuevos conocimientos matemáticos.

Desde esta perspectiva, la mediación pedagógica establece una relación directa entre la planificación de la tarea y su realización efectiva en el aula. Planificar tareas de alta demanda cognitiva implica anticipar posibles estrategias, dificultades y formas de intervención, pero también reconocer que las decisiones adoptadas durante la implementación pueden modificar de manera sustancial el potencial formativo previsto inicialmente. De este modo, la mediación deja de comprenderse como una acción destinada únicamente a aclarar dudas y pasa a constituir una dimensión central del proceso de enseñanza, responsable de preservar la naturaleza investigativa de las tareas y favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

OBSERVAR CON SENTIDO COMO COMPETENCIA PROFESIONAL DOCENTE

La implementación de tareas investigativas de alta demanda cognitiva exige del profesor más que el dominio de los contenidos matemáticos o la conducción de discusiones en el aula. Requiere la capacidad de interpretar de forma continua las producciones de los estudiantes, comprender los significados de los razonamientos movilizados y utilizar estas evidencias para fundamentar decisiones pedagógicas. Esta competencia profesional, denominada Observar con Sentido (*Professional Noticing*), ha recibido un amplio desarrollo en los trabajos de Llinares y sus colaboradores (2019), así como de Fernández, Llinares y Valls (2011), y constituye uno de los referentes importantes para comprender cómo el profesor transforma la información producida por los estudiantes en acciones que favorecen el aprendizaje matemático.

En el contexto brasileño, los estudios sobre la competencia de Observar con Sentido se desarrollan desde hace más de una década. Seibert, Groenwald y Llinares (2013) evidenciaron, en una investigación con futuros profesores de Matemáticas, que los ambientes formativos orientados al análisis de situaciones de enseñanza favorecen el desarrollo de la capacidad para identificar aspectos relevantes de la práctica docente, interpretar las producciones de los estudiantes y fundamentar decisiones pedagógicas.

Groenwald y Llinares (2022) amplían esta comprensión al caracterizar la competencia de Observar con Sentido como un conjunto de prácticas profesionales que articulan la identificación de aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza, la interpretación del pensamiento matemático de los

estudiantes, la anticipación de posibles respuestas y la fundamentación de decisiones pedagógicas. Desde esta perspectiva, el análisis de las tareas matemáticas constituye uno de los contextos privilegiados para el desarrollo de esta competencia profesional.

Homa, Groenwald y Llinares (2023) refuerzan esta perspectiva al evidenciar que el análisis de las tareas investigativas y de las estrategias producidas por los estudiantes constituye un contexto privilegiado para el desarrollo de esta competencia profesional, pues articula la planificación, la implementación, la interpretación y la toma de decisiones pedagógicas.

Desde la perspectiva de Llinares (2000), Observar con Sentido no corresponde a una observación espontánea o intuitiva de la clase, sino a una práctica profesional sustentada en conocimientos matemáticos, didácticos y curriculares. Se trata de la capacidad para identificar aspectos relevantes de las producciones de los estudiantes, interpretar estos indicios a la luz del aprendizaje matemático y tomar decisiones coherentes con los objetivos de enseñanza. Por lo tanto, observar no significa solo registrar lo que hacen los estudiantes, sino comprender por qué utilizan determinadas estrategias, qué conocimientos movilizan, qué dificultades manifiestan y qué posibilidades de intervención pueden favorecer la continuidad del aprendizaje.

Diversos estudios sobre Observar con Sentido (*Professional Noticing*) convergen en la comprensión de que esta competencia comprende tres procesos interrelacionados. El primero consiste en identificar los aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes y distinguir, entre la gran cantidad de información presente en el aula, aquella que resulta significativa para comprender el aprendizaje. El segundo se refiere a la interpretación de estas evidencias y a su relación con el conocimiento matemático y las trayectorias de aprendizaje, con el propósito de explicar los significados de las estrategias, los errores, las conjeturas y los argumentos producidos. El tercer proceso corresponde a la toma de decisiones pedagógicas, en la cual el profesor utiliza las interpretaciones realizadas para reorganizar la mediación, formular nuevas preguntas, seleccionar estrategias de discusión o reformular la orientación de la tarea. Estas tres acciones constituyen un proceso integrado que transforma la observación en fundamento para la acción docente.

Llinares y sus colaboradores (2019) destacan que esta competencia profesional se construye a partir del uso del conocimiento especializado del profesor en situaciones reales de enseñanza. Desde esta perspectiva, interpretar las producciones de los estudiantes exige articular conocimientos sobre los conceptos matemáticos, los objetivos de aprendizaje, las posibles estrategias de

resolución, las dificultades recurrentes y las formas de mediación más adecuadas. De este modo, Observar con Sentido se caracteriza como una competencia basada en el conocimiento profesional, cuya finalidad consiste en sustentar decisiones didácticas capaces de promover aprendizajes matemáticos más profundos y ampliar las oportunidades de participación de los estudiantes durante la resolución de las tareas.

En el contexto de las tareas investigativas, esta competencia adquiere especial relevancia porque la naturaleza abierta de estas tareas produce una diversidad de estrategias, representaciones, conjeturas y formas de argumentación que no pueden evaluarse únicamente a partir de la obtención de la respuesta correcta. El profesor necesita comprender los caminos recorridos por los estudiantes, identificar evidencias del desarrollo del pensamiento matemático y reconocer oportunidades para ampliar las discusiones colectivas. De este modo, la observación de las producciones de los estudiantes deja de asumir un carácter evaluativo restringido y pasa a constituir una fuente permanente de información para orientar la mediación pedagógica durante el desarrollo de la tarea.

Esta perspectiva establece una relación directa entre la planificación, la implementación y el análisis de las tareas investigativas. Durante la planificación, el profesor anticipa posibles estrategias de resolución, dificultades y formas de intervención. Durante la implementación, observa de forma continua las acciones de los estudiantes, interpreta los significados de las producciones matemáticas y ajusta sus intervenciones de acuerdo con las evidencias que surgen de la actividad. Después de la realización de la tarea, la información producida proporciona elementos para reevaluar la planificación, reformular propuestas futuras y ampliar el conocimiento profesional docente. De este modo, Observar con Sentido se configura como una competencia que articula reflexión, acción y replanificación, y contribuye a la preservación de la demanda cognitiva y al perfeccionamiento continuo de la práctica pedagógica.

Las discusiones desarrolladas en las secciones anteriores evidencian que ninguna de estas perspectivas, de forma aislada, resulta suficiente para orientar la planificación de tareas investigativas. Esta constatación fundamenta la proposición del modelo integrador que se presenta en la siguiente sección.

MODELO INTEGRADOR PARA LA PLANIFICACIÓN Y EL ANÁLISIS DE TAREAS INVESTIGATIVAS DE ALTA DEMANDA COGNITIVA (MIPATI)

El modelo integrador propuesto en este estudio se desarrolló con el propósito de articular referentes que, aunque se encuentran ampliamente consolidados en la literatura de la Educación Matemática, han sido discutidos predominantemente de forma independiente. Su originalidad reside en la integración de estas perspectivas en una única estructura analítica para la planificación y el análisis de tareas investigativas.

La perspectiva presentada por Stein et al. (2000) converge con el modelo integrador propuesto en este estudio porque evidencia que la planificación de tareas investigativas no se limita a la elaboración de la actividad, sino que comprende un proceso continuo que articula la planificación, la implementación, la mediación pedagógica y el análisis de las producciones de los estudiantes. En esta dirección, el modelo integra la clasificación de la demanda cognitiva, los procesos de la investigación matemática, la mediación docente y la competencia de Observar con Sentido, y concibe estas dimensiones como elementos interdependientes que influyen en la calidad de las oportunidades de aprendizaje matemático.

Aunque la literatura presenta contribuciones importantes sobre las tareas matemáticas, la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación docente y el desarrollo profesional del profesor, se observa que, por lo general, estos referentes se tratan de forma independiente. Smith y Stein (1998, 2011) analizan la demanda cognitiva de las tareas; Ponte, Brocardo y Oliveira (2003) caracterizan la investigación matemática; Sullivan y sus colaboradores (2013, 2015) enfatizan la importancia de la mediación docente para preservar la demanda cognitiva; y Llinares y sus colaboradores comprenden el desarrollo de la competencia de Observar con Sentido (*Professional Noticing*) como una condición para interpretar las producciones de los estudiantes y fundamentar decisiones pedagógicas. Sin embargo, pocos estudios procuran integrar estos referentes en un único modelo que fundamente, de forma simultánea, la planificación, la implementación y el análisis de tareas investigativas. Esta constatación fundamenta la proposición del modelo integrador presentado en este estudio.

El modelo integrador parte del supuesto de que la calidad de una tarea investigativa no depende exclusivamente de su estructura inicial, sino que resulta de la articulación dinámica entre cuatro dimensiones interdependientes: (i) el nivel de demanda cognitiva de la tarea; (ii) los procesos investigativos

movilizados durante su resolución; (iii) la mediación pedagógica realizada por el profesor; y (iv) la competencia docente de Observar con Sentido, responsable de interpretar las producciones de los estudiantes y orientar nuevas decisiones didácticas. Estas dimensiones constituyen un sistema integrado, en el cual las modificaciones en cualquiera de sus componentes repercuten directamente en los demás.

Dimensión 1 – Demanda cognitiva

La primera dimensión corresponde a la planificación de la tarea según su demanda cognitiva. Se adopta la clasificación propuesta por Smith y Stein (1998, 2011), que distingue entre tareas de memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y hacer Matemáticas. En el modelo propuesto, las tareas investigativas deben concebirse prioritariamente en los niveles 3 y 4, pues estos niveles favorecen el establecimiento de relaciones conceptuales, la elaboración de estrategias propias, las justificaciones y la argumentación matemática.

Esta dimensión define el potencial cognitivo inicial de la tarea y condiciona los procesos investigativos que podrán surgir durante su implementación.

Dimensión 2 – Investigación matemática

La segunda dimensión se refiere a los procesos investigativos desencadenados por la tarea. Fundamentada en Ponte, Brocardo y Oliveira (2003), comprende la exploración de la situación propuesta, la identificación de regularidades, la formulación y comprobación de conjeturas, la validación de resultados, la producción de generalizaciones y la comunicación de argumentos matemáticos. Estos procesos constituyen evidencias de que los estudiantes participan de forma efectiva en actividades de naturaleza investigativa y explican por qué estas tareas tienden a preservar niveles elevados de demanda cognitiva.

Dimensión 3 – Mediación pedagógica

La tercera dimensión corresponde a la mediación que realiza el profesor durante la implementación de la tarea. Incluso las tareas clasificadas inicialmente como de alta demanda cognitiva pueden experimentar una reducción de su complejidad cuando la mediación privilegia demostraciones anticipadas, procedimientos algorítmicos o respuestas únicas. Por el contrario, las preguntas, las solicitudes de justificación, la comparación de estrategias y

la discusión colectiva favorecen la preservación de la demanda cognitiva y amplían las oportunidades de aprendizaje matemático.

Dimensión 4 – Observar con Sentido

La cuarta dimensión incorpora la competencia docente de Observar con Sentido (*Professional Noticing*), entendida como la capacidad de identificar aspectos relevantes de las producciones de los estudiantes, interpretarlos a la luz del conocimiento matemático y didáctico, y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas. Desde esta perspectiva, el profesor deja de limitarse a evaluar respuestas correctas o incorrectas y pasa a comprender los razonamientos producidos, anticipar dificultades y reorganizar la mediación de acuerdo con las evidencias observadas.

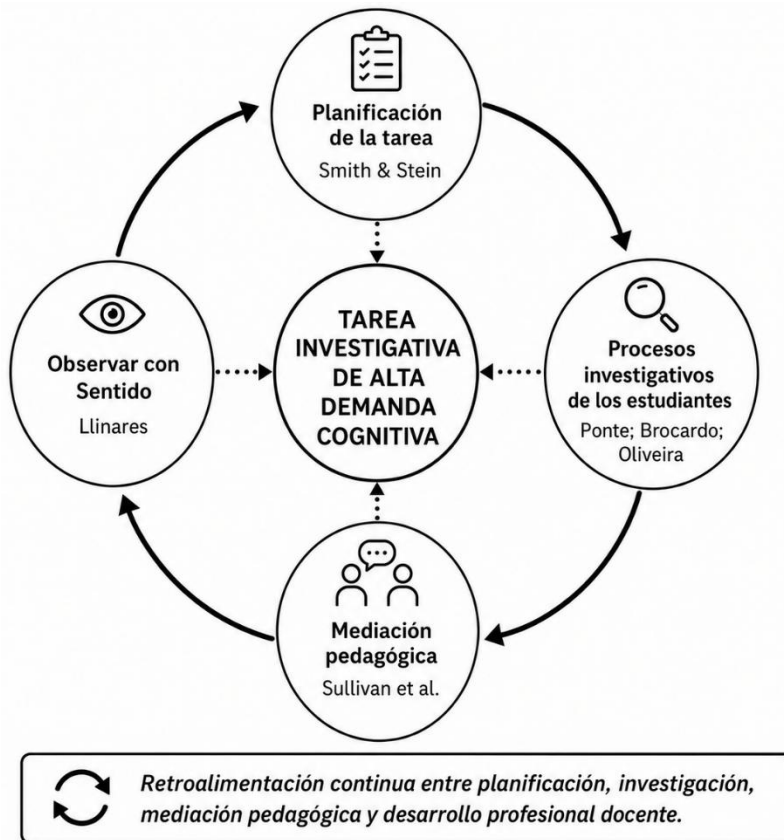
Integración de las dimensiones

A diferencia de los enfoques que analizan estos referentes de forma aislada, el modelo integrador considera que las cuatro dimensiones establecen relaciones de interdependencia. La demanda cognitiva condiciona los procesos investigativos que pueden surgir durante la resolución de la tarea; estos procesos solo tienden a preservarse mediante una mediación docente coherente con sus objetivos; y esta mediación depende de la capacidad del profesor para interpretar de forma continua las producciones de los estudiantes por medio de la competencia de Observar con Sentido. De este modo, la planificación, la implementación y el análisis constituyen momentos de un mismo proceso cíclico de desarrollo del aprendizaje matemático.

La Figura 1 sintetiza esta propuesta teórica y evidencia que la planificación de tareas investigativas debe comprenderse como un proceso dinámico en el cual la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido interactúan de forma continua y orientan tanto el desarrollo de la tarea como las decisiones didácticas del profesor.

Figura 1

Modelo Integrador para la Planificación y el Análisis de Tareas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva



La representación del modelo en formato circular expresa la naturaleza dinámica y continua de la planificación y del análisis de tareas investigativas, pues evidencia que estas acciones no constituyen etapas lineales, sino un proceso permanente de retroalimentación. La demanda cognitiva prevista inicialmente orienta la elaboración de la tarea; los procesos investigativos desarrollados por los estudiantes proporcionan evidencias sobre su implementación efectiva; la mediación pedagógica influye en la preservación o reducción del desafío cognitivo; y la competencia de Observar con Sentido permite al profesor interpretar estas evidencias y reorganizar de forma continua sus decisiones didácticas, lo que retroalimenta nuevos procesos de

planificación. En el centro de este proceso se sitúa la tarea investigativa de alta demanda cognitiva, comprendida como el elemento articulador de las cuatro dimensiones, pues a través de ella se materializan las oportunidades de aprendizaje matemático. Las dimensiones no establecen relaciones jerárquicas ni secuenciales; por el contrario, constituyen componentes interdependientes de un mismo sistema, en el cual las modificaciones en cualquiera de ellas repercuten en las demás. Esto evidencia que la calidad de la planificación, la implementación y el análisis de las tareas resulta de la integración entre la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia profesional docente.

La proposición de este modelo también se apoya en los resultados de investigaciones desarrolladas previamente por el GECEM, que evidenciaron la relevancia de la planificación de tareas investigativas articuladas con las tecnologías digitales para favorecer el aprendizaje matemático. Estos estudios indicaron que las tareas abiertas y de alta demanda cognitiva potencian los procesos de investigación, argumentación y generalización, y aportaron evidencias que sustentan la integración de las diferentes dimensiones propuestas en este artículo (Groenwald & Homa, 2021). Las dos tareas presentadas no tienen como finalidad validar empíricamente el modelo, sino ilustrar su operacionalización en diferentes temas de las Matemáticas.

APLICACIÓN DEL MODELO INTEGRADOR A LA PLANIFICACIÓN Y AL ANÁLISIS DE TAREAS INVESTIGATIVAS

La tarea se inserta en el tema de Aritmética y se destina a los años finales de la Educación Básica; también puede utilizarse en la formación del profesorado. Su objetivo es promover la profundización del estudio de la multiplicación mediante la tabla de multiplicación del 1 al 10, concebida como objeto de investigación matemática y no como instrumento de memorización. La organización de los productos en una tabla favorece la identificación de regularidades, el establecimiento de relaciones entre conceptos aritméticos y algebraicos, la formulación y validación de conjeturas y la construcción de generalizaciones sobre las propiedades de la multiplicación y de los números naturales.

La tarea se planificó con base en las cuatro dimensiones propuestas por el MIPATI.

- **Demanda cognitiva.** La tarea se sitúa predominantemente en los niveles 3 y 4 de Smith y Stein, pues no presenta procedimientos

definidos previamente y requiere que los estudiantes analicen patrones, establezcan conexiones entre diferentes propiedades de la multiplicación, elaboren conjeturas, produzcan justificaciones y construyan generalizaciones.

- **Investigación matemática.** Se invita a los estudiantes a explorar libremente la tabla de multiplicación, identificar regularidades, plantear hipótesis, comprobar conjeturas mediante diferentes ejemplos, validar sus conclusiones y comunicar argumentos matemáticos. Estas acciones movilizan los procesos investigativos.
- **Mediación pedagógica.** La planificación prevé que el profesor actúe como mediador del proceso investigativo mediante la formulación de preguntas que favorezcan la explicación del pensamiento matemático, sin anticipar respuestas ni indicar procedimientos únicos, con el propósito de preservar la alta demanda cognitiva de la tarea.
- **Observar con Sentido.** Desde la planificación se anticipan posibles estrategias, dificultades y formas de razonamiento de los estudiantes, lo que permite al profesor interpretar las producciones durante la clase y tomar decisiones fundamentadas sobre nuevas intervenciones.

La Figura 2 presenta la tabla que constituye el punto de partida de la investigación.

Figura 2

Tarea investigativa 1 – Aritmética

TABLA DE MULTIPLICACIÓN DEL 1 AL 10

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

En un primer momento, se espera que los estudiantes identifiquen las regularidades más evidentes, como la diagonal principal formada por los cuadrados perfectos, la simetría de la tabla y la secuencia de múltiplos en cada fila y columna.

Posteriormente, pueden establecer relaciones más complejas, identificar que los números primos aparecen únicamente en la primera fila y en la primera columna, relacionar la frecuencia con la que aparece un número con su cantidad de divisores, reconocer propiedades de proporcionalidad entre filas y columnas e interpretar la multiplicación mediante la representación de áreas rectangulares.

En niveles más avanzados, se espera que formulen conjeturas generales sobre divisibilidad, factorización, simetría, proporcionalidad y propiedades de la multiplicación, y que produzcan justificaciones matemáticas para sustentar estas generalizaciones. Las respuestas esperadas de los estudiantes se presentan en el Cuadro 1.

Cuadro 1

Respuestas esperadas de los estudiantes

Generalizaciones esperadas		
Particularidad	Explicación	Ejemplo
La diagonal principal está formada por cuadrados perfectos, aunque algunos cuadrados perfectos también aparecen en otras posiciones de la tabla.	Cada elemento de la diagonal es $n \times n = n^2$.	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
Simetría con respecto a la diagonal principal.	El producto axb es igual a bxa , lo que hace que la tabla sea simétrica.	$4 \times 7 = 7 \times 4 = 28$
Patrones en las diagonales secundarias.	Las diagonales paralelas a la principal presentan productos con relaciones multiplicativas y un crecimiento no constante.	Ex.: 2, 6, 12, 20, 30, ...
Primera fila y columna.	Reproducen la secuencia de los números naturales.	1, 2, 3, 4, 5, ...
Cada fila y cada columna constituye una secuencia de múltiplos.	La fila y la columna n contienen los múltiplos de n .	La fila y la columna 6 corresponden a los números $6n$, para $n = 1$

		, ..., 10: 6, 12, 18, 24, 30, ...
Los números primos aparecen únicamente en la primera fila y en la primera columna.	Un número primo tiene solo dos divisores, por lo que no puede expresarse como el producto de dos números naturales mayores que 1.	2, 3, 5, 7 Aparecen únicamente en los bordes.
Algunos números compuestos aparecen en varias posiciones, según la cantidad de pares de factores comprendidos entre 1 y 10.	Cada descomposición en factores comprendidos entre 1 y 10 corresponde a una posición de la tabla; los pares ordenados (a, b) y (b, a) ocupan posiciones simétricas.	24 aparece en 3×8 ; 4×6 ; 6×4 y 8×3 .
Duplicar una fila duplica todos sus valores.	Las filas mantienen relaciones de proporcionalidad.	Fila 8 es el doble de la fila 4.
Las diferencias entre términos consecutivos de una fila y de una columna son constantes.	Cada una de las filas y de las columnas constituye una progresión aritmética.	Fila y columna 7: la diferencia siempre es igual a 7.
Los rectángulos formados en la tabla representan productos.	El área de un rectángulo de lados (a) y (b) corresponde al producto axb	Rectángulo $5 \times 8 \rightarrow$ área 40.
Las potencias aparecen en patrones específicos.	Los cubos, las cuartas potencias y otras potencias pueden identificarse mediante las factorizaciones.	$64 = 8^2$ $64 = 4^3$ $64 = 2^6$

Mediación del profesor – Posibilidades investigativas

¿Por qué todos los números de la diagonal principal son cuadrados perfectos?
 ¿Algunos de estos números también aparecen fuera de la diagonal? ¿En qué posiciones y por qué?
 ¿Por qué los números primos aparecen únicamente en la primera fila y en la primera columna?
 ¿Cómo se puede determinar cuántas veces aparece un número sin examinar toda la tabla?
 ¿Qué números aparecen exactamente dos veces? ¿Cuáles aparecen cuatro, seis o más veces?
 ¿Existe alguna relación entre el número de apariciones y la cantidad de divisores?
 ¿Qué propiedades de la multiplicación explican la simetría de la tabla?

Durante el desarrollo de la tarea, el profesor puede observar evidencias relacionadas con el pensamiento matemático de los estudiantes, tales como: reconocimiento de patrones y regularidades; comprensión de la propiedad conmutativa de la multiplicación; utilización de argumentos para justificar conjeturas; relaciones establecidas entre multiplicación, divisibilidad y factorización; formas de representación utilizadas para explicar los resultados; dificultades para producir generalizaciones; capacidad para revisar conjeturas ante nuevos ejemplos; participación en las discusiones matemáticas; y uso de argumentos para validar conclusiones.

Estas evidencias fundamentan las decisiones pedagógicas durante la implementación de la tarea y proporcionan elementos para la replanificación de nuevas actividades, lo que caracteriza el proceso de retroalimentación previsto por el MIPATI.

La segunda tarea investigativa articula los temas de la Geometría y del Álgebra, y se recomienda para los últimos años de la Educación Básica y para la Educación Media; también puede utilizarse en la formación inicial y continua del profesorado de Matemáticas. La investigación parte de una situación geométrica relacionada con la determinación del número de rectas que pueden trazarse a partir de un conjunto de (n) puntos, bajo la condición de que cada recta pase exactamente por dos de los puntos del conjunto. A partir de la construcción de figuras, la organización de los resultados en una tabla y el análisis de los patrones obtenidos se orienta a los estudiantes hacia la formulación de una expresión algebraica general que permite determinar el número de rectas en función del número de puntos. De este modo, la tarea favorece la articulación entre representaciones geométricas, regularidades numéricas y generalización algebraica.

La planificación siguió las cuatro dimensiones del MIPATI:

- **Demanda cognitiva.** La tarea se sitúa predominantemente en los niveles 3 y 4 de la clasificación de Smith y Stein, pues no presenta un procedimiento establecido previamente para determinar la expresión general. Los estudiantes necesitan explorar casos particulares, identificar regularidades, establecer relaciones entre representaciones geométricas y numéricas, formular conjeturas y justificar la expresión algebraica obtenida. La elaboración de la fórmula general exige procesos de abstracción y generalización característicos de hacer Matemáticas.

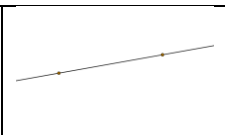
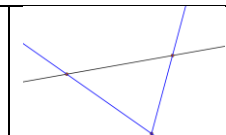
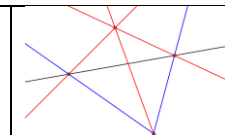
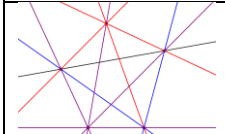
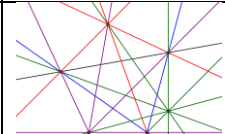
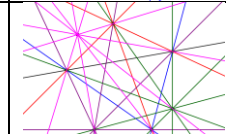
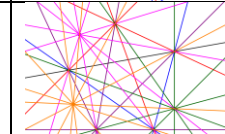
- **Investigación matemática.** La investigación comienza con la construcción de las figuras correspondientes a diferentes cantidades de puntos, seguida del recuento del número de rectas obtenidas. Posteriormente, los estudiantes organizan los resultados en una tabla, identifican patrones de crecimiento, formulan hipótesis para explicar estas regularidades, comprueban sus conjeturas en nuevos casos y producen una generalización algebraica válida para cualquier número de puntos. Al final, se espera que justifiquen matemáticamente la expresión encontrada y que establezcan una relación entre esta expresión y la suma del número de diagonales y de lados de un polígono.
- **Mediación pedagógica.** Durante la implementación, el profesor debe evitar la presentación de procedimientos ya elaborados para obtener la fórmula. Su actuación se concentra en la formulación de preguntas que estimulen la comparación entre diferentes representaciones, la identificación de regularidades y la justificación de las estrategias utilizadas. La mediación debe favorecer la socialización de las diferentes soluciones producidas por los estudiantes y promover discusiones que conduzcan a la institucionalización de la expresión algebraica obtenida.
- **Observar con Sentido.** Durante la planificación se anticipan las posibles estrategias de recuento, las dificultades para relacionar las representaciones geométricas y algebraicas y los errores que pueden surgir en el proceso de generalización. Estas anticipaciones permiten al profesor interpretar las producciones de los estudiantes y decidir intervenciones que favorezcan la construcción y la validación de la expresión general.

La segunda tarea se presenta en el Cuadro 2.

Cuadro 2

Número de rectas determinadas por pares de puntos

¿Cuál es el número de rectas que pueden trazarse a partir de (n) puntos, sin que haya tres puntos colineales, de modo que cada recta pase por dos de esos puntos?	
Mediación del profesor	Solicitar que realicen una exploración experimental y tracen las rectas determinadas por pares de puntos en configuraciones de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 puntos.

								
								
Mediación del profesor	Solicitar que completen una tabla con los resultados.							
N.º de puntos	1	2	3	4	5	6	7	8
N.º de rectas	0	1	3	6	10	15	21	28
Respuestas esperadas de los estudiantes	-Percibir que cada nuevo punto añade exactamente (n-1) rectas nuevas; -Reconocer la secuencia de los números triangulares (0, 1, 3, 6, 10, 15, ...) -Identificar que el crecimiento no es constante, pero presenta una segunda diferencia constante; - Construir la relación recursiva; - Obtener la expresión general; - Justificar geoméricamente la fórmula a partir de la relación entre esta secuencia y el número de diagonales de un polígono, y reconocer que el número total de rectas resulta de la suma del número de lados y del número de diagonales.							
Mediación del profesor	se invita a los estudiantes a explorar la expresión encontrada mediante su aplicación a valores de (n) aún no representados gráficamente y a comparar los resultados obtenidos con nuevas construcciones.							
El número de rectas (N) que pueden trazarse, en el caso de n puntos, se calcula mediante la suma de n y el número de diagonales del polígono de n lados que se forma, cuyo valor es $\frac{n(n-3)}{2}$, por lo tanto, $N = n + \frac{n(n-3)}{2}$ $N = \frac{2n + n^2 - 3n}{2}$ $N = \frac{n^2 - n}{2} \text{ ou } N = \frac{n(n-1)}{2}$ Se espera que los estudiantes reconozcan que la expresión obtenida representa un modelo matemático general para el número de rectas determinadas por (n) puntos, lo que evidencia el paso de la observación empírica a la generalización algebraica, característica central de las tareas investigativas de alta demanda cognitiva.								

Algunas preguntas que pueden orientar la mediación son:

- ¿Qué sucede cuando añadimos un punto más?
- ¿El número de rectas nuevas aumenta siempre de la misma manera?
- ¿Cómo se puede explicar este crecimiento?
- ¿Existe alguna regularidad en la secuencia formada?
- ¿Cómo se puede prever el número de rectas sin dibujar la figura?
- ¿Es posible construir una expresión válida para cualquier cantidad de puntos?
- ¿Cómo se puede justificar matemáticamente esta expresión?

Durante la implementación de la tarea, el profesor puede observar cómo los estudiantes organizan los datos obtenidos, identifican regularidades, establecen relaciones entre las representaciones geométricas y algebraicas, formulan conjeturas, justifican la expresión general encontrada, revisan hipótesis ante nuevos casos y comunican sus argumentos matemáticos. Estas evidencias permiten interpretar el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes y fundamentar decisiones pedagógicas durante y después de la realización de la tarea.

Estas evidencias fundamentan las decisiones pedagógicas durante la implementación de la tarea y proporcionan elementos para la replanificación de nuevas actividades, lo que caracteriza el proceso de retroalimentación previsto por el MIPATI.

Análisis comparativo de las tareas según el MIPATI

En el Cuadro 3 se presenta el análisis de las dos tareas propuestas.

Cuadro 3

Análisis según el MIPATI

Dimensión	Tarea 1 – Tabla de multiplicación	Tarea 2 – Número de rectas determinadas por pares de puntos
Demanda cognitiva	Identificación de patrones, propiedades, conjeturas y generalizaciones (niveles 3 y 4).	Generalización algebraica, abstracción y elaboración de la expresión general (niveles 3 y 4).
Investigación matemática	Exploración de la tabla, identificación de regularidades, comprobación y validación de conjeturas.	Exploración geométrica, formulación, comprobación, validación y generalización de la expresión.

Mediación pedagógica	Formulación de preguntas, comparación de estrategias y discusión colectiva	Formulación de preguntas, construcción colectiva, comparación de representaciones e institucionalización.
Observar con Sentido	Identificación de estrategias, interpretación de los razonamientos y decisiones pedagógicas.	Interpretación del pensamiento algebraico y de las dificultades, reformulación de las intervenciones y toma de decisiones pedagógicas.

El análisis comparativo evidencia que, aunque pertenecen a diferentes temas de las Matemáticas, ambas tareas movilizan las cuatro dimensiones del MIPATI. Las especificidades de cada contenido modifican las estrategias investigativas y las evidencias producidas por los estudiantes, pero mantienen la integración entre la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido. Estos resultados refuerzan el potencial del modelo para orientar la planificación y el análisis de tareas investigativas en diferentes contextos de la Educación Matemática.

CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio tuvo como objetivo analizar cómo un modelo integrador puede orientar la planificación y el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva en diferentes temas de las Matemáticas. La articulación entre la demanda cognitiva, la investigación matemática, la mediación pedagógica y la competencia de Observar con Sentido permitió proponer el Modelo Integrador para la Planificación y el Análisis de Tareas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva (MIPATI), concebido como un referente para fundamentar la planificación, la implementación y el análisis de tareas matemáticas.

Los análisis de las dos tareas investigativas evidenciaron que el modelo es aplicable a diferentes contenidos matemáticos y permite comprender la planificación de las tareas como un proceso dinámico y continuo. En la tarea sobre la tabla de multiplicación, destacaron los procesos investigativos relacionados con la identificación de regularidades, la formulación de conjeturas y la construcción de generalizaciones sobre las propiedades de los números y de la multiplicación. En la tarea sobre la determinación del número de rectas definidas por un conjunto de puntos, se observó la articulación entre representaciones geométricas, patrones numéricos y generalización algebraica. En ambas situaciones, se verificó que las cuatro dimensiones propuestas por el modelo actúan de forma integrada, lo que evidencia su potencial para orientar

tanto la planificación como el análisis de las oportunidades de aprendizaje que producen las tareas.

Los resultados también refuerzan que las tareas investigativas de alta demanda cognitiva no dependen exclusivamente de su elaboración inicial. La preservación de niveles elevados de demanda cognitiva exige mediaciones pedagógicas coherentes con los objetivos investigativos y requiere que el profesor movilice la competencia de Observar con Sentido para interpretar las estrategias, las dificultades y las formas de razonamiento de los estudiantes, así como para utilizar estas evidencias con el fin de fundamentar decisiones didácticas y retroalimentar nuevos procesos de planificación.

La principal contribución de este estudio consiste en la proposición de un modelo integrador que reúne, en una estructura analítica coherente, referentes consolidados de la Educación Matemática que, tradicionalmente, se han discutido de forma independiente. Al integrar la planificación de la demanda cognitiva, los procesos investigativos, la mediación pedagógica y el desarrollo profesional docente, el MIPATI amplía las posibilidades de análisis de las tareas matemáticas y ofrece elementos para las investigaciones, la formación inicial y continua del profesorado y la planificación de ambientes de aprendizaje que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático.

Aunque el modelo se ilustró mediante dos tareas pertenecientes a diferentes temas de las Matemáticas, su estructura teórica permite aplicarlo a otros contenidos y niveles educativos. En este sentido, futuras investigaciones podrán analizar su utilización en distintos contextos de la Educación Básica y de la formación del profesorado, así como producir evidencias empíricas que contribuyan a su perfeccionamiento y a la ampliación de sus posibilidades de uso en la investigación y en la práctica docente.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LA AUTORA

Claudia Lisete Oliveira Groenwald concibió el estudio, realizó la revisión de la literatura, definió el marco teórico y metodológico, elaboró el modelo integrador, analizó las tareas investigativas, interpretó los resultados y redactó íntegramente el manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán facilitados por la autora de correspondencia previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

La autora agradece al Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (CNPq) el apoyo a la investigación mediante la Beca de Productividad en Investigación – Nivel 1, esencial para el desarrollo de las investigaciones que fundamentaron la elaboración de este artículo.

REFERENCES

- Coll, C. (1997). *Psicologia e currículo: Uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar* (2.^a ed.). Ática.
- Contreras, O. G., Groenwald, C. L. O., & Homa, A. I. R. (2022). Formação inicial de professores de matemática: Uma vivência pedagógica com atividades investigativas. *VIDYA*, 42(2), 147–164.
<https://doi.org/10.37781/vidya.v42i2.4237>
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae*, 13(1), 9–30.
- Groenwald, C. L. O., & Homa, A. I. R. (2021). Educación matemáticas y tecnologías: Planificación de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(63), 1–16.
- Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2019). Competencia docente de observar con sentido situaciones de enseñanza. *Paradigma*, 40, 29–46.
<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p29-46.id740>
- Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(2), e202202. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.29>
- Homa, A. I. R., Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2023). Tarefas matemáticas investigativas de alta demanda cognitiva. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16(42), 1–22.
<https://doi.org/10.46312/pem.v16i42.18315>
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. da Ponte & L. Serrazina (Coords.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 109–132). Seção de

Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

- Llinares, S., Ivars, P., Bufo, À., & Groenwald, C. L. O. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo Jiménez, N. Climent Rodríguez, C. Fernández Verdú, & M. T. González Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177–192). Ediciones Universidad de Salamanca.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*.
- Penalva, M. C., & Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la educación secundaria. En J. M. Goñi (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 27–51). Graó.
- Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *UNIÃO: Revista Iberoamericana de Educação Matemática*, 21, 13–30.
- Ponte, J. P. (2017). *Investigações matemáticas e investigações na prática profissional*. Editora Livraria da Física.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica.
- Seibert, L. G., Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2013). Observar com sentido: Uma competência importante na vida profissional do professor de Matemática. *Acta Scientiae*, 15(1), 133–152.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344–350.
<https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344>

- Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488.
<https://doi.org/10.3102/00028312033002455>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 123–140. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9279-2>
- Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1>