

Um modelo integrador para o planejamento e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva

Claudia Lisete Oliveira Groenwald ^{ab} 

^a Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, RS, Brasil

^b Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS, Brasil

RESUMO

Contexto: O planejamento de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva constitui um desafio para a Educação Matemática, uma vez que demanda a articulação entre diferentes referenciais relacionados à demanda cognitiva, à investigação matemática, à mediação pedagógica e à competência docente de Observar com Sentido.

Objetivos: Analisar como um modelo integrador, fundamentado nessas quatro dimensões, pode orientar o planejamento e a análise de tarefas investigativas em diferentes temas da Matemática.

Design: Estudo teórico, de natureza qualitativa, fundamentado na análise e integração de referenciais consolidados da Educação Matemática.

Ambiente e participantes: A pesquisa tem como fontes de análise a produção científica sobre tarefas matemáticas, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido, bem como duas tarefas investigativas elaboradas para ilustrar a aplicação do modelo proposto.

Coleta e análise de dados: Os referenciais teóricos foram analisados de forma interpretativa e articulados na construção do Modelo Integrador para o Planejamento e a Análise de Tarefas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva (MIPATI).

Em seguida, o modelo foi aplicado à análise de duas tarefas investigativas dos campos da Aritmética e da Geometria/Álgebra.

Resultados: As análises evidenciaram que o MIPATI integra, de forma coerente, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido, permitindo orientar o planejamento, a implementação e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva em diferentes conteúdos matemáticos.

Conclusões: O modelo amplia as possibilidades de análise e planejamento de tarefas investigativas, constituindo um referencial para pesquisas em Educação Matemática e para a formação inicial e continuada de professores, com potencial de aplicação em diferentes contextos da Educação Básica.

Palavras-chave: tarefas investigativas; demanda cognitiva; planejamento de tarefas; Observar com Sentido; Educação Matemática.

Corresponding author: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

Email: claudiag1959@gmail.com

An Integrative Model for Planning and Analyzing High Cognitive Demand Investigative Tasks

ABSTRACT

Context: The planning of investigative tasks of high cognitive demand is a challenge for Mathematics Education, since it demands the articulation between different references related to cognitive demand, mathematical investigation, pedagogical mediation and the teaching competence of Professional Noticing. **Objectives:** To analyze how an integrative model, based on these four dimensions, can guide the planning and analysis of investigative tasks in different fields of Mathematics. **Design:** This is a theoretical study of a qualitative nature, based on the analysis and integration of consolidated references of Mathematics Education. **Environment and participants:** The research has as sources of analysis the scientific production on mathematical tasks, cognitive demand, mathematical investigation, pedagogical mediation and Professional Noticing, as well as two investigative tasks elaborated to illustrate the application of the proposed model. **Data collection and analysis:** The theoretical frameworks were analyzed in an interpretative way and articulated in the construction of the Integrative Model for the Planning and Analysis of Investigative Tasks of High Cognitive Demand (MIPATI). Then, the model was applied to the analysis of two investigative tasks in the fields of Arithmetic and Geometry/Algebra. **Results:** The analyses showed that MIPATI coherently integrates cognitive demand, mathematical investigation, pedagogical mediation and Professional Noticing, allowing to guide the planning, implementation and analysis of investigative tasks of high cognitive demand in different mathematical contents. **Conclusions:** The model expands the possibilities of analysis and planning of investigative tasks, constituting a reference for research in Mathematics Education and for the initial and continuing training of teachers, with potential for application in different contexts of Basic Education.

Keywords: investigative tasks; cognitive demand; task planning; Professional Noticing; Mathematics Education.

Un modelo integrador para la planificación y el análisis de tareas investigativas de alta demanda cognitiva

RESUMEN

Contexto: O planejamento de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva constitui um desafio para a Educação Matemática, uma vez que demanda a articulação entre diferentes referenciais relacionados à demanda cognitiva, à investigação matemática, à mediação pedagógica e à competência docente de Observar com Sentido. **Objetivos:** Analisar como um modelo integrador, fundamentado nessas quatro dimensões, pode orientar o planejamento e a análise de tarefas investigativas em diferentes temas da Matemática. **Design:** Estudo teórico, de natureza qualitativa, fundamentado na análise e integração de referenciais consolidados da Educação Matemática. **Ambiente e participantes:** A pesquisa tem como fontes de análise a

produção científica sobre tarefas matemáticas, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido, bem como duas tarefas investigativas elaboradas para ilustrar a aplicação do modelo proposto. **Coleta e análise de dados:** Os referenciais teóricos foram analisados de forma interpretativa e articulados na construção do Modelo Integrador para o Planejamento e a Análise de Tarefas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva (MIPATI). Em seguida, o modelo foi aplicado à análise de duas tarefas investigativas dos campos da Aritmética e da Geometria/Álgebra. **Resultados:** As análises evidenciaram que o MIPATI integra, de forma coerente, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido, permitindo orientar o planejamento, a implementação e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva em diferentes conteúdos matemáticos. **Conclusões:** O modelo amplia as possibilidades de análise e planejamento de tarefas investigativas, constituindo um referencial para pesquisas em Educação Matemática e para a formação inicial e continuada de professores, com potencial de aplicação em diferentes contextos da Educação Básica.

Palabras clave: tareas investigativas; demanda cognitiva; planificación de tareas; Observar con Sentido; Educación Matemática.

INTRODUÇÃO

As discussões apresentadas neste artigo resultam das pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM), grupo de pesquisa vinculado ao CNPq que investiga temas relacionados ao currículo, ao ensino e à aprendizagem de Matemática, à formação de professores e à integração de tecnologias digitais aos processos educativos. Entre as linhas de investigação desenvolvidas pelo grupo destacam-se os estudos sobre tarefas matemáticas investigativas, inicialmente voltados à elaboração e implementação de tarefas de alta demanda cognitiva e, mais recentemente, à construção de referenciais teóricos que integrem o planejamento didático, os processos investigativos dos estudantes, a mediação pedagógica e a competência profissional de *Observar com Sentido*.

O planejamento constitui um componente essencial da prática docente, pois organiza intencionalmente os objetivos de aprendizagem, os conteúdos, as metodologias, os recursos e as formas de avaliação, influenciando diretamente as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos estudantes (Coll, 1997). No ensino de Matemática, esse planejamento materializa-se, sobretudo, por meio das tarefas propostas, que orientam as formas de interação com os conhecimentos matemáticos e condicionam os processos cognitivos mobilizados durante sua resolução (Ponte, 2010). Assim, a seleção das tarefas representa uma decisão pedagógica que influencia o desenvolvimento do raciocínio, da resolução de problemas, da argumentação, da comunicação matemática e da construção de generalizações.

Pesquisas em Educação Matemática evidenciam que tarefas de elevada demanda cognitiva favorecem aprendizagens conceituais mais profundas ao requererem que os estudantes estabeleçam conexões, formulem conjecturas, justifiquem procedimentos, validem resultados e produzam generalizações (Smith & Stein, 1998; Stein et al., 1996; Ponte, 2017). Nessa perspectiva, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) compreendem a investigação matemática como um processo que envolve explorar situações, identificar regularidades, formular e testar conjecturas, justificar estratégias e comunicar conclusões, atribuindo aos estudantes um papel ativo na construção do conhecimento matemático.

Entretanto, o potencial formativo das tarefas investigativas não depende exclusivamente de seu planejamento. Sullivan et al. (2015) demonstram que a preservação da demanda cognitiva está diretamente relacionada às decisões tomadas pelo professor durante a implementação da tarefa, especialmente à qualidade da mediação pedagógica. De forma complementar, Llinares et al. (2019) evidenciam que interpretar as produções dos estudantes e utilizá-las para fundamentar decisões didáticas constitui uma competência profissional essencial, denominada Observar com Sentido (*Professional Noticing*), que envolve identificar aspectos relevantes do pensamento matemático dos estudantes, interpretar seus significados e decidir intervenções pedagógicas coerentes com os objetivos de aprendizagem.

Embora esses referenciais estejam amplamente consolidados na literatura, eles têm sido discutidos, em geral, de forma independente. São escassos os estudos que articulam, em um mesmo referencial, a demanda cognitiva das tarefas, os processos investigativos, a mediação pedagógica e a competência de Observar com Sentido, de modo a orientar simultaneamente o planejamento, a implementação e a análise de tarefas investigativas. Essa lacuna restringe a compreensão das tarefas como instrumentos capazes de promover a aprendizagem matemática e de fundamentar a análise e a qualificação da prática docente, favorecendo o aperfeiçoamento das práticas de ensino em diferentes temas da Educação Matemática desenvolvidos na Educação Básica.

Pesquisas recentes têm evidenciado que o planejamento de tarefas matemáticas exige a articulação entre conhecimentos sobre demanda cognitiva, compreensão do pensamento dos estudantes e tomada de decisões didáticas (Groenwald & Llinares, 2019). Diante desse contexto, propõe-se que o planejamento de tarefas investigativas seja compreendido como um processo integrado, no qual demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido constituam dimensões interdependentes.

Defende-se que a articulação desses referenciais possibilita a construção de um modelo teórico capaz de subsidiar tanto a elaboração quanto a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva.

Nesse contexto, a pesquisa é orientada pela seguinte questão: Como um modelo integrador, fundamentado na demanda cognitiva, na investigação matemática, na mediação pedagógica e na competência de Observar com Sentido, pode orientar o planejamento e a análise de tarefas investigativas em diferentes temas da Educação Matemática?

Este estudo propõe um modelo integrador para o planejamento e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva, construído a partir da articulação entre resultados de pesquisas e referenciais consolidados da Educação Matemática. Espera-se que essa sistematização contribua para a investigação em Educação Matemática e para a formação de professores, oferecendo subsídios para a elaboração, a implementação e a análise de tarefas investigativas em diferentes temas da Educação Matemática na Educação Básica.

Com base nessa questão, o objetivo deste artigo é analisar como um modelo integrador orienta o planejamento e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva em diferentes temas da Matemática, evidenciando sua consistência como instrumento didático e analítico. Para isso, apresenta-se um modelo integrador que articula quatro perspectivas consolidadas da Educação Matemática e ilustra sua aplicação por meio da análise de dois exemplos de tarefas investigativas.

REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico está organizado de modo a construir progressivamente os fundamentos que sustentam o modelo integrador proposto. Inicialmente, discutem-se as tarefas matemáticas como elementos organizadores das oportunidades de aprendizagem, considerando seu conceito, sua relação com os objetivos de ensino e a introdução da noção de demanda cognitiva. Em seguida, abordam-se as características das tarefas investigativas e sua articulação com níveis elevados de demanda cognitiva. Posteriormente, analisa-se a mediação pedagógica durante a implementação das tarefas, com ênfase nas ações docentes que podem preservar ou reduzir o desafio cognitivo inicialmente previsto. Na sequência, apresenta-se a competência profissional de Observar com Sentido (*Professional Noticing*), compreendida a partir dos processos de identificar, interpretar e decidir com base nas produções dos estudantes. Por fim, essas dimensões são articuladas em um modelo integrador

para o planejamento e a análise de tarefas investigativas, constituindo a contribuição teórica central deste estudo.

Tarefas matemáticas como organizadoras da aprendizagem

As tarefas matemáticas constituem o principal meio pelo qual o currículo se materializa na prática pedagógica, pois organizam as experiências de aprendizagem e influenciam os processos de raciocínio desenvolvidos pelos estudantes. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991, 2000, 2014) destaca que a natureza das tarefas propostas pelo professor determina as oportunidades de investigar, argumentar, estabelecer conexões, resolver problemas e construir significados matemáticos. Dessa forma, sua seleção e planejamento constituem decisões curriculares importantes para promover aprendizagens conceituais aprofundadas (NCTM, 2014).

Embora frequentemente empregados como sinônimos, os conceitos de tarefa e atividade possuem significados distintos. A tarefa corresponde à proposta formulada pelo professor, enquanto a atividade refere-se ao conjunto de ações efetivamente desenvolvidas pelo estudante durante sua realização. Assim, uma mesma tarefa pode originar atividades distintas, dependendo da interpretação dos estudantes, das intervenções do professor e do contexto em que é desenvolvida. Consequentemente, a aprendizagem decorre da atividade realizada pelos estudantes, e não da tarefa em si (Ponte, 2010; 2017).

Stein et al. (2000) ampliam a compreensão sobre as tarefas matemáticas ao evidenciar que seu potencial para promover a aprendizagem não depende apenas de sua elaboração inicial, mas também das transformações que ocorrem ao longo do processo de ensino. Os autores propõem um ciclo constituído por quatro momentos interdependentes: a tarefa como planejada, correspondente às intenções didáticas do professor durante o planejamento; a tarefa como proposta, referente à forma como é apresentada aos estudantes em sala de aula; a tarefa como implementada, caracterizada pelas interações estabelecidas entre professor, estudantes e tarefa durante sua resolução; e a tarefa como realizada, que corresponde ao trabalho efetivamente desenvolvido pelos estudantes e às oportunidades de aprendizagem produzidas. Essa perspectiva evidencia que a demanda cognitiva inicialmente prevista pode ser preservada, ampliada ou reduzida em função das decisões pedagógicas tomadas durante a implementação da tarefa, reforçando a importância de compreender o planejamento como um processo dinâmico e contínuo.

A análise da demanda cognitiva também constitui um componente do conhecimento profissional do professor. Groenwald e Llinares (2019)

evidenciam que a escolha de tarefas compatíveis com os objetivos de aprendizagem exige que o professor seja capaz de analisar o tipo de raciocínio requerido em sua resolução, articulando o planejamento didático às possibilidades de aprendizagem dos estudantes. Nessa perspectiva, classificar tarefas segundo sua demanda cognitiva constitui uma competência essencial para o planejamento do ensino de Matemática.

As tarefas matemáticas podem abarcar desde um conjunto de exercícios rotineiros até um problema complexo e desafiante que enfoque a atenção dos alunos em uma ideia matemática particular (NCTM, 2014). As tarefas são os projetos, questões, problemas, construções, aplicações e exercícios nos quais os alunos se envolvem, visando desenvolver o pensamento matemático, fornecendo os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos (NCTM, 1991).

Stein, Grover e Henningsen (1996) e Smith e Stein (1998) compreendem as tarefas matemáticas como propostas de trabalho cuidadosamente planejadas para focalizar a atenção dos estudantes em ideias matemáticas específicas e promover diferentes formas de pensamento matemático. Elaboradas no contexto da interação entre ensino e aprendizagem, essas tarefas orientam o desenvolvimento de conceitos matemáticos e são intencionalmente selecionadas pelo professor para favorecer o envolvimento dos estudantes. Nessa perspectiva, diferentes tarefas proporcionam diferentes oportunidades de aprendizagem, uma vez que mobilizam distintos processos de raciocínio e exigem diferentes formas de pensamento matemático.

Essa concepção evidencia que a seleção das tarefas não constitui uma decisão meramente operacional, mas uma escolha pedagógica fundamentada nos objetivos de aprendizagem pretendidos. Ao planejar uma tarefa, o professor antecipa quais conhecimentos deseja desenvolver, quais estratégias os estudantes poderão mobilizar e quais formas de interação pretende promover durante a aula. Dessa forma, o planejamento estabelece uma articulação entre os objetivos de ensino, os conteúdos matemáticos e as experiências de aprendizagem que serão vivenciadas pelos estudantes, tornando as tarefas o principal elo entre a intenção pedagógica do professor e a aprendizagem matemática.

Para Ponte (2010; 2017) as tarefas constituem instrumentos de mediação do ensino de Matemática, podendo favorecer diferentes oportunidades de aprendizagem conforme sua natureza, a forma como são propostas, o ambiente de aprendizagem criado pelo professor e os conhecimentos prévios mobilizados pelos estudantes. Dessa forma, o potencial

educativo de uma tarefa não está apenas em sua elaboração, mas também nas condições em que é desenvolvida em sala de aula.

Smith e Stein (1998) ressaltam que diferentes objetivos de aprendizagem exigem diferentes tipos de tarefas. Quando o objetivo consiste na memorização de fatos, definições ou regras, tarefas centradas na reprodução de conhecimentos podem ser adequadas. Entretanto, quando se pretende desenvolver compreensão conceitual, comunicação matemática, raciocínio e resolução de problemas, tornam-se necessárias tarefas que desafiem os estudantes a explorar ideias, estabelecer relações, justificar procedimentos e construir novos conhecimentos. Assim, a escolha das tarefas deve ser coerente com as competências matemáticas que se pretende desenvolver, evidenciando que a aprendizagem depende não apenas do conteúdo ensinado, mas da natureza das experiências cognitivas proporcionadas durante sua aprendizagem.

Nesse contexto, emerge a noção de demanda cognitiva, compreendida como uma característica que permite analisar o tipo e o nível de pensamento requerido para resolver uma tarefa matemática. Segundo Penalva e Llinares (2011), a demanda cognitiva refere-se à natureza e ao nível dos processos de pensamento mobilizados pelos estudantes durante a resolução de uma tarefa matemática. Nessa perspectiva, as características da tarefa condicionam as oportunidades de aprendizagem que ela oferece, uma vez que diferentes níveis de exigência cognitiva promovem distintas formas de raciocínio e de construção do conhecimento matemático.

Sob essa perspectiva, tarefas que abordam um mesmo conteúdo podem promover oportunidades de aprendizagem qualitativamente distintas, dependendo dos processos intelectuais que mobilizam. A demanda cognitiva desloca, portanto, o foco da simples execução de procedimentos para a análise das formas de raciocínio exigidas dos estudantes, constituindo um importante referencial para compreender o potencial formativo das tarefas matemáticas.

Considerando o grau de desafio matemático e o grau de estrutura das tarefas, Ponte (2010) distingue quatro categorias: exercícios, problemas, explorações e investigações. Exercícios caracterizam-se por serem tarefas fechadas e de reduzido desafio; problemas apresentam elevado desafio, porém permanecem estruturados; explorações correspondem a tarefas abertas e acessíveis à maioria dos estudantes; e investigações constituem tarefas abertas que demandam elevado nível de desafio matemático. Essa classificação evidencia que as tarefas investigativas se diferenciam tanto pela abertura quanto pelo potencial para mobilizar processos matemáticos mais complexos.

Essa discussão evidencia que as tarefas matemáticas diferem não apenas quanto ao seu formato ou grau de abertura, mas sobretudo quanto aos processos cognitivos que mobilizam. Nesse contexto, a noção de demanda cognitiva constitui um referencial fundamental para compreender por que determinadas tarefas oferecem maiores oportunidades para o desenvolvimento do pensamento matemático, aspecto aprofundado na seção seguinte.

TAREFAS INVESTIGATIVAS E DEMANDA COGNITIVA

A qualidade das experiências matemáticas vivenciadas pelos estudantes está diretamente relacionada às características das tarefas propostas e às formas de raciocínio que elas mobilizam. Enquanto algumas tarefas privilegiam a reprodução de procedimentos previamente conhecidos, outras favorecem a exploração, o estabelecimento de relações, a formulação de conjecturas, a argumentação e a construção de novos conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, destacam-se as tarefas investigativas, caracterizadas por promoverem formas mais complexas de raciocínio e por preservarem elevados níveis de demanda cognitiva. Essas tarefas incentivam os estudantes a explorar situações abertas, elaborar diferentes estratégias de resolução, justificar procedimentos, validar resultados e construir generalizações.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) compreendem a investigação matemática como um processo em que os estudantes assumem um papel ativo na construção do conhecimento, sendo convidados a explorar situações, identificar regularidades, formular questões, levantar e testar conjecturas, validar resultados e produzir generalizações. Nessa perspectiva, investigar não significa apenas resolver um problema, mas construir caminhos próprios de resolução, justificando procedimentos e comunicando argumentos matemáticos. A investigação caracteriza-se, portanto, como uma atividade aberta, na qual diferentes estratégias podem emergir e ser discutidas coletivamente.

Essa concepção é aprofundada por Homa, Groenwald e Llinares (2023), ao defenderem que tarefas investigativas constituem oportunidades de aprendizagem nas quais os estudantes são incentivados a explorar conceitos matemáticos de forma livre, estabelecer relações, formular hipóteses, testar estratégias, validar resultados e comunicar suas conclusões. Os autores ressaltam que essas tarefas rompem com a lógica da reprodução mecânica de algoritmos e deslocam o foco da obtenção da resposta para os processos de pensamento desenvolvidos durante a resolução. Dessa forma, as tarefas investigativas possibilitam que os estudantes *façam Matemática*, mobilizando conhecimentos conceituais e procedimentais de maneira articulada.

Sob essa perspectiva, a investigação matemática pode ser compreendida como um ciclo composto por diferentes processos intelectuais interdependentes. Inicialmente, os estudantes exploram uma situação matemática buscando identificar padrões, propriedades e relações relevantes. A partir dessas observações, formulam conjecturas que orientam novas explorações e experimentações. Em seguida, essas conjecturas são testadas por meio de diferentes estratégias, podendo ser reformuladas diante de novas evidências. Posteriormente, ocorre a validação das conclusões obtidas, sustentada por justificativas e argumentos matemáticos consistentes. Finalmente, os estudantes produzem generalizações, ampliando o alcance das ideias construídas para novos contextos matemáticos. Esse movimento investigativo favorece o desenvolvimento do pensamento matemático, da comunicação e da argumentação, constituindo um ambiente propício para aprendizagens conceituais mais profundas.

As tarefas investigativas favorecem que os estudantes desenvolvam métodos próprios de resolução, explorem diferentes estratégias e construam conhecimentos por meio da descoberta de regularidades, valorizando processos de autonomia intelectual e de produção de significados matemáticos (Llinares, 2000; Ponte, 2010; 2017; Homa, Groenwald & Llinares, 2023).

Essas características aproximam diretamente as tarefas investigativas dos níveis mais elevados de demanda cognitiva propostos por Smith e Stein (1998). Na classificação apresentada pelos autores, as tarefas podem ser organizadas em quatro níveis: memorização (Nível 1), procedimentos sem conexão (Nível 2), procedimentos com conexão (Nível 3) e fazer Matemática (Nível 4). Enquanto os dois primeiros níveis privilegiam a reprodução de conhecimentos já estabelecidos, os níveis 3 e 4 exigem que os estudantes estabeleçam conexões entre conceitos, interpretem relações matemáticas, justifiquem procedimentos e desenvolvam formas mais complexas de raciocínio.

As tarefas investigativas tendem, portanto, a situar-se predominantemente nos níveis 3 e 4 de demanda cognitiva. No Nível 3, os estudantes realizam procedimentos articulados à compreensão conceitual, sendo levados a interpretar propriedades matemáticas, estabelecer conexões entre diferentes ideias e justificar os procedimentos utilizados. Já no Nível 4, caracterizado pelo fazer Matemática, as tarefas exigem elevado esforço cognitivo, não apresentam caminhos previamente definidos e demandam que os estudantes selecionem estratégias, tomem decisões, formulem conjecturas, validem resultados e construam generalizações. Nessas situações, a resolução

depende da mobilização integrada dos conhecimentos matemáticos, e não da simples aplicação de algoritmos conhecidos.

Essa relação entre investigação matemática e elevada demanda cognitiva não é casual. As próprias características constitutivas das tarefas investigativas, abertura, múltiplos caminhos de resolução, necessidade de argumentação e produção de generalizações, fazem com que elas exijam formas sofisticadas de pensamento matemático. Ao explorar uma situação, formular conjecturas, testar hipóteses e justificar conclusões, os estudantes necessariamente mobilizam processos cognitivos compatíveis com alta demanda cognitiva (níveis 3 e 4).

Todavia, conforme destacam Smith e Stein (1998), a elevada demanda cognitiva não é determinada exclusivamente pelo planejamento da tarefa. O nível inicialmente previsto pode ser reduzido durante sua implementação caso a mediação docente simplifique excessivamente os desafios propostos, forneça procedimentos prontos ou direcione precocemente os estudantes para um único caminho de resolução. Em contrapartida, quando o professor preserva a complexidade da tarefa, promove tempo para exploração, valoriza diferentes estratégias e estimula a argumentação matemática, amplia-se a possibilidade de manutenção dos níveis 3 e 4 de demanda cognitiva ao longo da aula.

Essa compreensão evidencia que a qualidade de uma tarefa não pode ser analisada apenas por suas características de elaboração, mas também pela forma como é conduzida em sala de aula, uma vez que as decisões pedagógicas tomadas durante sua implementação influenciam diretamente as oportunidades de aprendizagem e a preservação da demanda cognitiva. Conforme destaca Ponte (2010; 2017), a tarefa sofre transformações entre o momento em que é selecionada pelo professor e sua efetiva realização pelos estudantes, sendo influenciada pela forma como é apresentada, interpretada e desenvolvida em sala de aula.

Groenwald e Homa (2021) reforçam essa perspectiva ao defenderem que o planejamento de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva constitui uma estratégia para promover ambientes de aprendizagem em que os estudantes assumem um papel ativo na construção do conhecimento. Segundo os autores, tarefas abertas, especialmente quando articuladas às tecnologias digitais, favorecem a exploração de diferentes estratégias, a formulação e validação de conjecturas, a comunicação de argumentos e a produção de generalizações matemáticas, preservando elevados níveis de raciocínio durante sua resolução.

As tarefas investigativas também assumem um papel relevante na formação inicial de professores de Matemática. Ao analisarem uma experiência pedagógica fundamentada em atividades investigativas, Contreras, Groenwald e Homa (2022) evidenciaram que esse tipo de tarefa favorece processos de exploração, argumentação, reflexão e tomada de decisões, ao mesmo tempo em que contribui para o desenvolvimento da competência de Observar com Sentido. Segundo os autores, a vivência com atividades investigativas, especialmente quando articulada às tecnologias digitais, amplia as oportunidades para que futuros professores analisem as estratégias dos estudantes, interpretem suas produções e fundamentem decisões pedagógicas de maneira mais consistente.

Esses resultados reforçam a compreensão de que o planejamento de tarefas investigativas não se limita à elaboração de situações desafiadoras, mas constitui um processo que integra demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e a competência de Observar com Sentido, dimensões que se articulam na organização de ambientes de aprendizagem matematicamente ricos.

Essa compreensão aproxima a investigação matemática da perspectiva do desenvolvimento profissional docente. Ao planejar tarefas investigativas, o professor necessita antecipar as possíveis estratégias dos estudantes, reconhecer a demanda cognitiva envolvida e interpretar as diferentes produções matemáticas durante a aula para fundamentar suas decisões pedagógicas. Nesse processo, a competência de Observar com Sentido (*Professional Noticing*) torna-se indispensável, pois permite identificar os aspectos matematicamente relevantes das resoluções apresentadas, interpretar o pensamento dos estudantes e decidir novas ações capazes de preservar a natureza investigativa da tarefa e seu elevado potencial formativo.

Essa competência também envolve a análise das tarefas matemáticas que serão propostas aos estudantes. Groenwald e Llinares (2019), ao investigarem licenciandos em Matemática, evidenciaram que a competência de Observar com Sentido está apoiada na capacidade de interpretar as características das tarefas, identificar sua demanda cognitiva, antecipar dificuldades dos estudantes e utilizar essas informações para fundamentar decisões relativas ao planejamento docente.

Dessa forma, defende-se que existe uma relação intrínseca entre tarefas investigativas e altos níveis de demanda cognitiva. As ações de explorar, formular conjecturas, testar hipóteses, validar resultados, construir generalizações e comunicar argumentos matemáticos constituem processos característicos da investigação matemática e, simultaneamente, correspondem

às exigências cognitivas presentes nos níveis 3 e 4 da classificação de Smith e Stein. Essa articulação fornece um dos pilares do modelo integrador proposto neste artigo, ao evidenciar que o planejamento de tarefas investigativas deve buscar, intencionalmente, preservar elevados níveis de demanda cognitiva como condição para favorecer aprendizagens matemáticas mais profundas e promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA NA IMPLEMENTAÇÃO DAS TAREFAS

A qualidade das oportunidades de aprendizagem proporcionadas por uma tarefa matemática não depende exclusivamente de seu planejamento, mas também da forma como ela é implementada em sala de aula. Mesmo quando uma tarefa é concebida para mobilizar elevados níveis de demanda cognitiva, sua complexidade pode ser preservada, ampliada ou reduzida em função das decisões tomadas pelo professor durante a mediação pedagógica. Assim, a implementação constitui um momento decisivo, no qual a atuação docente influencia diretamente os processos de pensamento desenvolvidos pelos estudantes e as possibilidades de construção do conhecimento matemático.

Nessa perspectiva, Sullivan et al. (2015) defendem que a mediação pedagógica deve criar condições para que os estudantes permaneçam envolvidos em tarefas desafiadoras, explorando diferentes estratégias de resolução, justificando seus raciocínios, confrontando ideias e construindo argumentos matemáticos. Em vez de antecipar procedimentos ou apresentar algoritmos prontos, o professor organiza situações que favorecem a investigação, promove discussões matemáticas produtivas e incentiva a explicitação das relações estabelecidas pelos estudantes. A mediação, portanto, não consiste em simplificar a tarefa, mas em oferecer suporte para que os estudantes avancem na resolução preservando sua autonomia intelectual.

Essa compreensão converge com os estudos de Smith e Stein (1998, 2011), que evidenciam que a demanda cognitiva inicialmente prevista durante o planejamento podem sofrer modificações ao longo da implementação da tarefa. Entre as ações que tendem a reduzir o desafio cognitivo destacam-se a demonstração antecipada dos procedimentos, a indicação de um único caminho de resolução, a fragmentação excessiva da tarefa, a valorização exclusiva da resposta correta e a intervenção constante do professor para corrigir ou direcionar as estratégias dos estudantes. Nessas situações, a tarefa deixa de mobilizar processos de exploração, tomada de decisões e argumentação, aproximando-se de atividades centradas na reprodução de procedimentos previamente conhecidos.

Por outro lado, determinadas ações docentes favorecem a preservação dos níveis elevados de demanda cognitiva. Entre elas destacam-se a proposição de questionamentos que estimulem a explicitação do pensamento matemático, a solicitação de justificativas para as estratégias utilizadas, a comparação entre diferentes resoluções, a valorização de múltiplos caminhos de solução, a promoção de discussões coletivas e a institucionalização das ideias construídas pelos estudantes. Essas intervenções mantêm o foco nos processos de raciocínio, permitindo que os estudantes estabeleçam conexões conceituais, formulem e validem conjecturas, construam generalizações e comuniquem seus argumentos matemáticos.

No contexto das tarefas investigativas, a mediação pedagógica assume papel ainda mais relevante, pois a natureza aberta dessas tarefas exige que o professor acompanhe continuamente os processos de investigação desenvolvidos pelos estudantes. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), investigar em Matemática envolve explorar situações, identificar regularidades, formular questões, testar conjecturas e justificar conclusões. A mediação docente deve, portanto, favorecer esses processos sem substituir a atividade intelectual dos estudantes, criando oportunidades para que eles expliquem seus raciocínios, confrontem diferentes interpretações e construam coletivamente novos conhecimentos matemáticos.

Nessa perspectiva, a mediação pedagógica estabelece uma relação direta entre o planejamento da tarefa e sua efetiva realização em sala de aula. Planejar tarefas de alta demanda cognitiva implica antecipar possíveis estratégias, dificuldades e formas de intervenção, mas também reconhecer que as decisões tomadas durante a implementação podem modificar substancialmente o potencial formativo inicialmente previsto. Assim, a mediação deixa de ser compreendida como uma ação destinada apenas a esclarecer dúvidas e passa a constituir uma dimensão estruturante do processo de ensino, responsável por preservar a natureza investigativa das tarefas e favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

OBSERVAR COM SENTIDO COMO COMPETÊNCIA PROFISSIONAL DOCENTE

A implementação de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva exige do professor mais do que o domínio dos conteúdos matemáticos ou a condução de discussões em sala de aula. Requer a capacidade de interpretar continuamente as produções dos estudantes, compreender os significados dos raciocínios mobilizados e utilizar essas evidências para fundamentar decisões pedagógicas. Essa competência profissional, denominada Observar com

Sentido (*Professional Noticing*), tem sido amplamente desenvolvida por Llinares e colaboradores (2019) e Fernández, Llinares e Valls (2011) e constitui um dos referenciais importantes para compreender como o professor transforma as informações produzidas pelos estudantes em ações que favorecem a aprendizagem matemática.

No contexto brasileiro, estudos sobre a competência de Observar com Sentido vêm sendo desenvolvidos há mais de uma década. Seibert, Groenwald e Llinares (2013) evidenciaram, em uma investigação com licenciandos em Matemática, que ambientes formativos voltados à análise de situações de ensino favorecem o desenvolvimento da capacidade de identificar aspectos relevantes da prática docente, interpretar produções dos estudantes e fundamentar decisões pedagógicas.

Groenwald e Llinares (2022) ampliam essa compreensão ao caracterizar a competência de Observar com Sentido como um conjunto de práticas profissionais que articulam identificar aspectos relevantes das situações de ensino, interpretar o pensamento matemático dos estudantes, antecipar possíveis respostas e fundamentar decisões pedagógicas. Nessa perspectiva, a análise das tarefas matemáticas constitui um dos contextos privilegiados para o desenvolvimento dessa competência profissional.

Essa perspectiva é reforçada por Homa, Groenwald e Llinares (2023), ao evidenciarem que a análise das tarefas investigativas e das estratégias produzidas pelos estudantes constitui um contexto privilegiado para o desenvolvimento dessa competência profissional, articulando planejamento, implementação, interpretação e tomada de decisões pedagógicas.

Na perspectiva de Llinares (2000), Observar com Sentido não corresponde a uma observação espontânea ou intuitiva da aula, mas a uma prática profissional sustentada por conhecimentos matemáticos, didáticos e curriculares. Trata-se da capacidade de identificar aspectos relevantes das produções dos estudantes, interpretar esses indícios à luz da aprendizagem matemática e tomar decisões coerentes com os objetivos de ensino. Assim, observar não significa apenas registrar o que os estudantes fazem, mas compreender por que utilizam determinadas estratégias, quais conhecimentos mobilizam, quais dificuldades evidenciam e quais possibilidades de intervenção podem favorecer a continuidade da aprendizagem.

Diversos estudos sobre Observar com Sentido (*Professional Noticing*) convergem para a compreensão de que essa competência envolve três processos inter-relacionados. O primeiro consiste em identificar os aspectos relevantes do

pensamento matemático dos estudantes, distinguindo, entre as múltiplas informações presentes na sala de aula, aquelas que são significativas para compreender a aprendizagem. O segundo refere-se à interpretação dessas evidências, relacionando-as ao conhecimento matemático e às trajetórias de aprendizagem, de modo a explicar os significados das estratégias, erros, conjecturas e argumentos produzidos. O terceiro processo corresponde à tomada de decisões pedagógicas, na qual o professor utiliza as interpretações realizadas para reorganizar a mediação, propor novos questionamentos, selecionar estratégias de discussão ou reformular o encaminhamento da tarefa. Essas três ações constituem um processo integrado que transforma a observação em fundamento para a ação docente.

Llinares e colaboradores (2019) destacam que essa competência profissional é construída a partir do uso do conhecimento especializado do professor em situações reais de ensino. Nessa perspectiva, interpretar as produções dos estudantes exige articular conhecimentos sobre os conceitos matemáticos, os objetivos de aprendizagem, as possíveis estratégias de resolução, as dificuldades recorrentes e as formas de mediação mais adequadas. Dessa maneira, Observar com Sentido caracteriza-se como uma competência baseada no conhecimento profissional, cuja finalidade é sustentar decisões didáticas capazes de promover aprendizagens matemáticas mais significativas e ampliar as oportunidades de participação dos estudantes durante a resolução das tarefas.

No contexto das tarefas investigativas, essa competência assume importância pois a natureza aberta dessas tarefas produz uma diversidade de estratégias, representações, conjecturas e formas de argumentação que não podem ser avaliadas apenas pela obtenção da resposta correta. O professor necessita compreender os caminhos percorridos pelos estudantes, identificar evidências do desenvolvimento do pensamento matemático e reconhecer oportunidades para ampliar as discussões coletivas. Assim, a observação das produções dos estudantes deixa de assumir caráter avaliativo restrito e passa a constituir uma fonte permanente de informações para orientar a mediação pedagógica durante o desenvolvimento da tarefa.

Essa perspectiva estabelece uma relação direta entre planejamento, implementação e análise das tarefas investigativas. Durante o planejamento, o professor antecipa possíveis estratégias de resolução, dificuldades e formas de intervenção. Durante a implementação, observa continuamente as ações dos estudantes, interpreta os significados das produções matemáticas e ajusta suas intervenções de acordo com as evidências que emergem da atividade. Após a

realização da tarefa, as informações produzidas constituem subsídios para reavaliar o planejamento, reformular propostas futuras e ampliar o conhecimento profissional docente. Desse modo, Observar com Sentido configura-se como uma competência que articula reflexão, ação e replanejamento, contribuindo para a preservação da demanda cognitiva e para o aperfeiçoamento contínuo da prática pedagógica.

As discussões desenvolvidas nas seções anteriores evidenciam que nenhuma dessas perspectivas, isoladamente, é suficiente para orientar o planejamento de tarefas investigativas. Essa constatação fundamenta a proposição do modelo integrador apresentado na seção seguinte.

MODELO INTEGRADOR PARA O PLANEJAMENTO E A ANÁLISE DE TAREFAS INVESTIGATIVAS DE ALTA DEMANDA COGNITIVA (MIPATI)

O modelo integrador proposto neste estudo foi desenvolvido com o propósito de articular referenciais que, embora amplamente consolidados na literatura da Educação Matemática, têm sido predominantemente discutidos de forma independente. Sua originalidade reside na integração dessas perspectivas em uma estrutura analítica única para o planejamento e a análise de tarefas investigativas.

A perspectiva apresentada por Stein et al. (2000) converge com o modelo integrador proposto neste estudo ao evidenciar que o planejamento de tarefas investigativas não se limita à elaboração da atividade, mas compreende um processo contínuo que articula planejamento, implementação, mediação pedagógica e análise das produções dos estudantes. Nessa direção, o modelo integra a classificação da demanda cognitiva, os processos da investigação matemática, a mediação docente e a competência de Observar com Sentido, compreendendo essas dimensões como elementos interdependentes que influenciam a qualidade das oportunidades de aprendizagem matemática.

Embora a literatura apresente importantes contribuições sobre tarefas matemáticas, demanda cognitiva, investigação matemática, mediação docente e desenvolvimento profissional do professor, observa-se que esses referenciais, em geral, são tratados de forma independente. Smith e Stein (1998, 2011) discutem a demanda cognitiva das tarefas; Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) caracterizam a investigação matemática; Sullivan e colaboradores (2013; 2015) enfatizam a importância da mediação docente na preservação da demanda cognitiva; e Llinares e colaboradores compreendem o desenvolvimento da competência de Observar com Sentido (*Professional Noticing*) como condição

para interpretar as produções dos estudantes e fundamentar decisões pedagógicas. Entretanto, poucos estudos procuram integrar esses referenciais em um modelo único que subsidie, simultaneamente, o planejamento, a implementação e a análise de tarefas investigativas. Essa constatação fundamenta a proposição do modelo integrador apresentado neste estudo.

O modelo integrador parte do pressuposto de que a qualidade de uma tarefa investigativa não depende exclusivamente de sua estrutura inicial, mas resulta da articulação dinâmica entre quatro dimensões interdependentes: (i) o nível de demanda cognitiva da tarefa; (ii) os processos investigativos mobilizados durante sua resolução; (iii) a mediação pedagógica realizada pelo professor; e (iv) a competência docente de Observar com Sentido, responsável por interpretar as produções dos estudantes e orientar novas decisões didáticas. Essas dimensões constituem um sistema integrado, no qual alterações em qualquer um dos componentes repercutem diretamente nos demais.

Dimensão 1 – Demanda cognitiva

A primeira dimensão corresponde ao planejamento da tarefa segundo sua demanda cognitiva. Assume-se a classificação proposta por Smith e Stein (1998, 2011), distinguindo tarefas de memorização, procedimentos sem conexão, procedimentos com conexão e fazer Matemática. No modelo proposto, tarefas investigativas devem ser concebidas prioritariamente nos níveis 3 e 4, pois esses níveis favorecem relações conceituais, elaboração de estratégias próprias, justificativas e argumentação matemática.

Essa dimensão define o potencial cognitivo inicial da tarefa e condiciona os processos investigativos que poderão emergir durante sua implementação.

Dimensão 2 – Investigação matemática

A segunda dimensão refere-se aos processos investigativos desencadeados pela tarefa. Fundamentada em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), compreende a exploração da situação proposta, a identificação de regularidades, a formulação e o teste de conjecturas, a validação de resultados, a produção de generalizações e a comunicação de argumentos matemáticos. Esses processos constituem evidências de que os estudantes estão efetivamente envolvidos em atividades de natureza investigativa e explicam por que tais tarefas tendem a preservar elevados níveis de demanda cognitiva.

Dimensão 3 – Mediação pedagógica

A terceira dimensão corresponde à mediação realizada pelo professor durante a implementação da tarefa. Mesmo tarefas inicialmente classificadas como de alta demanda cognitiva podem sofrer redução de sua complexidade quando a mediação privilegia demonstrações antecipadas, procedimentos algorítmicos ou respostas únicas. Em contrapartida, questionamentos, solicitações de justificativas, comparação de estratégias e discussão coletiva favorecem a preservação da demanda cognitiva e ampliam as oportunidades de aprendizagem matemática.

Dimensão 4 – Observar com Sentido

A quarta dimensão incorpora a competência docente de Observar com Sentido (*Professional Noticing*), compreendida como a capacidade de identificar aspectos relevantes das produções dos estudantes, interpretá-los à luz do conhecimento matemático e didático e tomar decisões pedagógicas fundamentadas. Nessa perspectiva, o professor deixa de apenas avaliar respostas corretas ou incorretas para compreender os raciocínios produzidos, antecipar dificuldades e reorganizar a mediação de acordo com as evidências observadas.

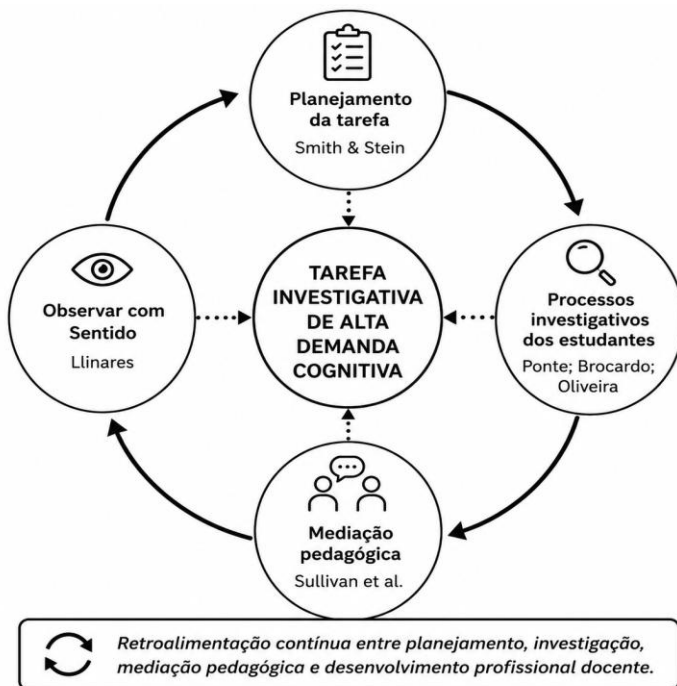
Integração das dimensões

Diferentemente das abordagens que analisam esses referenciais de forma isolada, o modelo integrador considera que as quatro dimensões estabelecem relações de interdependência. A demanda cognitiva condiciona os processos investigativos que podem emergir durante a resolução da tarefa; esses processos somente tendem a ser preservados mediante uma mediação docente coerente com seus objetivos; e essa mediação depende da capacidade do professor de interpretar continuamente as produções dos estudantes por meio da competência de Observar com Sentido. Assim, planejamento, implementação e análise constituem momentos de um mesmo processo cíclico de desenvolvimento da aprendizagem matemática.

A Figura 1 sintetiza essa proposta teórica, evidenciando que o planejamento de tarefas investigativas deve ser compreendido como um processo dinâmico no qual demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido interagem continuamente, orientando tanto o desenvolvimento da tarefa quanto as decisões didáticas do professor.

Figura 1

Modelo Integrador para o Planejamento e a Análise de Tarefas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva



A representação do modelo em formato circular expressa a natureza dinâmica e contínua do planejamento e da análise de tarefas investigativas, evidenciando que essas ações não constituem etapas lineares, mas um processo permanente de retroalimentação. A demanda cognitiva inicialmente prevista orienta a elaboração da tarefa, os processos investigativos desenvolvidos pelos estudantes fornecem evidências sobre sua efetiva implementação, a mediação pedagógica influencia a preservação ou a redução do desafio cognitivo e a competência de Observar com Sentido possibilita ao professor interpretar essas evidências e reorganizar continuamente suas decisões didáticas, retroalimentando novos planejamentos. No centro desse processo situa-se a tarefa investigativa de alta demanda cognitiva, compreendida como o elemento articulador das quatro dimensões, pois é por meio dela que se materializam as oportunidades de aprendizagem matemática. As dimensões não estabelecem relações hierárquicas nem sequenciais; ao contrário, constituem componentes

interdependentes de um mesmo sistema, no qual alterações em qualquer uma delas repercutem nas demais, evidenciando que a qualidade do planejamento, da implementação e da análise das tarefas resulta da integração entre demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e competência profissional docente.

A proposição deste modelo também se apoia em resultados de pesquisas anteriormente desenvolvidas pelo GECM, que evidenciaram a relevância do planejamento de tarefas investigativas articuladas às tecnologias digitais para favorecer a aprendizagem matemática. Esses estudos indicaram que tarefas abertas e de elevada demanda cognitiva potencializam processos de investigação, argumentação e generalização, fornecendo evidências que sustentam a integração das diferentes dimensões propostas neste artigo (Homa & Groenwald, 2021). As duas tarefas apresentadas não têm finalidade de validar empiricamente o modelo, mas de ilustrar sua operacionalização em diferentes temáticas da Matemática.

APLICAÇÃO DO MODELO INTEGRADOR AO PLANEJAMENTO E À ANÁLISE DE TAREFAS INVESTIGATIVAS

A tarefa está inserida no tema Aritmética e destina-se aos anos finais do Ensino Fundamental, podendo também ser utilizada na formação de professores. Seu objetivo é promover o aprofundamento do estudo da multiplicação por meio da tabuada de 1 a 10, concebida como objeto de investigação matemática e não como instrumento de memorização. A organização dos produtos em uma tabela favorece a identificação de regularidades, o estabelecimento de relações entre conceitos aritméticos e algébricos, a formulação e validação de conjecturas e a construção de generalizações sobre propriedades da multiplicação e dos Números Naturais.

A tarefa foi planejada considerando as quatro dimensões propostas pelo MIPATI.

- Demanda cognitiva. A tarefa situa-se predominantemente nos níveis 3 e 4 de Smith e Stein, pois não apresenta procedimentos previamente definidos e requer que os estudantes analisem padrões, estabeleçam conexões entre diferentes propriedades da multiplicação, elaborem conjecturas, produzam justificativas e construam generalizações.
- Investigação matemática. Os estudantes são convidados a explorar livremente a tabela de multiplicação, identificar regularidades, levantar hipóteses, testar conjecturas utilizando diferentes exemplos, validar

suas conclusões e comunicar argumentos matemáticos, mobilizando os processos investigativos.

- Mediação pedagógica. O planejamento prevê que o professor atue como mediador do processo investigativo, formulando questões que favoreçam a explicitação do pensamento matemático, sem antecipar respostas ou indicar procedimentos únicos, preservando a elevada demanda cognitiva da tarefa.
- Observar com Sentido. Desde o planejamento são antecipadas possíveis estratégias, dificuldades e formas de raciocínio dos estudantes, permitindo ao professor interpretar as produções durante a aula e tomar decisões fundamentadas sobre novas intervenções.

A Figura 2 apresenta a tabela que constitui o ponto de partida para a investigação.

Figura 2

Tarefa investigativa 1 – Aritmética

TABUADA DE 1 A 10										
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Inicialmente, espera-se que os estudantes identifiquem regularidades mais evidentes, como a diagonal principal composta pelos quadrados perfeitos, a simetria da tabela e a sequência de múltiplos em cada linha e coluna.

Posteriormente, podem estabelecer relações mais complexas, identificando que os números primos aparecem apenas na primeira linha e na primeira coluna, relacionando a frequência de ocorrência de um número com sua quantidade de divisores, percebendo propriedades de proporcionalidade

entre linhas e colunas e interpretando a multiplicação por meio da representação de áreas retangulares.

Em níveis mais avançados, espera-se que formulem conjecturas gerais sobre divisibilidade, fatoração, simetria, proporcionalidade e propriedades da multiplicação, produzindo justificativas matemáticas para sustentar essas generalizações.

As respostas esperadas dos estudantes são as apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1

Respostas esperadas dos estudantes

Generalizações esperadas		
Particularidade	Explicação	Exemplo
Diagonal principal formada por quadrados perfeitos embora alguns quadrados perfeitos também apareçam em outras posições da tabela.	Cada elemento da diagonal é $n \times n = n^2$	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
Simetria em relação à diagonal principal	O produto $a \times b$ é igual a $b \times a$, tornando a tabela simétrica.	$4 \times 7 = 7 \times 4 = 28$
Padrões nas diagonais secundárias	Diagonais paralelas à principal apresentam produtos com relações multiplicativas e crescimento não constante.	Ex.: 2, 6, 12, 20, 30, ...
Primeira linha e primeira coluna	Reproduzem a sequência dos Números Naturais.	1, 2, 3, 4, 5, ...
Cada linha e cada coluna é uma sequência de múltiplos	A linha e coluna n contém os múltiplos de n .	Linha e coluna 6, corresponde aos números $6n$, quando $n = 1$ até $n = 10$: 6, 12, 18, 24, 30, ...
Números primos aparecem apenas na primeira linha e primeira coluna	Um número primo possui apenas dois divisores, portanto não pode ser escrito como produto de dois naturais maiores que 1.	2, 3, 5, 7 aparecem somente nas bordas.

Alguns números compostos aparecem em várias posições	Cada decomposição em fatores entre 1 e 10 corresponde a uma posição na tabela; Os pares ordenados (a,b). e (b,a). ocupam posições simétricas.	24 aparece em 3×8 ; 4×6 ; 6×4 e 8×3 .
Dobrar uma linha dobra todos os valores	As linhas preservam proporcionalidade.	Linha 8 é o dobro da linha 4.
As diferenças entre termos consecutivos de uma linha e de uma coluna são constantes	Cada linha e coluna forma uma progressão aritmética.	Linha e coluna 7: diferença sempre igual a 7.
Retângulos formados na tabela representam produtos	A área de um retângulo de lados (a) e (b) corresponde ao produto $a \times b$.	Retângulo $5 \times 8 \rightarrow$ área 40.
Potências aparecem em padrões específicos	Cubos, quartas potências e outras potências podem ser identificadas pelas fatorações.	$64 = 8^2$ $64 = 4^3$ $64 = 2^6$
Mediação do professor - Possibilidades investigativas		
Por que todos os números da diagonal principal são quadrados perfeitos? Alguns desses números aparecem também fora da diagonal? Em quais posições e por quê? Por que os números primos aparecem apenas na primeira linha e na primeira coluna? Como descobrir quantas vezes um número aparece sem olhar toda a tabela? Quais números aparecem exatamente duas vezes? Quais aparecem quatro, seis ou mais vezes? Existe alguma relação entre o número de aparições e a quantidade de divisores? Que propriedades da multiplicação explicam a simetria da tabela?		

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor pode observar evidências relacionadas ao pensamento matemático dos estudantes, tais como: reconhecimento de padrões e regularidades; compreensão da propriedade comutativa da multiplicação; utilização de argumentos para justificar conjecturas; relações estabelecidas entre multiplicação, divisibilidade e fatoração; formas de representação utilizadas para explicar os resultados; dificuldades na produção de generalizações; capacidade de revisar conjecturas diante de novos exemplos; participação nas discussões matemáticas e uso de argumentos para validar conclusões.

Essas evidências subsidiam decisões pedagógicas durante a implementação da tarefa e fornecem elementos para o replanejamento de novas

atividades, caracterizando o processo de retroalimentação previsto pelo MIPATI.

A segunda tarefa investigativa articula os campos da Geometria e da Álgebra e é indicada para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, podendo também ser utilizada na formação inicial e continuada de professores de Matemática. A investigação parte de uma situação geométrica envolvendo a determinação do número de retas que podem ser traçadas a partir de um conjunto de n pontos, considerando que cada reta passa por exatamente dois pontos. A partir da construção de figuras, da organização dos resultados em uma tabela e da análise dos padrões obtidos, os estudantes são conduzidos à formulação de uma expressão algébrica geral que permite determinar o número de retas em função do número de pontos. Dessa forma, a tarefa favorece a articulação entre representações geométricas, regularidades numéricas e generalização algébrica.

O Planejamento seguiu as quatro dimensões do MIPATI:

- Demanda cognitiva. A tarefa situa-se predominantemente nos níveis 3 e 4 da classificação de Smith e Stein, pois não apresenta um procedimento previamente estabelecido para determinar a expressão geral. Os estudantes precisam explorar casos particulares, identificar regularidades, estabelecer relações entre representações geométricas e numéricas, formular conjecturas e justificar a expressão algébrica obtida. A elaboração da fórmula geral exige processos de abstração e generalização característicos do fazer Matemática.
- Investigação matemática. A investigação inicia-se pela construção das figuras correspondentes a diferentes quantidades de pontos, seguida da contagem do número de retas obtidas. Posteriormente, os estudantes organizam os resultados em uma tabela, identificam padrões de crescimento, formulam hipóteses para explicar essas regularidades, testam suas conjecturas em novos casos e produzem uma generalização algébrica válida para qualquer número de pontos. Ao final, espera-se que justifiquem matematicamente a expressão encontrada, relacionando-a ao número de diagonais de um polígono acrescido do número de lados.
- Mediação pedagógica. Durante a implementação, o professor deve evitar apresentar procedimentos prontos para obtenção da fórmula. Sua atuação concentra-se na proposição de questionamentos que estimulem a comparação entre diferentes representações, a identificação de regularidades e a justificativa das estratégias utilizadas. A mediação

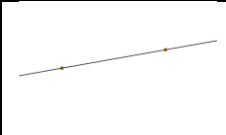
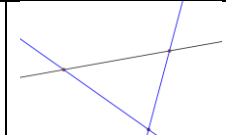
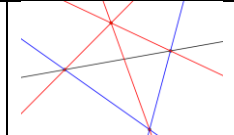
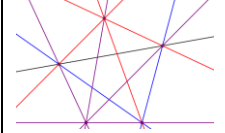
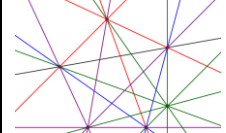
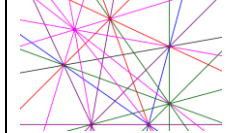
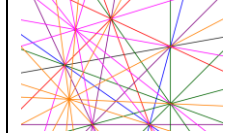
deve favorecer a socialização das diferentes soluções produzidas pelos estudantes e promover discussões que conduzam à institucionalização da expressão algébrica obtida.

Observe com Sentido. Durante o planejamento, são previstas possíveis estratégias de contagem, dificuldades em relacionar representações geométricas e algébricas, e erros que podem surgir no processo de generalização. Essas antecipações permitem que o professor interprete as produções dos alunos e decida sobre intervenções que favorecem a construção e validação da expressão geral.

Apresenta-se a segunda tarefa no Quadro 2.

Quadro 2

Números de Retas determinadas por dois pontos

Qual é o número de retas que se podem traçar em um gráfico de n pontos não colineares de tal forma que cada reta passe por dois pontos?									
Mediação professor		do Solicitar que realizem experimentalmente, traçando retas que passem por 1, 2,3,4,5,6,7,8 pontos							
									
									
Mediação professor		do Solicitar que preencham uma tabela com os resultados.							
Nº de Pontos		1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Retas		0	1	3	6	10	15	21	28
Respostas esperadas dos estudantes		- Perceber que cada novo ponto acrescenta exatamente $n - 1$ novas retas; - Reconhecer a sequência dos números triangulares (0, 1, 3, 6, 10, 15...); - Identificar que o crescimento não é constante, mas possui segunda diferença constante; - Construir a relação recursiva; - Obter a expressão geral; - Justificar geometricamente a fórmula, estabelecendo que relações entre essa sequência e o número de diagonais de um							

	polígono, reconhecendo que o número total de retas resulta da soma entre o número de lados e o número de diagonais.
Mediação do professor	Solicitar que os estudantes validem a expressão encontrada aplicando-a para valores de n ainda não representados graficamente e comparem os resultados obtidos com novas construções.
O número de retas (N) que se podem traçar, no caso de n pontos, se calcula somando n ao número de diagonais do polígono que se forma de n lados que é $\frac{n(n-3)}{2}$, logo: $N = n + \frac{n(n-3)}{2}$ $N = \frac{2n + n^2 - 3n}{2}$ $N = \frac{n^2 - n}{2} \text{ ou } N = \frac{n(n-1)}{2}$ Espera-se que os estudantes reconheçam que a expressão obtida representa um modelo matemático geral para o número de retas determinadas por n pontos, evidenciando a passagem da observação empírica para a generalização algébrica, característica central das tarefas investigativas de alta demanda cognitiva.	
Alguns questionamentos que podem orientar a mediação são: • O que acontece quando acrescentamos mais um ponto? • O número de novas retas cresce sempre da mesma maneira? • Como explicar esse crescimento? • Existe uma regularidade na sequência formada? • Como prever o número de retas sem desenhar a figura? • É possível construir uma expressão válida para qualquer quantidade de pontos? • Como justificar matematicamente essa expressão?	

Durante a implementação da tarefa, o professor pode observar como os estudantes organizam os dados obtidos, identificam regularidades, estabelecem relações entre as representações geométricas e algébricas, formulam conjecturas, justificam a expressão geral encontrada, revisam hipóteses diante de novos casos e comunicam seus argumentos matemáticos. Essas evidências permitem interpretar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes e fundamentar decisões pedagógicas durante e após a realização da tarefa.

Essas evidências subsidiam decisões pedagógicas durante a implementação da tarefa e fornecem elementos para o replanejamento de novas atividades, caracterizando o processo de retroalimentação previsto pelo MIPATI.

Análise comparativa das tarefas segundo o MIPATI

Apresenta-se no Quadro 3 a análise das duas tarefas propostas.

Quadro 3

Análise segundo o MIPATI

Dimensão	Tarefa 1 – Tabuada	Tarefa 2 – Números de Retas determinadas por dois pontos
Demanda cognitiva	Identificação de padrões, propriedades, conjecturas e generalizações (Níveis 3 e 4)	Generalização algébrica, abstração e elaboração da expressão geral (Níveis 3 e 4)
Investigação matemática	Exploração da tabela, identificação de regularidades, teste e validação de conjecturas	Exploração geométrica, formulação, teste, validação e generalização da expressão
Mediação pedagógica	Questionamentos, comparação de estratégias, discussão coletiva	Questionamentos, construção coletiva, comparação de representações e institucionalização
Observar com Sentido	Identificação de estratégias, interpretação dos raciocínios e decisões pedagógicas	Interpretação do pensamento algébrico, dificuldades, reformulação de intervenções e decisões pedagógicas

A análise comparativa evidencia que, embora pertençam a diferentes temas da Matemática, ambas as tarefas mobilizam as quatro dimensões do MIPATI. As especificidades de cada conteúdo modificam as estratégias investigativas e as evidências produzidas pelos estudantes, mas mantêm a integração entre demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e Observar com Sentido. Esses resultados reforçam o potencial do modelo para orientar o planejamento e a análise de tarefas investigativas em diferentes contextos da Educação Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo analisar como um modelo integrador pode orientar o planejamento e a análise de tarefas investigativas de alta demanda cognitiva em diferentes temas da Matemática. A articulação entre demanda cognitiva, investigação matemática, mediação pedagógica e competência de Observar com Sentido permitiu propor o Modelo Integrador para o Planejamento e a Análise de Tarefas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva (MIPATI), concebido como um referencial para subsidiar o planejamento, a implementação e a análise de tarefas matemáticas.

As análises das duas tarefas investigativas evidenciaram que o modelo é aplicável a diferentes conteúdos matemáticos e permite compreender o planejamento das tarefas como um processo dinâmico e contínuo. Na tarefa envolvendo a tabuada, destacaram-se processos investigativos relacionados à identificação de regularidades, à formulação de conjecturas e à construção de generalizações sobre propriedades dos números e da multiplicação. Na tarefa sobre a determinação do número de retas definidas por um conjunto de pontos, observou-se a articulação entre representações geométricas, padrões numéricos e generalização algébrica. Em ambas as situações, verificou-se que as quatro dimensões propostas pelo modelo atuam de forma integrada, evidenciando sua potencialidade para orientar tanto o planejamento quanto a análise das oportunidades de aprendizagem produzidas pelas tarefas.

Os resultados também reforçam que tarefas investigativas de alta demanda cognitiva não dependem exclusivamente de sua elaboração inicial. A preservação de altos níveis de demanda cognitiva requer mediações pedagógicas consistentes com os objetivos da pesquisa e exige que o professor mobilize a competência da Observação Significativa para interpretar as estratégias, dificuldades e formas de raciocínio dos alunos, bem como usar essas evidências para apoiar decisões didáticas e fornecer feedback sobre novos processos de planejamento.

A principal contribuição deste estudo consiste na proposição de um modelo integrador que reúne, em uma estrutura analítica coerente, referenciais consolidados da Educação Matemática que, tradicionalmente, têm sido discutidos de forma independente. Ao integrar planejamento da demanda cognitiva, processos investigativos, mediação pedagógica e desenvolvimento profissional docente, o MIPATI amplia as possibilidades de análise das tarefas matemáticas e oferece subsídios para pesquisas, para a formação inicial e continuada de professores e para o planejamento de ambientes de aprendizagem que favoreçam o desenvolvimento do pensamento matemático.

Embora o modelo tenha sido ilustrado por meio de duas tarefas pertencentes a diferentes temas da Matemática, sua estrutura teórica permite sua aplicação em outros conteúdos e níveis de ensino. Nesse sentido, pesquisas futuras poderão investigar sua utilização em contextos distintos da Educação Básica e da formação de professores, produzindo evidências empíricas que contribuam para seu refinamento e para a ampliação de suas possibilidades de utilização na pesquisa e na prática docente.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DA AUTORA

Claudia Lisete Oliveira Groenwald concebeu o estudo, realizou a revisão da literatura, definiu o referencial teórico e metodológico, elaborou o modelo integrador, analisou as tarefas investigativas, interpretou os resultados e redigiu integralmente o manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que embasam os resultados deste estudo serão disponibilizados pela autora para correspondência, mediante solicitação razoável.

AGRADECIMENTOS

A autora agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio à pesquisa, por meio da Bolsa de Produtividade em Pesquisa – Nível 1, fundamental para o desenvolvimento das investigações que subsidiaram a elaboração deste capítulo.

REFERENCES

- Coll, C. (1997). *Psicologia e currículo: Uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar* (2.^a ed.). Ática.
- Contreras, O. G., Groenwald, C. L. O., & Homa, A. I. R. (2022). Formação inicial de professores de matemática: Uma vivência pedagógica com atividades investigativas. *VIDYA*, 42(2), 147–164.
<https://doi.org/10.37781/vidya.v42i2.4237>
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae*, 13(1), 9–30.
- Groenwald, C. L. O., & Homa, A. I. R. (2021). Educación matemáticas y tecnologías: Planificación de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(63), 1–16.
- Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2019). Competencia docente de observar con sentido situaciones de enseñanza. *Paradigma*, 40, 29–46.
<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p29-46.id740>
- Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas.

Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2(2), e202202. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.29>

- Homa, A. I. R., Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2023). Tarefas matemáticas investigativas de alta demanda cognitiva. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16(42), 1–22. <https://doi.org/10.46312/pem.v16i42.18315>
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. da Ponte & L. Serrazina (Coords.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 109–132). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Llinares, S., Ivars, P., Bufor, À., & Groenwald, C. L. O. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo Jiménez, N. Climent Rodríguez, C. Fernández Verdú, & M. T. González Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177–192). Ediciones Universidad de Salamanca.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*.
- Penalva, M. C., & Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la educación secundaria. En J. M. Goñi (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 27–51). Graó.
- Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *UNIÃO: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 21, 13–30.
- Ponte, J. P. (2017). *Investigações matemáticas e investigações na prática profissional*. Editora Livraria da Física.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica.

- Seibert, L. G., Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2013). Observar com sentido: Uma competência importante na vida profissional do professor de Matemática. *Acta Scientiae*, 15(1), 133–152.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344–350. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344>
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488. <https://doi.org/10.3102/00028312033002455>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Sullivan, P., Askew, M., Cheeseman, J., Clarke, D., Mornane, A., Roche, A., & Walker, N. (2015). Supporting teachers in structuring mathematics lessons involving challenging tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 123–140. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9279-2>
- Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1>