ACTA SCIENTIAE
ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5013

A Consolidação das Regras de Sinais e as Etapas do Espírito Científico em Bachelard

Selma Felisbino Hillesheim[a]
Méricles Thadeu Moretti[a]

[a] Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), Florianópolis, SC, Brasil.

Recebido para publicação em 21 jan. 2019. Aceito, após revisão, em 19 jun. 2019.
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

RESUMO

Este artigo analisou a trajetória histórica da consolidação da regra de sinais na perspectiva epistemológica de Gaston Bachelard, bem como os obstáculos epistemológicos que ainda persistem no processo de ensino e aprendizagem dessa regra na atualidade. A sua consolidação foi um processo lento e surpreendente, marcada por avanços e retrocessos. Propusemos, nesse movimento, a presença dos três estados do espírito científico: concreto, concreto-abstrato e o abstrato. Veremos que os dois primeiros estados relacionados ao desenvolvimento das regras dos sinais ainda são muito presentes nas ações pedagógicas e no ensino dessas regras. Entretanto, estudos vêm apontando que o ensino dessa regra pela via formal, evitando as metáforas presas a exemplos concretos, pode favorecer a passagem do espírito concreto para o concreto-abstrato, alcançando, finalmente, o estado abstrato do espírito científico.

Palavras-chave: Etapas do espírito científico; Regra de sinais; Ensino e aprendizagem dos negativos.

The Consolidation of the Rule of Signs and Bachelard's Scientific Spirit

ABSTRACT

The purpose of this paper is to analyze the historical path of the consolidation of the rule of signs from Gaston Bachelard's epistemological perspective, as well as explore the epistemological obstacles still present in the teaching and learning processes of such rule nowadays. The consolidation was a slow and surprising process, marked by advances and setbacks. We suggest herein the presence of three scientific stages of mind: concrete, concrete-abstract, and abstract. It is possible to realize that the two first stages related to the development of the rule of signs are still very present in pedagogical activities and teaching. However, some studies have been indicating that teaching such rule formally, i.e. avoiding metaphors related to concrete examples, can stimulate the transfer from the concrete to the concrete-abstract spirit, and later on to the abstract state of scientific spirit.

Keywords: Stages of the scientific spirt; Rule of signs; Teaching and learning negative numbers.

Autor correspondente: Selma Felisbino Hillesheim. E-mail: selmafh@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

O ensino da regra de sinais dos números inteiros relativos enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos. A dificuldade enfrentada pelos estudantes na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos nos desafiou a investigar os obstáculos encontrados pelos matemáticos no decorrer do processo histórico da consolidação dessa regra e que ainda permanecem no ensino atual. Essa epistemologia foi eleita, dentre tantas, porque Bachelard vai estudar a fundo a origem dos obstáculos epistemológicos que são encontrados nos primeiros estágios do conhecimento e suas relações com as práticas pedagógicas.

O conhecimento é concebido por Bachelard (1996) como uma reforma de uma ilusão, ou seja, o que conhecemos sempre se dá contra um conhecimento anterior; por isso, para ele, não existem verdades eternas. As verdades são provisórias e construídas a partir dos erros e, portanto, elas se encontram em um processo de movimento constante. Nessa perspectiva, o erro assume um papel importante na construção do conhecimento científico.

Bachelard (1996) introduz o conceito de obstáculos epistemológicos e mostra que eles impedem o avanço do espírito científico. Tanto o conhecimento comum fundamentado no real dado, no empirismo das primeiras impressões, quanto o conhecimento científico amparado no racionalismo, se tomados num extremo, funcionam como um obstáculo epistemológico ao conhecimento científico. O espírito científico deve ser dialético e é importante e indispensável que ocorra uma alternância entre o empirismo e o racionalismo, pois essas doutrinas estão ligadas, elas se complementam. Para Bachelard (1978), pensar cientificamente é colocar-se no campo epistemológico intermediário entre esses dois polos.

Pretendemos, neste artigo, analisar o movimento do processo histórico da consolidação da regra de sinais relacionando-o com os três estados do espírito científico, que, de acordo com Bachelard (1996), são: concreto, concreto-abstrato e abstrato. Com relação ao processo de ensino e aprendizagem dessa regra, permanece um grande desafio, pois muitos obstáculos epistemológicos conservam-se no tempo presente para nossos alunos. O ensino desses números arraigados a exemplos concretos são muito confortáveis para abordar a adição; entretanto, esse mesmo exemplo prático cai por terra, quando a multiplicação de dois números negativos é apresentada: um débito somado a outro débito torna-se um débito ainda maior (– + – = –). Contudo, como explicar que certo débito multiplicado por outro, torna-se crédito (– × – = +)?

ELEMENTOS EPISTEMOLÓGICOS DE GASTON BACHELARD

Para Bachelard (1996), o espírito científico, em sua formação individual, passa obrigatoriamente pelos estados concreto, concreto-abstrato e abstrato. No estado concreto, o espírito ocupa-se com as primeiras imagens do fenômeno e se ampara numa filosofia que exalta a natureza. No estado concreto-abstrato, o espírito acresce os esquemas geométricos à experiência física. Por fim, no estado abstrato, o espírito acolhe informações desligadas da intuição, da experiência imediata e, até certo ponto, em contradição com a realidade primeira. Assim, o caminho que garante o avanço do conhecimento humano não passa apenas pela indução, mas é uma construção da mente do homem e tende a se tornar cada vez mais racional e abstrato.

É no interior do ato de conhecer que aparecem as lentidões e as conturbações do fazer científico. O conhecimento do real nunca é imediato e pleno; ele torna-se claro quando os argumentos ficam estabelecidos. A verdade é encontrada ao se reaver o passado de erros num autêntico arrependimento intelectual; ela deixa de ser pensada como instância que se alcança em definitivo. Não existe mais verdade, mas existem verdades múltiplas, plurais, históricas. "No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização" (Bachelard, 1996, p.17). Dessa maneira, a ciência opõe-se definitivamente à opinião. Não se pode basear nada na opinião; antes, ela precisa ser inutilizada. Isso porque: "A opinião pensa mal; não pensa: traduz necessidades em conhecimentos. Ao designar os objetos pela utilidade, ela se impede de conhecê-los" (Bachelard, 1996, p.18). Assim, a opinião deve ser um dos primeiros obstáculos a ser superado.

A noção de obstáculo epistemológico abrange aspectos do desenvolvimento histórico do pensamento científico. Bachelard (1996), ao estudar o conceito de obstáculo epistemológico no âmbito da história da ciência, percebeu que alguns conhecimentos chegam mesmo a impedir o progresso do saber, criando barreiras e obstruindo o conhecimento científico. Frente a essa situação, o filósofo francês procura romper com as amarras do conhecimento pré-científico e impulsiona o desenvolvimento científico, contribuindo, significativamente, com o pensamento científico abstrato. Sua repercussão pode ser percebida nas mais variadas linhas de pesquisa científica no estreitamento das relações entre a epistemologia e a educação matemática, principalmente.

A história da matemática tem sido utilizada nos contextos de ensino. Contudo, a ideia de analisar o conhecimento matemático numa perspectiva histórica, com o intuito de obter algumas luzes de como se dá o processo de construção desse conhecimento, ainda é muito tímida (Igliori, 2008, p.125). É com esse olhar "tímido" que nos propomos, agora, a analisar a trajetória histórica da consolidação da regra de sinais, pensando na perspectiva de Bachelard da formação do espírito científico e seus estados concreto, concreto-abstrato e abstrato.

UM OLHAR BACHELARDIANO SOBRE O PROCESSO HISTÓRICO DA CONSOLIDAÇÃO DA REGRA DE SINAIS

A trajetória histórica do conceito de número negativo foi marcada por muita hesitação, num processo lento e surpreendente (Glaeser, 1981). A origem da regra de sinais "- × - = +" é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria, ainda no 3º século

d. C., que não faz nenhuma referência aos números relativos. Porém, em seu Livro I *Aritmética,* ele menciona: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (Diofanto, 2007, p.22).

O contexto da consolidação dessa regra apresenta-se de diferentes formas no cenário global. Ela foi um grande desafio para diversos povos da antiguidade e que veio se arrastando até o século XVII. Durante todo esse percurso do desenvolvimento do espírito científico, muitos obstáculos foram sendo superados. O primeiro deles, de acordo com Bachelard (1996), foi o estado concreto em que o espírito fica preso às primeiras imagens, ocupa-se com exemplos práticos que podem ser encontrados na natureza, como podemos perceber nas explicações apresentadas por Simon Stevin em 1634. Esse matemático propôs, na sua "Aritmética", uma demonstração da regra de sinais. Vejamos:

> Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos. Explicação do dado: Suponhamos 8 – 5 multiplicado por 9 – 7 da seguinte maneira: – 7 vezes – 5 são + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, – vezes – dá +). A seguir – 7 vezes 8 faz – 56 (- 56, porque, como é dito no teorema, - por + dá -). E semelhante seja 8 – 5 multiplicado por 9, & darão produtos 72 – 45; depois adicione + 72 + 35, são 107. Depois, adicione os – 56 – 45, são 101; e subtraindo o 101 de 107 resta 6, para o produto da tal multiplicação. Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que + multiplicado por + dá mais, & que – por – dá +, & que + por -, ou – por + dá -. Demonstração. O número a multiplicar 8 – 5 vale 3, & o multiplicador 9 – 7 vale 2. Mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6. Logo o produto acima também 6, é o produto verdadeiro. Mas o valor encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto +, & - por – dá produto +, & + por -, ou – por + dá produto -, logo o teorema é verdadeiro.

$$\begin{array}{r} 8-5 \\ 9-7 \\ \hline -56+35 \\ 72-45 \\ \hline 6 \end{array}$$

(Glaeser, 1981, p.312)

A história da matemática grega nos aponta que o conceito de número negativo não foi registrado nesse período. De acordo com Pontes (2010), uma das características da matemática grega era a sua persistência com as rigorosas demonstrações, alcançando uma existência independente. O forte apego que os gregos apresentavam com a geometria impossibilitou-os de ousarem em considerar os negativos como números, pois

> [...] para quem a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria,

> incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideravam os negativos não exatamente como números. (Kasner & Newman, 1968, *apud* Medeiros & Medeiros, 1992, p.51)

Na Europa, com a expansão do comércio, o interesse pela matemática na Idade Média se espalhou vagarosamente. Os homens práticos estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação. Desejos que foram influenciados diretamente pelo crescimento das cidades mercantis (Struik, 1992). O uso dos números negativos passou a ser admitido com a expansão das relações financeiras no comércio, o que favoreceu o aparecimento de uma estrutura de crédito. A ideia de tirar 7 de 5 apresentava um aspecto milagroso, assim

> [...] foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente absurda subtração 5 menos 7 tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5. (Singh, 1972, *apud* Medeiros & Medeiros, 1992, p.52)

Nesse contexto, o número negativo acabou sendo usado com finalidades contábeis. No entanto, segundo Medeiros & Medeiros (1992), apesar de útil, a ideia dos negativos, associada a um débito, não era satisfatória e não preenchia o requisito matemático da metáfora, principalmente quando se tratava da regra dos sinais.

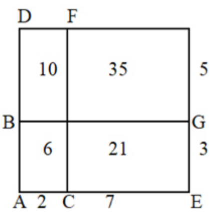
Em todos esses ensaios de demonstrações para a regra de sinais, o espírito se encontrava preso a exemplos concretos que, geralmente, são fontes de enganos, de erros. No entanto, o conhecimento científico, na visão de Bachelard, se estrutura na superação desses erros que colaboram para que o espírito científico possa avançar na ruptura do que se pensava ser conhecido. Desse modo, no estágio ulterior ao estágio concreto, alguns sinais de generalizações começam a aparecer, mas o espírito se encontra perturbado e confuso num processo de desprendimento do real e das primeiras impressões.

No estado concreto-abstrato, os esquemas geométricos foram acrescentados às experiências. Essa geometrização, para Bachelard (1996, p.7), se encontra "a meio caminho entre o concreto e o abstrato", partindo do que é visível para o que é invisível e alcançado apenas pelo raciocínio formal.

> Quando se consegue formular uma lei geométrica, realiza-se uma surpreendente inversão espiritual, viva e suave como uma concepção; a curiosidade é substituída pela esperança de criar. Já que a primeira representação geométrica dos fenômenos é essencialmente uma ordenação, essa primeira ordenação abre-nos as perspectivas de uma abstração alerta e conquistadora [...]. (Bachelard, 1996, p.8)

Porém, nesse estágio, o espírito ainda se encontra em conflito. Isso pode ser percebido na demonstração geométrica apresentada por Stevin:

> Suponhamos AB 8 – 5 (a saber AD8 – DB5). Depois AC9 – 7 (a saber AE9 – EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 – EF56 – DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB. Conclusão. Logo, mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar.



(Glaeser, 1981, p.312)

O exemplo de Stevin nos mostra como a geometria oferece apoio à aritmética, contribuindo para a comprovação de que a regra funciona. No entanto, observamos que nesse período histórico a regra “– × – = +” só é usada como um procedimento transitório.

Laplace também não obteve sucesso na sua justificativa para a regra de sinais, que, em alguns aspectos, se parecia com a de Euler. E, também, não consegue propor uma extensão formal para os números relativos. Vejamos como Laplace apresenta a justificação da regra de sinais:

> (A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: temos apenas que conceber que o produto de –a por –b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar essa identidade sensível, nós observamos que o produto de –a por +b é – ab (visto que o produto é –a repetido tantas vezes que quando tem unidades em b). Observamos em seguida que o produto de – a por b – b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim o produto de – a por + b é – ab, o produto de – a por – b deve ser de sinal contrário ou igual à + ab para o destruir. (Glaeser, 1981, p.333)

Outro exemplo, que pode ser apresentado como ilustração da conturbação provocada no espírito no estágio concreto-abstrato, é a resolução das equações cúbicas. Sempre que as três raízes de uma equação são reais e diferentes de zero, a fórmula de Tartaglia-Cardano (1501–1576) leva ao cálculo de uma raiz quadrada negativa. Então, um novo tipo de número começa a aparecer: os negativos. Nesse contexto, aparece a figura de um algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526-1573), que teve a ideia dos imaginários conjugados. Porém, as observações de Bombelli não contribuíram na resolução efetiva das cúbicas, entretanto, Bombelli apontou o papel importante que os imaginários conjugados iriam desempenhar futuramente (Boyer, 2010).

No final do século XVII, segundo Glaeser (1981), inicia-se uma mudança na questão da aceitação dos números negativos marcada por Colin MacLaurin. Ele passa a entender o número como uma ação e não mais como um estado e apresenta uma justificação para a regra de sinais, utilizando a distributividade da multiplicação em relação à adição. Sua dedução contribuiu para o início de um formalismo até então inexistente. Sua explicação se baseava na seguinte ideia: Se $+ a - a = 0$, então, se multiplicarmos essa expressão por um número positivo $+ n$, teremos o primeiro termo $+ na$, e como segundo termo $- na$, pois o produto também deverá ser zero, logo, $- na + na$, também deverá ser zero. E quando a expressão $+a - a$ for multiplicada por um número negativo, esse produto também deverá ser zero. Assim, se multiplicarmos a expressão $+a - a$ por $- n$, teremos $- na$ como o primeiro termo e $+ na$ para o segundo termo, pois os dois termos precisam ser anulados.

Por conseguinte, ele enuncia a regra de sinais colocando que o produto de dois números com sinais diferentes é negativo e o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo. Apesar das importantes contribuições de MacLaurin a respeito dos números relativos, ele não foi capaz de apresentar a teoria dos números relativos, mas seus estudos foram tomados como referência pelos matemáticos posteriores.

Nesse contexto, são vislumbrados alguns aspectos do pensamento científico abstrato no momento em que as primeiras impressões vão perdendo espaço para o pensamento generalizado.

> [...] nos propomos a mostrar este destino grandioso do pensamento científico abstrato. Para isso devemos provar que pensamento abstrato não é sinônimo de má consciência científica, como a acusação trivial parece dizer. Deveremos provar que a abstração desembaraça o espírito, que ela o alivia e que ela o dinamiza. [...] E para mostrar melhor que o processo de abstração não é uniforme, não titubearemos em empregar às vezes um tom polêmico, insistindo sobre o caráter de obstáculo que apresenta a experiência, estimada concreta e real, estimada natural e imediata. (Bachelard, 1996, p.8-9)

Partilhamos da ideia de Bachelard, quando afirma que o processo de abstração se constitui como uma desestabilização do obstáculo da opinião que se encontra preso à experiência primeira e real. Isso pode ser percebido durante o fazer científico da regra de sinais. Enquanto a demonstração da regra de sinais se encontrava baseada no pensamento concreto, o espírito se encontrava em conflito. A partir do momento em que as dificuldades que impediram as abstrações corretas começaram a serem vencidas, o espírito torna-se desembaraçado, pois a abstração o tranquiliza e o estimula. Assim, no estado concreto-abstrato, mesmo o espírito ainda vivendo numa situação paradoxal, ele já se sente mais firme no processo de abstração.

Entretanto, o caminho que pode garantir o avanço do conhecimento humano passa pelo desligamento da intuição. No estado abstrato, o espírito, distante da realidade primeira, constrói o conhecimento científico, que tende a se tornar cada vez mais racional e abstrato. Um dos matemáticos que se propôs a trilhar esse caminho foi George Peacock, que publicou em 1830 o "*Tratado em Álgebra*". Nessa obra, ele apresenta uma distinção entre a álgebra aritmética e a álgebra simbólica. Essa visão, fazendo valer para a álgebra simbólica as mesmas regras da álgebra aritmética, provoca uma verdadeira evolução para a formação da teoria dos números relativos e para formação do espírito científico.

Como consequência das contribuições de Peacock, o alemão Hermann Hankel estabelece em 1867 o Princípio da permanência das leis formais. Hankel propõe a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais e enuncia o seguinte Teorema: "A única multiplicação sobre R, que prolonga a multiplicação usual sobre R^+, respeitando as distribuições (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais" (Glaeser, 1981, p.338). E apresenta uma demonstração bastante simples:

> Demonstração:
> $0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$
> $0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$
> De onde
> $(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$
> (Glaeser, 1981, p.338)

A revolução cumprida por Hankel, recusando a busca por um bom modelo, segundo Glaeser (1981), consiste em abordar os números numa outra perspectiva. Não podemos mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados. Foi somente no estado abstrato do espírito que a regra de sinais pode se consolidar.

> Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade. (Schbring, 2007, p.6)

Hankel, ao contrário de Laplace, que procurava uma explicação na natureza para a regra de sinais, aborda a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais. Dessa forma, a regra de sinais é uma convenção com objetivo de manter a consistência interna da própria matemática.

Essa capacidade que o homem civilizado tem para fazer generalizações e abstrações, ao contrário do homem primitivo, e até mesmo de alguns filósofos, que percebiam os números como impregnados na natureza, Caraça chama de "princípio de extensão". Nas suas palavras:

> [...] o homem tem tendência a generalizar e entender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Aquele princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de princípio de extensão. (Caraça, 1963, p.10)

O trabalho intelectual do homem, orientado por certas normas e princípios, do qual Caraça nos fala, foi o que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos e das suas operações. Assim: "As operações sobre números relativos definem-se por extensão imediata das operações com o mesmo nome estudadas no campo real" (Caraça, 1963, p.100).

No entanto, no transcorrer da história, podemos perceber a difícil aceitação dos números negativos, e essa recusa ainda se mostrou presente por certo período, mesmo após a revolução cumprida por Hankel. Schubring (2007) mostra exemplo de calorosos debates acadêmicos ocorridos na comunidade de professores de matemática a respeito da hesitação dos relativos. Mencionaremos um trecho de Hoffmann (1884, citado por Schubring, 2007, p.17) que posta um cenário de horror e consequências drásticas para o ensino da matemática, se os professores tiverem que dizer aos alunos que a regra de sinais é uma convenção: "Eu temerei ver os olhos de surpresa e de espanto dos alunos. Alunos inteligentes sobreviveriam com perguntas: Isso é verdadeiramente arbitrário? Não se pode demonstrar?". Essa hesitação em aceitar a regra de sinais desprendida a exemplos práticos é uma característica do pensamento pré-científico que se encontra diante de um obstáculo ainda não superado. "É preciso abandonar hábitos. O espírito científico tem de aliar a flexibilidade ao rigor. [...] Abandonar os conhecimentos do senso comum é um sacrifício difícil. Não é de espantar a ingenuidade que se acumula nas primeiras descrições de um mundo desconhecido" (Bachelard, 1996, p.277).

Esse difícil desapego, que o espírito pré-científico apresenta para abandonar hábitos, pode ser percebido na resistência dos professores no passado (e talvez no presente) em aceitar que a explicação para a regra de sinais não pode ser vista na natureza, que "– × –" precisa ser mais para preservar o formalismo matemático já existente.

ASPECTOS DA EPISTEMOLOGIA DE BACHELARD PRESENTES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA REGRA DE SINAIS

Os alunos, em tempos atuais, ainda enfrentam diversos obstáculos que já foram encontrados e superados pelos matemáticos no passado. A permanência desses obstáculos muitas vezes passa despercebida no processo de ensino e aprendizagem da regra de sinais "– × – = +" (menos vezes menos é mais). A nosso ver, essa problemática está diretamente relacionada aos processos de ensino e aprendizagem e à construção do conhecimento e, portanto, apresenta elementos epistemológicos e pedagógicos.

No sistema de ensino atual, percebe-se que os números negativos ainda são abordados com exemplos práticos e presos à natureza. A análise dos livros didáticos do 7º ano, do PNDL-2011, realizada por Hillesheim (2013) aponta que 60% desses livros utilizaram o modelo aritmético para abordar a adição de números inteiros. Em outras palavras, os autores se basearam em situações-problema que relacionaram o número positivo à ideia de ganho/lucro/crédito e a ideia de número negativo atrelada a perda/débito/prejuízo. Esse obstáculo da experiência primeira, em que os números negativos estão fortemente relacionados ao modelo comercial, a modelos concretos presos a natureza se encontram no estágio concreto do espírito científico.

Com o intuito de facilitar a compreensão dos números inteiros, a abordagem utilizada para o ensino dos números negativos é feita com exemplos práticos, em contextos de uso comercial, temperatura, saldo de gol de um campeonato, etc. Entretanto, esse fato reforça a ideia errônea e confusa quando se trata de justificar que "– × – = +". Como uma dívida multiplicada por outra dívida se transforma num ganho? "[...] Não se pode confinar com tanta facilidade as metáforas no reino da expressão. Por mais que se faça, as metáforas seduzem a razão. São imagens particulares e distantes que, insensivelmente, tornam-se esquemas gerais" (Bachelard, 1996, p.97).

No livro paradidático intitulado "História de sinais", Ramos (2006) apresenta ao longo da história várias situações em que os personagens convivem com situações reais de aplicação concreta dos números inteiros relativos. Quando o personagem Alexandre vai explicar a multiplicação de dois números negativos para Milena, ele se utiliza da ideia do oposto. Assim, $(-7) \times (-4) = -(+7) \times (-4) = -(-28) = +28$. Entretanto, a personagem Milena não ficou completamente satisfeita com a justificativa. Veja o diálogo dos dois personagens:

> – (Milena) Como é que a multiplicação de dois fatores negativos pode dar um resultado positivo?
>
> – (Alexandre) Ah, é isso? Sabe que também estranhei a primeira vez que pensei no assunto?
>
> – Pois então me diga onde está a lógica disso... – pediu ela.
>
> O rapaz pensou um pouco antes de responder:
>
> – O exemplo mais concreto que lhe poderia dar é o seguinte: saí com a camiseta do lado do avesso. Vou então fazer o avesso do avesso...
>
> – (Milena) Mas o avesso do avesso é o direito.
>
> – (Alexandre) Isso! É como se o lado direito fosse representado pela ideia de positivo e o avesso pela ideia do negativo. (Ramos, 2006, p.60)

A compreensão dos números negativos pelo espírito pré-científico busca concretizar o abstrato (a ideia de número negativo), fazendo uso de analogias (ganho/perda, crédito/débito, avesso/direito) que esvaziam todo o conteúdo científico. Isto é, são geradas imagens concretas de fenômenos abstratos pelo indivíduo que bloqueiam a ruptura epistemológica do senso comum para a compreensão dos aspectos abstratos da multiplicação de dois números negativos.

A regra de sinais, na concepção da personagem Milena, precisava ser utilizada e aplicada em situações concretas. Nesse contexto, percebe-se a dificuldade que o estado concreto do espírito científico tem em conceber a ideia de um fenômeno inútil. Para a personagem, a regra de sinais "$- \times - = +$" só tem sentido quando relacionada a uma situação que pode ser vivida. Isso mostra a necessidade que o espírito científico no estado concreto tem em se agarrar a exemplos da vida cotidiana, causando perturbações e impedindo que o espírito alcance o estado abstrato, que, nesse caso, diz respeito ao entendimento da multiplicação entre dois números negativos. Esse exemplo, encontrado na literatura, pode servir como uma ilustração do que acontece com nossos alunos em sala de aula.

Podemos pensar, também, que essas dificuldades podem estar relacionadas com o fenômeno da não congruência semântica destacada por Duval:

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem 'querer dizer a mesma coisa', elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão. (Duval, 2012, p.100)

Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea, diz-se que há congruência semântica. No entanto, quando essa passagem não ocorre de imediato, essas representações não são congruentes entre si. Dessa forma, o problema da congruência ou da não congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e, também, maior será o risco do processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos.

> Problemas discursivos que são semanticamente congruentes com a expressão matemática, mas que não são referencialmente equivalentes, levam a uma taxa muita baixa de sucesso; da mesma forma acontece com problemas que são referencialmente equivalentes, mas não são semanticamente congruentes. A resolução de problemas que solicitam a passagem de um registro discursivo para um registro aritmético ou algébrico exige a equivalência referencial. (Moretti, 2012, p.705)

Nesse sentido, o professor deve ficar atento ao fato de que nem sempre a congruência semântica conduz a resultados bem sucedidos na resolução de problemas matemáticos.

Não é por acaso que os alunos apresentam tanta dificuldade para alcançar o entendimento das operações com números relativos como indicado na pesquisa de Pontes (2010). A nosso ver, o ensino dos números negativos, preso ao modelo comercial, esvazia o conteúdo científico da regra de sinais e agrava ainda mais as dificuldades dos alunos quanto às situações em que não há congruência semântica.

A pesquisa realizada por Pontes (2010) aponta que o processo de ensino e aprendizagem atual dos números negativos e da regra de sinais ainda enfrenta obstáculos epistemológicos que já foram superados pelos matemáticos do passado. Não é nosso objetivo aqui utilizar a história da consolidação da regra de sinais para explicar os problemas referentes a ela no presente, mas, sim, pensarmos epistemologicamente, tomando os fatos como ideias, triando os documentos recolhidos pelo historiador e julgando-os do ponto de vista da razão. Nessa pesquisa, Pontes (2010) apresenta uma sugestão para o ensino da multiplicação de números inteiros relativos de acordo com o indicado, segundo a autora, no Caderno 9 da Coleção Temas Matemáticos do NCTM, intitulado o sistema dos inteiros.

> Nessa justificativa, é sugerida a multiplicação da sequência dos números inteiros de 4 até -4 pelo número positivo 5. Iniciando pelo produto 4 × 5 = 20 e seguindo até o produto 0 × 5 =0 pode ser observado que o primeiro fator vai diminuindo de um em um, que o segundo fator permanece igual e que os produtos vão diminuindo de cinco em cinco unidades. Portanto, continuando a realizar os produtos até -4 × 5 = -20, obtemos a seguinte sequência:

×	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4
+5	**+20**	**+15**	**+10**	**+5**	**0**	**-5**	**-10**	**-15**	**-20**

> Assim, concluímos que o produto de um número negativo por um número positivo é um número negativo. Em seguida, é usada a mesma estratégia para multiplicar os números inteiros de 4 a -4 pelo número negativo -5, inicialmente de 4 até 0, para que a sequência dos produtos seja percebida e, em seguida de -1 a -4, que geram os produtos:

×	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4
-5	**-20**	**-15**	**-10**	**-5**	**0**	**+5**	**+10**	**+15**	**+20**

> De acordo com a sequência anterior, concluímos que o produto de um número negativo por um número negativo é um número positivo. (Pontes, 2010, p.104)

Percebemos, nesta sugestão indicada por Pontes (2010), que a regra de sinais para a multiplicação é apresentada a meio caminho entre o concreto e o abstrato, expondo certo grau de abstração entre o visível e o imperceptível. Essa geometrização leva a outros domínios do conhecimento, representando o passo inicial para a formação do pensamento científico. Nesse contexto, o espírito científico se encontra no estado concreto-abstrato, na busca incessante por uma possível generalização. O espírito se encontra confortável com o exemplo aritmético, mas vislumbrando nele ideias algébricas, despontando o pensamento abstrato. Segundo Bachelard (2004, p.14), para apreender o real "é preciso ter a coragem de colocá-lo no seu ponto de oscilação, no qual se mesclam o espírito de refinamento e o espírito geométrico".

Na análise dos livros didáticos do 7º ano do PNDL-2011, Hillesheim (2013) aponta que nenhum dos livros apresentou a multiplicação dos números inteiros utilizando o modelo algébrico, ou seja, pela via formal, como o apresentado por Hankel. Entretanto, essa regra só pode ser pensada estendendo as propriedades dos Reais positivos (R^+) para os Reais (R). Ela é uma convenção, com objetivo de manter a consistência interna da própria matemática.

> Sem dúvida, seria mais simples ensinar só o resultado. Mas o ensino dos resultados da ciência nunca é um ensino científico. Se não for explicada a linha de produção espiritual que levou ao resultado, pode-se ter a certeza de que o aluno vai associar o resultado a suas imagens mais conhecidas. É preciso 'que ele compreenda'. Só se consegue guardar o que se compreende. O aluno compreende do seu jeito. Já que não lhe deram as razões, ele junta ao resultado razões pessoais. (Bachelard, 1996, p.288-289)

Dessa maneira, podemos perceber que a simples memorização da regra "menos vezes menos é mais" não garante a sua aprendizagem significativa. A introdução conceitual dos números inteiros relativos, utilizando-se as formas simples e concretas, pode contribuir para a formação de lacunas no que diz respeito ao entendimento da regra de sinais. Há que se pensar em meios que promovam e garantam a compreensão do seu processo de produção. Se o aluno não compreende o percurso da consolidação da regra de sinais pela via formal, ele irá, muito provavelmente, procurar compreender do seu jeito, atribuindo aos resultados suas experiências pessoais.

A concepção do número negativo atrelado ao modelo comercial (ganho/perda) se instala no espírito de forma inabalável. Pois,

> [...] como é concreto e ele facilita muito a compreensão dos relativos no início de sua aprendizagem, os alunos o adotam e querem utilizá-lo enquanto não é mais adaptado: não somente, ele não explica mais nada, mas ele representa mais nada, ele não funciona mais ao nível do símbolo. (Coquin-Viennot, 1985, p.183)

O estado concreto do espírito científico gera uma tomada de posse, confortável e segura, incapaz de ser abalada mesmo em situações conflitantes, como no caso de querer justificar a regra "$- \times - = +$" com exemplos práticos e metafóricos. Um dos achados da pesquisa de Hillesheim (2013) foi poder mostrar como o ensino dos números inteiros relativos, pela via do modelo comercial, traz sérios prejuízos para a compreensão da multiplicação de números negativos. Na aplicação da sua sequência didática, uma das questões solicitava a resolução da operação, juntamente com a justificativa para o resultado encontrado. Veja abaixo a resposta apresentada na pesquisa de Hillesheim (2013), por um aluno da classe para essa questão:

(+ 20) + (- 7) = +13	tenho 20 reais dei 7 ~~e~~ fiquei com +13 reais.
(+ 6) × (+ 15) = +90	ganhei em 6 dias 15 reais no final eu tava com 90 reais
(- 8) . (+ 3) = - 24	em 8 dias ~~ganhei~~ peguei emprestado 3 reais.
(- 9) × (- 4) = ~~+~~-36	devia 9x4 reais no padaria no final do mês paguei -36 reais.

(Hillesheim, 2013, p.155)

Esse aluno obteve sucesso em todos os seus cálculos e justificativas até o momento que se deparou com uma multiplicação entre dois números negativos. Então, o modelo comercial que se adequava tão bem até o momento deixou de funcionar e o conduziu a um resultado incorreto. Percebamos o conflito que esse aluno se encontrava no momento da resolução da operação: primeiramente ele havia colocado o sinal positivo no resultado de "(–9) × (–4)", mas como esse resultado não poderia fazer sentido (como uma dívida multiplicada por outra dívida poderia resultar num ganho?) ele rasurou o sinal positivo e colocou o sinal negativo como resposta para a operação. A esse respeito, Coquin-Viennot nos aponta que:

> Essa concepção (na base concreta) não pode funcionar numa estrutura multiplicativa; é necessário revertê-la a fim de prosseguir a aprendizagem, mas ela está bem estabelecida, bem cômoda para resolver os problemas aditivos encontrados até aqui, que ela, nela mesmo, constitui um verdadeiro obstáculo para a instalação do nível IV. (Coquin-Viennot, 1985, p.184)

O nível IV que Coquin-Viennot menciona é justamente a concepção da multiplicação de números relativos. Em outras palavras, o modelo concreto que funciona muito bem para o ensino das propriedades aditivas constitui-se como um entrave para o ensino das propriedades multiplicativas desses números. Segundo Hillesheim (2013), apesar desse aluno ter participado de uma sequência didática conduzida pela via formal, ele não foi capaz de ter sua concepção trazida de experiências de anos anteriores abalada, uma vez que o aluno estava cursando o 7º ano pela segunda vez.

Para Bachelard (1996), o compromisso da filosofia científica é "[...] psicanalisar o interesse, derrubar qualquer utilitarismo por mais disfarçado que seja, por mais elevado que se julgue, voltar o espírito do real para o artificial, do natural para o humano, da representação para a abstração" (Bachelard, 1996, p.13). Enquanto o ensino dos números negativos for conduzido pelo espírito no seu estado concreto, o aluno dificilmente terá a possibilidade de se desapegar da situação real e alcançar o pensamento abstrato e formal. Isso porque a experiência científica se opõe a experiência imediata. Concordamos com Michelot (1966), quando afirma que "a noção de número negativo só pode ser definida corretamente pelo nível do pensamento formal" (p.238).

Acreditamos que o professor, ao introduzir o número negativo por situações reais, apenas procura facilitar a aprendizagem das operações aditivas para esses números. Contudo, com esse modelo, não estariam "[...] introduzindo um falso contrato didático utilizando um modelo concreto para apresentar o conjunto dos números relativos?" (Coquin-Viennot, 1985, p.183), uma vez que essa concepção apenas funciona para a adição? A nosso ver, esse apego a situações concretas, apesar de confortável num primeiro momento, passa a ser um empecilho para o entendimento das propriedades multiplicativas desses números.

> 'Para admitir a noção de número negativo, é necessário liberar completamente entraves do pensamento concreto' (Michelot, 1966, p.228). Essa fórmula continua verdadeira para todos os domínios onde se exercem os relativos; as dificuldades encontradas pelos estudantes face aos problemas multiplicativos manifestam claramente que 'tais entraves do pensamento concreto, não caíram', por que cairiam quando esses mesmos alunos utilizam os relativos em situação aditiva? (Coquin-Viennot, 1985, p.184-185)

Essas resistências são compreensíveis do ponto de vista pedagógico, pois a apresentação dos números negativos pela via comercial funciona muito bem quando se trata de relacionar esses números a situações cotidianas como, por exemplo: temperaturas, saldo de gols, situações contábeis, nível do mar, etc. Contudo, a justificativa proposta pelo aluno, para a multiplicação de dois números negativos, apresentada por Hillesheim (2013), ilustra muito bem o estranhamento causado por essa concepção quando ele é confrontado com a multiplicação de dois números negativos.

Muitos professores, no processo de ensino dos relativos, se esquecem de levar em consideração que o aluno do 7º ano, quando estuda os números inteiros relativos, traz consigo seus conhecimentos empíricos já constituídos por suas vivências "[...] não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana" (Bachelard, 1996, p.2-3). Bachelard procura ilustrar o seu posicionamento por meio do seu depoimento como professor:

> Pouco a pouco, procuro liberar suavemente o espírito dos alunos de seu apego a imagens privilegiadas. Eu os encaminho para as vias da abstração, esforçando-me para despertar o gosto pela abstração. Enfim, acho que o primeiro princípio da educação científica é, no reino intelectual, esse ascetismo que é o pensamento abstrato. Só ele pode levar-nos a dominar o conhecimento experimental. (Bachelard, 1996, p.292)

E, com o intuito de conduzir o ensino dos números inteiros relativos, evitando a associação do número positivo a um ganho e o número negativo a uma perda e vislumbrando a possibilidade de promover a passagem do espírito científico no estado concreto para o concreto-abstrato e finalmente para o abstrato é que a pesquisa de Hillesheim (2013) nos apresenta resultados relevantes. Os estudos realizados por Hillesheim (2013) e Hillesheim e Moretti (2013) vêm apontando novas perspectivas e possibilidades de ensino da regra de sinais evitando o modelo comercial. A sequência didática organizada e aplicada por Hillesheim (2013) numa turma de 7º ano do ensino fundamental indica resultados positivos para o processo de ensino e aprendizagem da regra de sinais pela via formal, evitando o modelo comercial, favorecendo a formação do pensamento abstrato e estimulando o desenvolvimento de generalizações. Após a aplicação da sequência didática, Hillesheim (2013) constatou que a maior parte dos alunos da turma já havia concebido a unificação da reta numérica e os problemas aditivos eram resolvidos nos inteiros. A operação de adição, tendo sido apresentada por deslocamentos sobre a reta numérica, contribuiu para que os negativos não fossem tratados separadamente dos positivos. Essa forma de conduzir o ensino da adição acabou contribuindo para que os alunos percebessem que o conjunto dos números inteiros é uma união entre o zero, os positivos e os negativos. No entanto, os problemas subtrativos não foram alcançados pelos alunos, pois eles não conseguiram se libertar da concepção de subtração atrelada à ideia de tirar como concebida nos naturais, e ampliar essa concepção nos relativos em que a subtração desses números significa trabalhar com operadores negativos que operam transformação de posição. A assimilação dos problemas multiplicativos foi atingida por um pequeno grupo de alunos, entretanto quase 80% da turma obteve sucesso para o cálculo da multiplicação $(-7) \times (-4)$.

Acreditamos que a aplicação da sequência didática de Hillesheim (2013) contribuiu para o desenvolvimento dos três estados do espírito científico apresentados por Bachelard, culminando com "O *estado abstrato,* em que o espírito adota informações voluntariamente subtraídas à intuição do espaço real, voluntariamente desligadas da experiência imediata e até em polêmica declarada com a realidade primeira, sempre impura, sempre informe" (Bachelard, 1996, p.11).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho é uma tentativa de mostrar os obstáculos epistemológicos que se fizeram presentes nos três estados do espírito científico no processo de consolidação da regra de sinais "$- \times - = +$". A epistemologia de Bachelard (1996) defende que o conhecimento científico avança na ação de um incessante questionar e para ascender à ciência há a necessidade de aceitar uma brusca modificação no espírito, que contradiz o passado. Nesse constante movimento do espírito, as verdades são provisórias e edificadas a partir dos erros.

Os três estados do espírito científico apontados por Bachelard (1996) podem ser percebidos tanto no processo da formalização da regra de sinais pelos matemáticos, quanto no processo de ensino e aprendizagem dessa regra em tempos atuais. Enquanto os matemáticos tentavam explicar a regra com exemplos presos a natureza, o espírito científico se encontrava no estado concreto. Foi somente quando o espírito se desprendeu desses exemplos concretos e concreto-abstrato, passando para o estado abstrato, que o espírito científico conseguiu ampliar o conceito de número negativo, consolidando, desse modo, a regra de sinais para esses números.

No processo de ensino e aprendizagem dos números negativos, especificamente da regra de sinais, percebemos que existem, na atualidade, obstáculos pedagógicos que favorecem as dificuldades enfrentadas pelos alunos para a sua aprendizagem. A abordagem conceitual desses números pela via concreta, presa a exemplos práticos, provoca um conflito e um desconforto quando o aluno é confrontado com a multiplicação de dois números negativos. É preciso explicitar os processos de produção e sistematização da regra de sinais para que o aluno a compreenda. Só se consegue preservar na memória aquilo que se compreende. A regra de sinais da adição ou da multiplicação de números inteiros não precisa ser decorada pelos alunos, ela pode e deve ser compreendida por eles.

Concordamos com Hillesheim (2013) ao defender que a introdução conceitual desses números deve ser feita pela via formal, evitando as metáforas, que, com o intuito de facilitar a compreensão da sua estrutura, conduz os alunos a formação de ideias errôneas e confusas acerca desses números. É preciso conduzir o processo de ensino e aprendizagem desses números visando à formação do espírito científico, e, para tanto, se faz necessário o desapego a exemplos concretos.

Bachelard afirma que “Em sua formação individual, o espírito científico passaria necessariamente pelos três estados seguintes [...]: concreto, concreto-abstrato e abstrato” (Bachelard, 1996, p.11). Assim, a nosso ver, a intervenção didática proposta por Hillesheim (2013), sob um olhar bachelardiano, parece ter possibilitado a libertação do espírito dos alunos das impressões primeiras, apegadas a exemplos concretos, passando para o estágio do espírito pré-científico, por meio da geometrização, contribuindo para a formação de generalizações, culminando com o estágio abstrato.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Ambos os autores M.T.M. e S.F.H. produziram o texto final por meio do compartilhamento de ideias e escritos.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

O compartilhamento de dados não é aplicável a este artigo, pois nenhum dado novo foi criado ou analisado neste estudo.

REFERÊNCIAS

Alexandria, D. (2007) *La aritmética y el libro sobre los números poligonales.* Tres canto: Nivola Libros Ediciones.

Bachelard, G. (1978) *A filosofia do não; O novo espírito científico; A poética do espaço;* seleção de textos de José Américo Motta Pessanha; traduções de Joaquim José Moura Ramos. (et al.). São Paulo: Abril Cultural.
Bachelard, G. (1996) *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto.
Bachelard, G. (2004) *Ensaio sobre o conhecimento aproximado.* Rio de Janeiro: Contraponto.
Boyer, C. (2010) *História da matemática.* São Paulo: Blucher.
Caraça, B. J. (1951) *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Bertrand.
Coquin-Viennot, D. (1985) Complexité mathématique et ordre d'aquisition : une hierarchie de conceptions à propos des relatifs. *RDM,* 6(2.3), 133-191.
Duval, R. (2012) Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. *Revemat,* Florianópolis, *7*(1), 97-117.
Glaeser, G. (1981) Epistemologie des nombres relatifs. *RDM, 2*(3), 303-346.
Hillesheim, S. F. & Moretti, M. T. (2013) Modelo Comercial: um entrave persistente à aprendizagem da regra de sinais. *REnCiMa,* São Paulo, *4*(2), 37-56.
Hillesheim, S. F. (2013) *Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais* (216 f.). Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
Hoffmann, J.C.V. (1884) Zwei wichtige Fragen über das Negative, beantwortet vom Herausgeber. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 15,580-582.
Igliori, S. B. C. (2008) A noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.) *Educação matemática: uma (nova) introdução.* EDUC, São Paulo, 49-75.
Kasner, E; Newman, J. (1968) Mathematics and the Imagination. Middlesex, Pelican Books.
Kasner, E; Newman, J. *Mathematics and the Imagination*. Middlesex, Pelican Books, 1968.
Lopes, A. R. C. (1996) Bachelad: o filósofo da desilusão. *Caderno Catarinense de Ensino de Física,* Florianópolis, *13*(3), 248-273.
Medeiros, A. & Medeiros, C. (1992) Números negativos: uma história de incertezas. *Bolema,* Rio Claro, 7(8), 49-59.
Michelot, A. (1966) *La notion de zero.* Paris: Vrin.
Moretti, M. T. (2012, abril) A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. *Bolema,* Rio Claro, *26*(42B), 691-714.
Pontes, M. O. (2010) *Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade: a polêmica multiplicação de números inteiros* (157 f.). Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
Ramos, L. F. (2006) *História de sinais.* São Paulo: Ática.
Schubring, G. (2007) Um outro caso de obstáculo epistemológico: o princípio de permanência. *Bolema,* Rio Claro, *20*(28), 1-20.
Singh, J. (1972) *Mathematical Ideas: their nature and use*. London: Hutchinson and Co. Ltd.
Struik, D. J. (1992) *História concisa das matemáticas.* Lisboa: Gradiva.