Un estudio exploratorio sobre el aprendizaje de nociones conjuntistas por maestros en formación

Exploratory study about set notions learning for teacher in preparation

Mario José Arrieche Alvarado

RESUMEN

En este trabajo tratamos de caracterizar los principales elementos de los significados personales que los estudiantes para maestros de educación primaria atribuyen a las nociones conjuntistas básicas. Forma parte de un proyecto de investigación sobre el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros, por lo que incluimos una primera sección describiendo este problema didáctico, seguida del estado de la cuestión sobre la comprensión de nociones conjuntistas por estudiantes universitarios.

Palabras claves: significado personal, teoría de conjuntos, comprensión, maestros en formación.

ABSTRACT

In this paper we will try to characterize the main elements of personal meaning that elementary school student-teachers attribute to basic set notions. It is part of a research project about the role of set theory in teacher preparation; that is why we include a first section describing this didactic issue, followed by the state of concerning university students understanding set notions.

Key words: Personal meaning, Set theory, Understanding, Preservice Teachers.

1 Introducción

Este trabajo está enmarcado dentro del proyecto de investigación titulado «Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros» que está desarrollando el autor en el programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España). En una primera fase, hemos realizado un estudio

Mario José Arrieche Alvarado – Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela). E-mail: marrieche@ipmar.upel.edu.ve

exploratorio en un grupo de futuros maestros de primaria, con la finalidad de caracterizar los significados personales de estos estudiantes (interpretaciones personales, errores, dificultades de comprensión, etc.) con respecto a nociones básicas de la teoría de conjuntos. Esta información nos parece necesaria para la toma de decisiones sobre la orientación del currículo y la identificación de los puntos críticos del proceso de enseñanza y aprendizaje correspondiente.

Usamos la noción de significado personal en el sentido dado por Godino y Batanero (1994,1998) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Estas manifestaciones indicarán los aprendizajes logrados, así como las respuestas erróneas, juzgadas desde el punto de vista institucional, y que son indicativas de las dificultades y conflictos cognitivos de los sujetos en el estudio del tema. En nuestro caso las tareas que vamos a proponer involucran las nociones básicas de la teoría de conjuntos siguientes: conjunto, subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío, conjunto unitario, intersección, unión, complementario, producto cartesiano y las definiciones simbólicas de estos conceptos.

En este artículo presentamos de forma sucinta el planteamiento del problema, algunos antecedentes de los aspectos cognitivos sobre nociones conjuntistas, la metodología empleada, el análisis e interpretación de los datos más relevantes recabados en la investigación y las conclusiones.

2 El planteamiento del problema

La interpretación que hacen los propios matemáticos del cálculo infinitesimal, genera en ellos el querer utilizar la sistematización y el el rigor, reestructurar las definiciones básicas y criticar los primeros principios; preparándose de esta manera el escenario para la aparición de la teoría de conjuntos (Gonzalez, 1995).

La importancia de la teoría de conjuntos dentro de la propia matemática como lenguaje unificador de distintas ramas de las matemáticas hizo que en la reforma de la enseñanza de la matemática, conocida como matemática moderna, se diera más énfasis a estos contenidos en los currículos de enseñanza secundaria e incluso primaria en la década de los 60 y 70.

El currículo diseñado sobre matemática moderna tuvo una gran difusión internacional. Pero a partir de la década de los 80 se comienza a hablar del «fracaso de la matemática moderna». Es de hacer notar que, a pesar de la importancia que la teoría de conjuntos ha tenido en los diferentes niveles educativos, se produjeron fuertes críticas a su enseñanza en secundaria y primaria por prestigiosos matemáticos de la época, tales como: Feynman (1965), Kline (1973), Freudenthal (1983), etc.

Como consecuencia de estas críticas se logra que se supriman los contenidos de la teoría de conjuntos en estos niveles. Sin embargo, queda, como problema didáctico abierto el estudio del papel que la teoría de conjuntos debe desempeñar en los planes de formación en distintas especialidades universitarias, y en particular, en la formación de maestros de educación primaria.

La pregunta inicial que motivó nuestra investigación fue, *¿cuál es el papel que debería desempeñar el estudio de los conjuntos, aplicaciones y relaciones en la formación de los maestros?.* Puesto que en los últimos diseños curriculares se ha suprimido la teoría de conjuntos de la educación primaria, estamos tentados a responder que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de los maestros debe ser nulo, dado que no tienen que enseñar esos contenidos. Esto implica que podemos prescindir del lenguaje de los conjuntos, aplicaciones y relaciones cuando los maestros estudien los sistemas numéricos, la geometría y las magnitudes, y otros contenidos matemáticos que requieren de estos conceptos para ser estudiados. Pero nos queda la duda si con esa opción drástica creamos una barrera para que los maestros puedan ampliar sus conocimientos matemáticos sobre temas algo más avanzados que los que se supone tendrán que explicar en el ejercicio de su profesión. También nos parece que podemos privarles de un recurso potente para articular los distintos contenidos del curriculo.

Para tomar una decisión fundada es necesario disponer de información que no está directamente accesible y, por tanto, requiere investigación. Esa información debe permitir responder con fundamento a preguntas más específicas como las siguientes:

1) ¿Qué es la «teoría de los conjuntos»? ¿Qué formulaciones se han hecho de dicha teoría matemática en distintos períodos y circunstancias? ¿Qué papel desempeña en la matemática? ¿Qué papel puede desempeñar en las matemáticas escolares? (*problemática epistémica*, esto es, relativa al conocimiento matemático).
2) ¿Qué dificultades de comprensión tienen los distintos contenidos que configuran la teoría de conjuntos para futuros maestros en formación? ¿Cuáles son los motivos de tales dificultades? (*problemática cognitiva*).

En esta primera etapa intentaremos dar respuesta a esta última pregunta mediante una investigación experimental, consistente en la elaboración de un cuestionario sobre nociones básicas conjuntistas y su aplicación a un grupo de 122 maestros en formación, tras el estudio del tema en un curso universitario.

3 Antecedentes

En esta sección describiremos brevemente investigaciones realizadas con maestros en formación sobre aspectos cognitivos relativos a nociones conjuntistas, presentados en los trabajos de Linchevski y Vinner (1988), Zaskis y Gunn (1998); y Fischbein y Baltsan (1999).

Linchevski y Vinner (1988) estudiaron cuatro aspectos del concepto de conjunto en 309 maestros y estudiantes para maestros, que consisten en: a) el conjunto como una colección arbitraria de objetos, b) la colección formada por un objeto como un conjunto, c) el conjunto como elemento de otro conjunto; y d) el orden de los elementos de un conjunto y el problema de los elementos repetidos.

Los resultados revelaron que el concepto ingenuo de conjunto en estos maestros, difiere del concepto matemático. La mayoría de estos sujetos creen que los elementos de un conjunto dado tienen una propiedad común, que un conjunto no puede ser elemento de otro conjunto y que los elementos repetidos de un conjunto deben contarse por separado. Además, casi la mitad de las personas rechazaron que la colección formada por un sólo objeto es un conjunto.

Zazkis y Gunn (1997) investigaron la comprensión de los conceptos básicos introductorios de la teoría de conjuntos: conjunto, elemento de un conjunto, cardinalidad, subconjunto, y el conjunto vacío, en un grupo de maestros en formación. Revelaron en sus resultados complejidades en la comprensión de los estudiantes, sobre todo cuando los elementos de un conjunto son a la vez conjuntos. Se prestó atención especial a la descripción de las dificultades mostradas por los estudiantes con el concepto del conjunto vacío.

Fischbein y Baltsan (1999), en una investigación realizada sobre «el concepto matemático de conjunto y el modelo colección», analizaron los diferentes conceptos erróneos sostenidos por los estudiantes con respecto al concepto matemático de conjunto, entre los que se encontraban un grupo de maestros en formación. En los resultados obtenidos se mostraron en los estudiantes las siguientes interpretaciones: a) un conjunto es una colección que tiene una propiedad común, b) los elementos de un conjunto son números, c) un conjunto debe poseer un número mínimo de elementos, d) no aceptaron la posibilidad de que un conjunto pueda consistir en un sólo elemento, e) no aceptan la existencia de un conjunto vacío, f) dos conjuntos son iguales si tienen el mismo número de elementos; y g) contaron separadamente los elementos repetidos en los conjuntos.

4 Metodología

4.1 Enfoque metodológico

Desde el punto de vista metodológico, la investigación puede clasificarse en los métodos centrados en la enseñanza y en el aprendizaje de los alumnos. Al respecto, consideramos que abordamos el primer tipo de estudio ya que estamos interesados en la enseñanza de un contenido matemático (teoría elemental de conjuntos) y el segundo, porque realizaremos una prueba de evaluación a unos estudiantes con la finalidad de determinar lo aprendido, las dificultades y los errores cometidos en los conceptos básicos del tema enseñado.

Resaltamos que para investigar los significados personales de los estudiantes con respecto a las nociones básicas de la teoría de conjuntos utilizamos principalmente el enfoque cuantitativo, determinando los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas a las preguntas de un cuestionario. Por otro lado, y puesto que el enfoque cuantitativo nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el por qué de la misma, vamos a complementar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo.

Este estudio incluye el análisis de los errores de las respuestas al cuestionario y un estudio de casos mediante entrevista clínica, que nos va a permitir caracterizar con más rigor las dificultades y grado de comprensión logrado por los estudiantes de nuestra muestra.

4.2 Población y muestra

La población objeto de estudio, serán los estudiantes de primer año del programa de Formación de Maestros. La muestra ha sido tomada en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. El estudio se realizará con uno de los grupos de la asignatura Matemática y su Didáctica (primer curso), formado por 122 alumnos, correspondiente al mencionado programa.

Cabe destacar que el proceso instrucional desarrollado en este estudio se inició en Octubre de 1998 mediante la observación participante de las 9 sesiones de clase sobre el tema «teoría de conjuntos, relaciones y funciones" del mencionado curso. Es decir, aproximadamente durante tres semanas el investigador actúa en las clases como observador y algunas veces como profesor, con el propósito de no ser una persona extraña a los alumnos y al proceso de enseñanza y aprendizaje que se estaba desarrollando. Por otra parte, la metodología utilizada por el profesor consistía en una clase magistral, complementada con el uso de unos apuntes sobre el tema en cuestión, seleccionados por los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática. Se complementó con la resolución y discusión colectiva de ejercicios en clase por parte de los alumnos bajo la orientación de los profesores.

4.3 Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de recogidas de datos utilizados en esta investigación fueron el cuestionario y un guión de entrevista clínica.

El cuestionario estaba formado por 7 ítems conteniendo en total 25 subitems con la finalidad de determinar lo aprendido, los errores y las dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión de estos contenidos. Se trataba de preguntas de respuestas abiertas donde el alumno tiene, o bien que definir conceptos, efectuar operaciones, argumentar la verdad o falsedad de proposiciones, realizar comprobaciones y demostraciones o resolver problemas. En las preguntas realizadas, se hizo más énfasis en las nociones básicas de la teoría de conjuntos (sólo se destinaron dos preguntas sobre relaciones y aplicaciones). A continuación mostramos los ítems del cuestionario sobre nociones de la teoría de conjuntos que consideramos más relevantes (comprenden los 4 primeros ítems del cuestionario):

1. *Define con tus propias palabras los siguientes conceptos.*

   a) Subconjunto; b) Intersección de conjuntos; c) Complementario de un conjunto; d) Aplicación; y e) Relación de equivalencia

2. *Completa las expresiones dadas a continuación según el siguiente modelo:*

   $x \in A - B \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$

   a) $x \in (A \cup B)$ b) $x \in A^C$
   c) $(x,y) \in AxB$ d) $x \notin (A \cap B)$

Recuerda los siguientes convenios:

$\wedge$ *significa la conjunción y ;* $\vee$ *significa la disyunción o*

A^C *significa el conjunto complementario de A.*

3. *Para cada una de las siguientes proposiciones escribe una V si consideras que es Verdadera y F si es Falsa:*

   a) $A \in A$ b) $\varnothing \subset A$
   c) $x \in \{x\}$ d) $\varnothing \in \varnothing$
   e) $A \subset A$

   En cada caso, explica tu respuesta.

4. *a) Comprueba la proposición:*

   $A \cap B^C = A - B$

b) Demuestra la proposición anterior.

Por otro lado, la entrevista fue realizada a dos estudiantes, después de haber obtenido los resultados de la prueba escrita, seleccionados de tal manera que fueran receptivos, colaboradores y comunicativos. El propósito fundamental de la entrevista era el de profundizar en los aspectos que no quedaron claros en las respuestas al cuestionario y complementar la información de algunas cuestiones que no fueron consideradas en el mismo.

5 Análisis e interpretación de los datos

Hemos clasificado las respuestas elaboradas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas y respuestas en blanco (cuando el alumno no responde o su respuesta es insuficiente para entender su significado).

Con el propósito de describir las características de los significados personales con respecto a la teoría de conjuntos de los futuros maestros, en esta sección, presentamos los propósitos y el análisis de contenido de cada ítem de la prueba considerando los tipos de respuestas correctas. Además describiremos los resultados globales de la prueba con ejemplos de respuestas parcialmente correctas e incorrectas, mediante tablas de frecuencias y porcentajes de respuestas de cada uno de los ítems con sus respectivas interpretaciones.

A manera de ilustración en este trabajo sólo describiremos el análisis realizado al ítem Nº 3. No obstante, en Arrieche (2000) se puede ver el tratamiento realizado al resto de los ítems que conformaron la prueba.

El propósito del ítem 3 es observar en el futuro maestro la habilidad para reconocer, en una expresión conjuntista, algunas propiedades de los subconjuntos y el uso de los conceptos : elemento de un conjunto, conjunto vacío y conjunto unitario.

Consideramos que la respuesta es correcta cuando los estudiantes explican razonadamente su respuesta de acuerdo con el concepto correspondiente. Las respuestas correctas tipo se dan a continuación:

3a) $A \in A$, falsa. Un conjunto no puede ser elemento de él mismo.

3b) $\varnothing \subset A$, verdadera. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto (propiedad de subconjunto).

3c) $x \in \{x\}$, verdadera. EL único elemento del conjunto $\{x\}$ es x.

3d) $\varnothing \in \varnothing$, falsa. El conjunto vacío no posue elementos (También es válida la misma justificación de 3.a)

3e) $A \subset A$, verdadera. Todo conjunto es subconjunto de él mismo (propiedad de subconjunto).

Las respuestas parcialmente correctas ocurren cuando el estudiante acierta la veracidad de la proposición, pero su explicación no es clara o es incompleta, como en los siguientes ejemplos:

Alumno 2 (Item 3a) $A \in A$ "F. Porque un conjunto no puede a otro conjunto".

Alumno 20 (Item 3b) "$\varnothing \subset A \Rightarrow V$. Es verdadera puesto que el elemento vacío siempre está integrado o forma parte de un conjunto. todos los conjuntos cuentan con él.

$A = \{1\}\ \{2\}\ \{3\}\ \{\varnothing\}$"

Alumno 4 (Item 3c) "$x \in \{x\} \Rightarrow V$; x puede existir en el conjunto formando parte de él."

Alumno 2 (Item 3d) $\varnothing \in \varnothing$. "F. Por que es un subconjunto vacío".

Alumno 22 (Item 3e) "$A \subset A \Rightarrow$ verdadero. Ya que todos los elementos de A estan incluidos en A".

Las respuestas incorrectas se dan cuando se cometе algunos de los errores que se describen a continuación.

Errores conceptuales: Se presentan cuando el estudiante muestra en la explicación de su respuesta un claro desconocimiento de la definición del concepto correspondiente, como en los siguientes ejemplos:

Alumno 4 (Item 3a) "$A \in A \Rightarrow$ Falso. Porque para que $A \in A$, debería ser A un subconjunto o A^C de A".

Alumno 5 (Item 3c) "$x \in \{x\} \Rightarrow V$; porque un conjunto x puede tener un elemento $\{x\}$".

Alumno 4 (Item 3d) "$\varnothing \in \varnothing \Rightarrow F$, el conjunto vacío es igual a $A \cup A$ pero $\varnothing$ no exite en otro conjunto vacío".

***No reconoce la propiedad o la aplica incorrectamente*:** Se presentan en las respuestas que el alumno da a las proposiciones verdaderas que contienen el enunciado de una propiedad, utilizando argumentos incorrectos:

Alumno 6 (Item 3b) $\varnothing \subset A$. " Falso. Conjunto vacio no puede ser un subconjunto de A".

Alumno 3 (Item 3e) "$A \subset A$ F, porque A no esta incluido en A".

Otras respuestas no clarificadas: aquí agruparemos todas aquellas respuestas que no puedan clasificarse en las anteriores categorías o que sean difíciles de interpretar.

En la tabla 1 presentamos la frecuencia de la respuesta a la distinta opción del ítem 3, las cuales son analizadas a continuación:

Tabla 1 – Frecuencia y porcentaje de respuesta en el ítem Nº 3.

Tipos de respuesta	Item 3a		Item 3b		Item 3c		Item 3d		Item 3e	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correctas	26	21,3	67	54,9	26	21,3	18	14,8	55	45,1
Parcialmente Correctas	11	9,0	10	8,2	8	6,6	13	10,7	7	5,7
Incorrectas	85	69,7	45	36,9	90	72,1	69	74,5	38	49,2
Total	122	100,0	122	100,0	122	100,0	122	100,0	122	100

1) En el ítem 3a, un 21,3% de los estudiantes respondieron correctamente y sólo un 9% respondieron parcialmente correcto, es decir, acertaron la veracidad de la proposición pero su explicación no es clara o es incompleta. Lo que parece indicar la dificultad que presenta para los estudiantes el dominio del concepto de elemento de un conjunto, que le permite explicar correctamente la veracidad de esta proposición. También cabe destacar que el 69,7% de los sujetos respondieron de forma incorrecta, lo cual indica lo difícil que resultó ser esta pregunta.

2) En el ítem 3b, el 54,9% de los sujetos respondieron correctamente y el 8,2% responde parcialmente correcto. Sin embargo, a pesar de este resultado el 36,9% de los estudiantes respondieron incorrectamente. Lo que parece demostrar que la pregunta sobre la propiedad de subconjunto Æ Ì A, resultó ser un poco fácil.

3) En el ítem 3c, sobre el concepto de conjunto unitario resultó ser casi igual de difícil que el ítem 1a, pues el 21,3% de los estudiantes respondieron correctamente y sólo el 6,6% respondieron parcialmente correcto. Por otra lado, se destaca que el 72,1% de los sujetos respondieron incorrectamente.

4) En el ítem 3d, los resultados muestran que éste resultó ser más difícil que todos los subítems que conformaron el ítem Nº3, ya que sólo un 14,8% de los estudiantes respondieron de forma correcta sobre el concepto de conjunto vacío y el 10,7% lo hacen de forma parcialmente correcta. Lo que parece indicar la seria dificultad que presentó para los sujetos el dominio del concepto o los conceptos que les permitía explicar correctamente su respuesta. Cabe destacar también que el 74,5% de los estudiantes respondieron incorrectamente, los cuales representan las tres cuartas partes de los alumnos que hicieron la prueba.

5) En el ítem 3e, un 45,1% de los estudiantes respondieron correctamente, un 5,7% respondieron parcialmente sobre la propiedad de subconjunto AÌA. Esto parece demostrar la dificultad de la propiedad enunciada en dicha proposición. También es notorio que el 49,2% de los estudiantes respondieron incorrectamente, lo cual indica que la pregunta resultó ser difícil, aunque con menor grado de dificultad que el de los ítems anteriores, excepto el ítem 3b.

En resumen el orden de dificultad de mayor a menor de las preguntas del ítem 3 fue el siguiente: conjunto vacío, conjunto unitario, elemento de un conjunto y propiedades de subconjunto.

6 Conclusiones

En este apartado presentamos los resultados más relevantes obtenidos en el cuestionario y en la entrevista personal realizada a dos estudiantes, y las principales conclusiones del estudio.

- La prueba en general ha sido difícil para los alumnos, ya que en algunos ítems no llega al 1% el número de respuestas correctas y el número medio de respuestas ha sido 7,7 sobre un total de 25 preguntas. El máximo número de preguntas respondidas correctamente fue 20, de modo que ningún alumno hizo el examen totalmente correcto.

- El mayor número de errores conceptuales aparecen en los conceptos de subconjunto, elemento de un conjunto, conjunto vacío y conjunto unitario. Estos resultados, concuerdan con los obtenidos en las Investigaciones realizadas por Linchevski y Vinner (1988), Zaskis y Gunn (1997); y Fischbein y Baltsan (1999).
- Imprecisión en las definiciones de los conceptos, que indican una comprensión insuficiente.
- No reconocimiento o aplicación incorrecta de propiedades del conjunto vacío, subconjunto, de las relaciones y de las aplicaciones.
- En el curso de la entrevista los alumnos ratifican la deficiencia mostrada al interpretar los conceptos de conjunto vacío, conjunto unitario y elemento de un conjunto, y el uso del procedimiento correcto para demostrar la igualdad de dos conjuntos.

Como principales aportaciones de esta fase de nuestra investigación destacamos:

- La identificación de aspectos conflictivos en la comprensión de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, que complementan los resultados obtenidos por otros investigadores.
- Se han identificado aquellas nociones que requieren una mayor atención por parte del docente y de los discentes, en particular los conceptos de subconjunto y conjunto vacío.

En síntesis proporcionamos información a los profesores y a los autores del material curricular de algunos puntos críticos del proceso de estudio de la teoría de conjuntos y de elementos a tener en cuenta en la evaluación de los aprendizajes.

Referencias

Arrieche, M. (2000). *Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros: Un estudio exploratorio de aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos*. Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Feynman, R (1965). New texsbooks for the new mathematics. *Engineering and Sciense, 28: 9-15.*

Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the collection model. *Educational Studies in Mathematics*, 37: 1-22.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

González, F. (1995). *La matemática: Una excursión hacia su objeto y su método*. Maracay: Opiher, impresión off-set.

Kline, M. (1973). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1978.

Linchevski, L. y Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers. *Proceedings of the 12th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 11: 471-78.

Zazkis, R. y Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (1): 133-169.