

O papel dos ostensivos na compreensão das variáveis estatísticas quantitativas

Irene Mauricio Cazorla ^a
Afonso Henriques ^a
Gleudson Santos Correia ^b
Cláudio Vitor Santana ^c

^a Universidade Estadual de Santa Cruz, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Ilhéus, BA, Brasil

^b Centro Territorial de Educação Profissional Litoral Sul, Comunidade Quilombola, Maraú, BA, Brasil

^c Colégio Estadual de Educação Profissional em Biotecnologia e Saúde, Itabuna, BA, Brasil

*Recebido para publicação 25 mar. 2021. Aceito após revisão 1 de jul. 2021.
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

RESUMO

Contexto: um dos principais desafios do ensino de Estatística na Educação Básica é o tratamento das variáveis estatísticas quantitativas, pois além dos cálculos envolvidos nas medidas resumo, a compreensão do comportamento dessas variáveis e o significado de suas estatísticas são, pela sua própria natureza, complexas. Nesse sentido, o uso de materiais concretos manipuláveis e o papel da ação do estudante como ostensivos na gestão e na representação desse tipo de variável podem auxiliar nessa compreensão. **Objetivos:** esta pesquisa investiga como os materiais concretos manipuláveis e a ação do estudante contribuem para a compreensão e representação das variáveis estatísticas quantitativas em diferentes registros. **Design:** tecemos reflexões teóricas sobre o uso ativo dos ostensivos na representação e transformação dos dados em estatísticas – tabelas, gráficos e medidas resumo – na Educação Básica a partir da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria de Registros de Representação Semiótica. **Ambiente e participantes:** trata-se de um estudo teórico que utiliza resultados já publicados em pesquisas correlatas. **Coleta e análise de dados:** esses dados foram coletados a partir de artigos publicados em periódicos científicos bem como em dissertações disponíveis em meio digital. **Resultados:** as análises apontam que a utilização dos ostensivos ajuda na compreensão dos conceitos estatísticos pelos estudantes e que a partir disso esses estudantes tem maior fluidez na representação e transformação das representações das informações estatísticas em diferentes registros. **Conclusões:** o estudo revela que a utilização dos ostensivos e da ação do estudante na gestão dos conceitos estatísticos é um aspecto fundamental na aprendizagem.

Corresponding author: Irene Mauricio Cazorla. Email: icazorla@uol.com.br

Palavras-chave: variáveis estatísticas quantitativas; dados estatísticos; material concreto manipulável; ações dos estudantes; *ostensivos*.

The Role of the Ostensives in Understanding Qualitative Statistical Variables

ABSTRACT

Background: um dos principais desafios do ensino de Estatística na Educação Básica é o tratamento das variáveis estatísticas quantitativas, pois além dos cálculos envolvidos nas medidas resumo, a compreensão do comportamento dessas variáveis e o significado de suas estatísticas são, pela sua própria natureza, complexas. Nesse sentido, o uso de materiais concretos manipuláveis e o papel da ação do estudante como ostensivos na gestão e na representação desse tipo de variável podem auxiliar nessa compreensão. **Objectives:** esta pesquisa investiga como os materiais concretos manipuláveis e a ação do estudante contribuem para a compreensão e representação das variáveis estatísticas quantitativas em diferentes registros. **Design:** tecemos reflexões teóricas sobre o uso ativo dos ostensivos na representação e transformação dos dados em estatísticas – tabelas, gráficos e medidas resumo – na Educação Básica a partir da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria de Registros de Representação Semiótica. **Data collection and analysis:** trata-se de um estudo teórico que utiliza resultados já publicados em pesquisas correlatas. **Results:** as análises apontam que a utilização dos ostensivos ajuda na compreensão dos conceitos estatísticos pelos estudantes e que a partir disso esses estudantes tem maior fluidez na representação e transformação das representações das informações estatísticas em diferentes registros. **Conclusões:** o estudo revela que a utilização dos ostensivos e da ação do estudante na gestão dos conceitos estatísticos é um aspecto fundamental na aprendizagem.

Keywords: variáveis estatísticas quantitativas; dados estatísticos; material concreto manipulável; ações dos estudantes; *ostensivos*.

INTRODUÇÃO

A inserção dos conteúdos de Estatística na Educação Básica no Brasil se deu, oficialmente, em 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais pelo Ministério da Educação (MEC, 1997), que foi ratificado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (MEC, 2018).

Essa inserção se deve ao reconhecimento da importância do pensamento e do letramento estatístico para a leitura e compreensão de mundo, o que ficou muito mais evidente no contexto da pandemia da Covid-19, quando termos restritos à academia se tornaram parte do jargão da população, auxiliando à tomada de decisões de gestores públicos e dos cidadãos, como mostram os trabalhos de Alsina, Vásquez, Muñoz-Rodríguez e Rodríguez-

Muñiz (2020), Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, Vásquez e Alsina (2020), Correia e Cazorla (2020) e Samá, Cazorla, Velasque, Diniz e Nascimento (2020).

Nesse sentido, a produção científica no campo da Educação Estatística tem sido bastante profícua, como pode ser verificado nos diversos trabalhos de revisão (Santos, 2015; Oliveira Junior & Vieira, 2015; Schreiber & Porciúncula, 2019; Tavares & Lopes, 2019; Oliveira & Paim, 2019). Os resultados destes mapeamentos indicam uma ascensão nas pesquisas em Ensino de Estatística, principalmente na Educação Básica.

No âmbito da produção de material didático para o ensino de Estatística também se observam progressos. Lima, Bezerra e Valverde (2016) utilizaram bolinhas coloridas com saquinhos e, por meio de sorteio, desenvolveram conceitos básicos de Probabilidade e Estatística com estudantes do Ensino Fundamental. Silva (2019) construiu a “caixa estatística”, utilizando madeira e bolinhas de isopor, para desenvolver conceitos de população, amostra e métodos de amostragem com estudantes do Ensino Médio. Porciúncula e Schreiber (2019) relatam a percepção positiva dos estudantes de Licenciatura em Matemática quando utilizaram materiais concretos manipuláveis com caráter pedagógico.

Apesar de todo esse avanço, ainda nos deparamos com a falta de compreensão de conceitos básicos de Estatística. Oliveira (2020), ao investigar os conhecimentos específicos de estudantes de licenciatura em Matemática, verificou que tanto os estudantes ingressantes quanto os veteranos (prestes a se graduar) ainda apresentavam lacunas conceituais e incompreensão de conceitos básicos.

Um dos fatores que explicam essa dificuldade é a falta da compreensão de como os dados podem e devem ser coletados e como os dados brutos se transformam em estatísticas, entendidas aqui como o conjunto de conceitos e procedimentos que envolvem o processo de organização e resumo dos dados, isto é, tabelas, gráficos e medidas resumo, o que é mais complexo quando se trata de variáveis quantitativas.

Segundo Pfannkuch e Rubick (2002), um dos pontos-chaves na pesquisa estatística é definir medidas que “capturem” qualidades ou características dos elementos que compõem a população do fenômeno a ser investigado. Por essa razão, devemos dar especial atenção aos conceitos de variável e aos dados estatísticos gerados pela operacionalização das variáveis. Nesse sentido, o material concreto manipulável pode ter um papel

fundamental, em especial quando se apresentam esses conceitos pela primeira vez.

A utilização de material concreto manipulável no ensino de Matemática é bastante ampla, em especial na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa tendência também se verifica no ensino de Estatística, como mostram os trabalhos de Selva (2003), Caetano (2004), Alsina (2017), Cazorla, Henriques e Santana (2020), dentre outros. Isto parece ser explicado, em parte, porque nesta etapa da Educação Básica é dada maior ênfase ao tratamento de variáveis qualitativas, conforme a BNCC (MEC, 2018).

Todavia, a utilização do material concreto manipulável nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio é um pouco mais restrita, o que a nosso ver se deve ao fato de que neste nível de ensino devemos trabalhar com as variáveis quantitativas, o que exige maior investimento no delineamento desses materiais, a fim de que se tornem acessíveis aos Professores. Trabalhos como os de Nascimento (2007), Silva, Magina e Silva (2010), Silva (2019), Cazorla e Santana (2020) e Santana (2020) mostram que a utilização desses materiais traz benefícios na apreensão do significado das variáveis quantitativas, possibilitando a representação e a transformação dos dados estatísticos entre diferentes registros.

Nesse sentido, o presente artigo tem como objetivo tecer reflexões teóricas sobre o papel do material concreto manipulável e da ação do estudante na representação das variáveis estatísticas quantitativas em diferentes registros. Para isso, encontramos fundamentação nas Teorias dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e Antropológica do Didático (TAD).

Com este artigo, ampliamos o quadro teórico referente a utilização dos ostensivos no ensino de variáveis estatísticas qualitativas (Cazorla, Henriques & Santana, 2020) para as variáveis quantitativas. Observamos, contudo, que neste artigo nos limitamos aos conceitos estatísticos, sem tratarmos, portanto, os probabilísticos.

REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção apresentamos os dois arcabouços teóricos, a saber: a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1992), restringindo-nos aos objetos ostensivos e não ostensivos que nos permitem

analisar o papel das ações dos estudantes em face a utilização dos materiais concretos manipuláveis, e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Duval (1999), na qual focamos na conversão dos dados brutos de variáveis quantitativas em representações correspondentes do registro numérico para o registro gráfico.

A Teoria Antropológica do Didático: o papel dos ostensivos

De forma similar ao proposto por Cazorla, Henriques e Santana (2020, p. 1249), em face a utilização dos *ostensivos* na representação de variáveis qualitativas, apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) no que diz respeito aos conceitos de *ostensivos* e *não ostensivos*, que nos permitem explorar “o potencial dos materiais concretos manipuláveis como *ostensivos* apropriados à representação de dados estatísticos a partir da mobilização mental dos objetos *não ostensivos* inerentes, bem como a observação e análise das ações dos estudantes”, visando ampliar esse quadro teórico para a representação das variáveis quantitativas.

Segundo Henriques (2019, p. 65), os *ostensivos* são todos os objetos que têm uma natureza sensível e certa materialidade em uma realidade perceptível; já os objetos *não-ostensivos* são objetos que, como as ideias, as intenções ou os conceitos, existem institucionalmente “sem poderem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si: eles só podem ser evocados ou invocados a partir da manipulação adequada de objetos *ostensivos* associados”. Por exemplo, escrever $f(x) = 2^x$ pode ser compreendido como uma simples manipulação de objetos *ostensivos*, mas essa representação não poderia ser efetuada, intencionalmente, sem a intervenção de certos objetos *não-ostensivos* específicos, tais como o conceito de função exponencial. Chevallard (1999) utiliza o termo manipulação para designar as diversas utilizações possíveis de objetos *ostensivos* pelo homem. Com efeito, diversos materiais concretos podem fazer parte dessa manipulação nas ações de estudantes.

Para Henriques (2019, p. 33), o material concreto manipulável ou recurso didático manipulável é “todo instrumento ergonômico e cognitivo, tangível à mão livre, capaz de permitir a gestão de conhecimentos, sendo, portanto, útil no processo ensino-aprendizagem de objetos de saberes institucionais”.

Entendemos, portanto, que o acesso ou gestão de conhecimentos por mediação dos referidos materiais é uma condição essencial na aprendizagem,

uma vez que a manipulação de materiais apropriados, por estudantes, pode potencializar a sua ação em face a realização de atividades propostas de diversas maneiras, em particular na visualização, na concepção e na transformação dos dados brutos em estatísticas.

Assim, contando com este referencial teórico, analisamos o papel do material concreto manipulável à mão livre e a ação do estudante na representação e conversão dos dados estatísticos, por entendermos que esse processo perpassa pela mobilização de objetos *ostensivos* e *não ostensivos* em cada registro de representação considerado.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica: o papel da conversão de registros

Essa teoria foi proposta por Raymond Duval, para quem um registro de representação é um sistema *semiótico* dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber. Neste processo estão envolvidas três atividades cognitivas. A primeira atividade refere-se à construção da representação do objeto matemático por meio de traços que permitam identificar o objeto representado dentro de um sistema próprio, com regras claras (Duval, 2009).

Tais regras, denominadas de regras de conformidade, devem ser respeitadas ao construir uma representação, não somente para que o objeto representado possa ser identificável, mas também por possibilitarem a ocorrência da segunda atividade cognitiva, o tratamento da representação, dentro do sistema semiótico utilizado. Deste modo, obtém-se uma nova representação, mostrando novas características do mesmo objeto representado inicialmente e mantendo-se, ainda, o mesmo sistema de registro original (Duval, 2009).

A terceira atividade cognitiva consiste em representar esse mesmo objeto em um outro registro ou sistema semiótico, por meio de uma conversão. Tal atividade permitirá elucidar outras características do objeto representado, porém em um novo sistema, salientando-se que este processo de conversão envolve processos cognitivos distintos dos utilizados no tratamento de uma representação. No tratamento, o sistema apresenta regras internas próprias para que ocorram as transformações, entretanto, quando se deseja partir de um sistema semiótico para outro por meio de conversão, não existem regras definidas para realizar tal tarefa, como ocorreria na tradução de um idioma,

por exemplo, ou em um processo de decodificação, o que torna as conversões mais complexas (Duval, 2009). O autor afirma que:

Conversão e tratamento são fontes de problemas totalmente independentes na aprendizagem da matemática, e parece que a conversão é um processo cognitivo mais complexo do que tratamento. O problema que a maioria dos estudantes encontra é tão profundo que a conversão pode ser considerada como o limite da compreensão. A conversão da representação semiótica geralmente aparece como um truque que não pode ser bem aprendido e não é ensinado! (Duval, 2006, p. 149, tradução nossa).

Assim como na Matemática, essas atividades são de extrema importância no processo de ensino e aprendizagem de Estatística e estão no cerne do processo de compreensão dos objetos em estudo, como é o caso das variáveis estatísticas, em especial, as quantitativas. Por isso, defendemos que no ensino de Estatística esses três processos cognitivos devem ser mobilizados. Salientamos, ainda, que na ausência da mobilização desses processos, a aprendizagem do estudante sobre o objeto pode ser comprometida. Justamente por isso, Duval afirma que:

Aprender Matemática é aprender a discriminar e coordenar sistemas semióticos de representação, a fim de se tornar capaz de transformar qualquer representação. Isso pode ser resumido em uma frase. O aprendizado da Matemática não consiste primeiro na construção de conceitos pelos alunos, mas na construção da arquitetura cognitiva do objeto epistêmico. O que está em jogo na Educação Matemática através da aquisição de conteúdo específico é a construção dessa arquitetura, porque cria habilidades futuras dos alunos para o aprendizado adicional e compreensão mais abrangente. (Duval, 2000, p. 14, tradução nossa).

Segundo Duval (2012), o processo de compreensão de objetos matemáticos envolve sempre a mobilização de pelo menos dois tipos de registros semióticos distintos, ainda que se opte por apenas um registro para representar esse objeto em determinada situação, de acordo com a característica que se quer evidenciar do objeto representado. Diante disso, fica evidente que o estudo da Matemática sempre irá requerer uma coordenação entre os diversos registros possíveis para representar um mesmo objeto. Desta maneira, “A coordenação dos registros não é consequência da compreensão da

Matemática; pelo contrário, é uma condição essencial" (Duval, 1999, p. 11, tradução nossa).

Embora tenhamos elencado os princípios centrais da TRRS, o nosso foco está no papel dos *ostensivos* e do material concreto manipulável à mão livre na representação ou formação da variável quantitativa, no registro numérico e na sua conversão correspondente, para o registro gráfico. Com base nestes dois referenciais, apresentamos a seguir os resultados obtidos na nossa investigação e suas discussões.

RESULTADOS E ANÁLISES

Segundo Cazorla e Oliveira (2010), uma variável estatística quantitativa é aquela cujos resultados fornecem quantidades. Essas podem ser classificadas em discretas, se passíveis de contagem gerando números inteiros, ou em contínuas, quando são resultado de mensuração, gerando qualquer valor real em um intervalo. As variáveis estatísticas também podem ser classificadas em empíricas, que são aquelas que têm referência no mundo sensível, e conceituais, que “não podem ser observadas diretamente, mas inferidas pelo comportamento dos sujeitos envolvidos na pesquisa” (ibidem, p. 121), o que requer a criação de instrumentos para a sua operacionalização.

Neste artigo trabalhamos apenas com variáveis quantitativas empíricas, uma vez que essas podem ser contadas (discretas) ou mensuradas por instrumentos de medida (contínuas), tornando possível utilizar materiais concretos manipuláveis, o que se torna complexo no caso das variáveis conceituais. Também explicitaremos melhor a operacionalização das variáveis, pois, conforme Pfannkuch e Rubick (2002), é essencial definir medidas que “capturem” qualidades ou características dos elementos que compõem a população; bem como existem diversas maneiras de apreender uma mesma variável (Cazorla, Utsumi & Monteiro, 2021a).

Como desejamos analisar o papel das ações dos estudantes em face a utilização dos materiais concretos manipuláveis e a conversão de representações de dados estatísticos entre diferentes registros, abordamos as situações em que os estudantes recolhem os referidos dados, uma vez que com dados de fontes secundárias essa etapa já foi realizada.

Nas variáveis recolhidas pelos estudantes, segundo Cazorla e Oliveira (2010), temos três fontes que geram dados estatísticos: a observação, a experimentação e a simulação. Em uma observação, os dados são coletados

diretamente da fonte sem intervir no fenômeno, como no problema da eutrofização de um lago pela planta aquática baronesa (Correia & Cazorla, 2020). A observação consistiria em visualizar o fenômeno na natureza, tal como ele ocorre, sem realizar nenhuma intervenção, apenas coletando os dados. Já na experimentação, essa situação seria replicada em condições controladas, observando-se a duplicação da biomassa da planta em um tanque com água, por exemplo. A simulação pode ser desenvolvida conforme propuseram os autores, utilizando tampinhas de garrafa (baronasas) em um desenho em papel simulando o lago, como veremos mais adiante.

Em situação escolar, os dados da observação podem ser aqueles provenientes dos próprios estudantes, tais como a idade e as medidas antropométricas (altura, massa corpórea, etc.), como realizado por Santana (2020); ou mediante a ação de observação feita pelos estudantes, como por exemplo, verificando a quantidade de pessoas dentro dos automóveis que passam por um local (Watson, 1996), a quantidade de carros por cor (Alsina, 2017), dentre outras situações.

Já os dados gerados pelos estudantes na experimentação podem ser produzidos em parceria com os Professores de Ciências, Biologia, Educação Física etc., como, por exemplo, averiguando a quantidade de sementes de alpiste que germinaram (Vendramini & Magina, 2010) ou o crescimento de girassóis (Santos, 2018). Da mesma forma, podemos gerar dados mediante a simulação do fenômeno, como o da eutrofização do lago (Correia & Cazorla, 2020).

Observamos que, em situação escolar, muitas variáveis genuinamente contínuas, via de regra, são discretizadas, isto é, representadas com números inteiros como, por exemplo, a altura do estudante (A) em centímetros sem milímetros ou em números decimais limitados a um número fixo de decimais (em metros com duas casas decimais); a massa corpórea, em quilogramas, sem as gramas, ou a idade, coletada em anos completos, permitindo a utilização de material concreto manipulável. Todavia, em alguns casos essa estratégia não funciona, como no caso do Índice de Massa Corpórea – IMC (MC/A^2), pois, para trabalhar com faixas de IMC, um dos limites é 18,5, como relatado por Santana (2020).

Outra questão que deve ser levada em consideração é o “grau de ostensividade”. No caso das variáveis empíricas, algumas podem ser vistas a olho nu, como a altura dos estudantes e outras precisam de algum material para auxiliar na representação, como por exemplo, a quantidade de letras do primeiro nome, em que precisaríamos de cartazes/papezinhos/cubo-estatístico

para anotar o valor. As variáveis conceituais não são perceptíveis a olho nu e precisam de material concreto, como por exemplo os cartazes com as notas dadas pelos juízes nas competições das olimpíadas, ou instrumentos como as escalas de Likert.

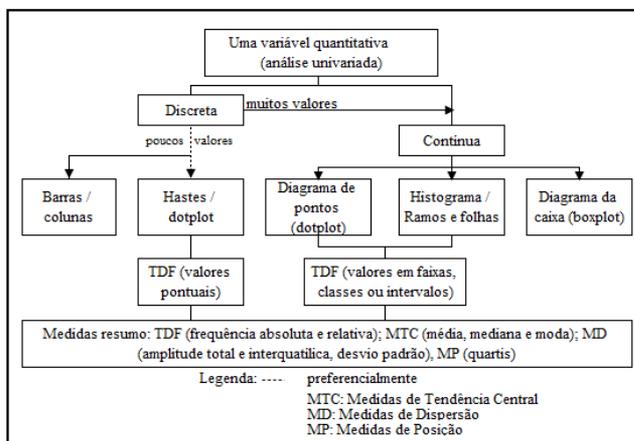
Antes de analisarmos os protótipos de utilização dos *ostensivos* e da ação dos estudantes na coleta, representação dos dados e suas possíveis transformações, devemos pontuar os conceitos e procedimentos envolvidos na análise de variáveis quantitativas, de forma univariada e bivariada.

Conforme a BNCC (MEC, 2018), os objetos de conhecimento de Estatística que devem ser ensinados ao longo da Educação Básica são: pesquisa amostral e censitária; variáveis qualitativa e quantitativa, população e amostra; tabelas estatísticas e tabelas de distribuição de frequência (TDF), simples e de dupla entrada; gráficos de barras/colunas, linhas, circular, pictograma, diagrama de ramo e folhas, da caixa (*box-plot*) e histograma; medidas resumo: frequência absoluta e relativa; medidas de tendência central – MTC (média, mediana e moda); medidas de dispersão – MD (amplitude e desvio padrão). Todavia, como observado por Cazorla, Utsumi e Monteiro (2021a), os quartis e a amplitude interquartílica não foram elencados, mas eles estão implícitos na construção do *box-plot*. Do mesmo modo, não foram contemplados o diagrama de pontos (*dot-plot*), de hastes ou bastão, os quais advogamos o seu ensino.

Cazorla, Utsumi e Monteiro (2021b) apresentam um esquema das possíveis transformações dos dados brutos em gráficos, tabelas e medidas resumos para variáveis quantitativas, que adaptamos, conforme mostrado na Figura 1. A partir deste analisamos o potencial da utilização dos *ostensivos*. Observamos que no contexto bivariado essa utilização se torna complexa, requerendo alguns cuidados, como veremos mais adiante.

Figura 1

Transformações de dados de variáveis quantitativas no contexto univariado



Com este quadro teórico, apresentamos três protótipos de representação e transformação de dados brutos de variáveis quantitativas, utilizando material concreto manipulável e da ação dos estudantes, a saber: (a) na análise univariada de variáveis discretas que tomam poucos valores; (b) na análise univariada de variáveis contínuas ou discretas que tomam muitos valores e; (c) no contexto bivariado na análise de duas variáveis quantitativas.

Além disso, focamos em dois processos na utilização dos *ostensivos*. O primeiro relativo à representação ou formação das variáveis quantitativas e o segundo na conversão de representações de dados entre registros, como veremos nos três protótipos anunciados.

(a) A utilização de ostensivos na análise univariada de variáveis discretas que tomam poucos valores

Neste protótipo englobamos as variáveis discretas que tomam poucos valores, gerados a partir das ações dos estudantes, que podem ser observadas a olho nu, como o “Número do calçado”, ou que os estudantes podem se utilizar de *ostensivos* (cartazes) para a visualização, como é o caso da “quantidade de letras do primeiro nome”.

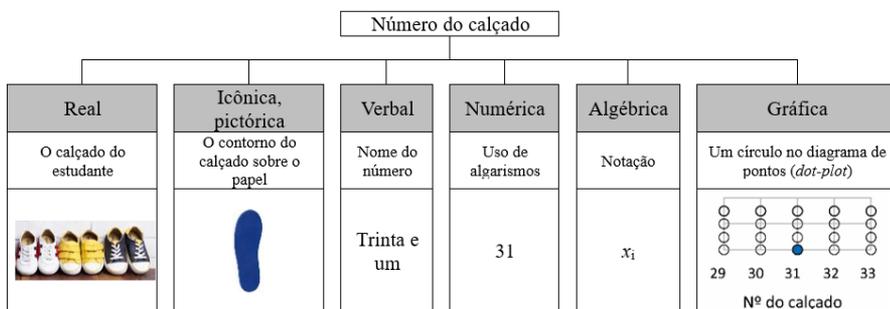
Para a formação ou construção de uma ideia em um registro, mobilizamos alguns signos e regras de conformidade. Nesse sentido,

tomamos como referência as diversas representações (real, icônica, verbal, numérica e gráfica) para uma variável qualitativa proposta por Cazorla, Henriques e Santana (2020) e a expandimos para as variáveis quantitativas. Incluímos a representação algébrica, pois nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio já se utiliza o conceito de par ordenado e de variáveis na formação de uma função matemática.

Na Figura 2 apresentamos uma proposta considerando como exemplo uma variável discreta que assume poucos valores, referentes ao “Número do calçado” dos estudantes. A primeira representação, que denominamos “real”, ocorre quando o estudante mostra os seus sapatos; a segunda, designada “icônica” ou “pictórica”, emerge quando utilizamos figuras ou *ostensivos* que representam o tamanho do calçado. Neste caso, podemos solicitar para os estudantes desenharem o contorno da projeção ortogonal do calçado sobre o papel, como realizado por Fielding-Wells (2018, p.123); a terceira, “verbal”, quando representamos por extenso (de forma oral ou escrita), no registro da língua materna, o número do calçado, digamos, “trinta e um”; a quarta, “numérica”, quando escrevemos o numeral “31”; a quinta, algébrica, quando representamos pela letra x com um subíndice (x_i) para denotar o valor da variável X “número do calçado” do *i-ésimo* estudante; e, por fim, a gráfica, quando utilizamos um círculo no diagrama de pontos (*dot-plot*) em um arcabouço próprio ou um traço/segmento de reta “unitário” no diagrama de hastes/bastão ou uma porção “unitária” de uma barra, no gráfico de barras.

Figura 2

Tipos de representações de uma variável discreta que toma poucos valores



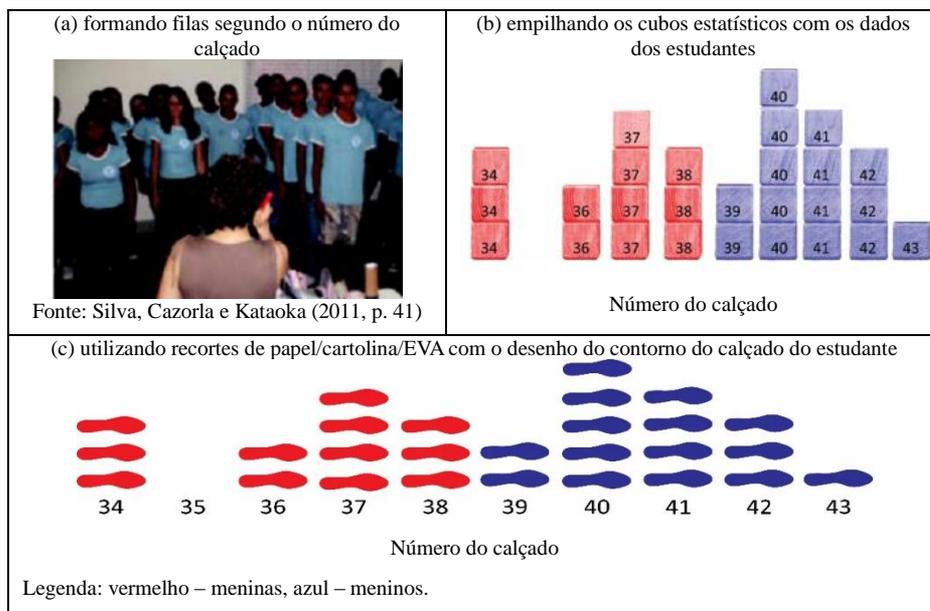
Uma vez que os dados foram coletados, o passo seguinte é organizá-los e resumi-los, a fim de descrever, de forma sucinta, a variável “Número do calçado” utilizando os ostensivos, para que os estudantes possam acompanhar

as transformações dos dados nas “estatísticas” a partir da manipulação direta, à mão livre.

Na Figura 3a observamos a formação de filas pelos estudantes, segundo o número do calçado. Aqui o próprio estudante está em ação. Na Figura 3b o estudante representa o número do seu calçado em uma face do cubo estatístico e o empilha. Na Figura 3c cada estudante desenha o contorno da projeção ortogonal de seu calçado do pé direito (pode ser o esquerdo, o importante é que sempre seja apenas um deles) sobre um papel ou uma cartolina, recorta e cola na parede. Observamos que nestas três situações os estudantes agem ativamente, seja formando filas ordenadas, representando os seus dados no cubo estatístico e empilhando ou desenhando e colando na parede o contorno do seu calçado.

Figura 3

Representação e organização de uma variável discreta utilizando ostensivos



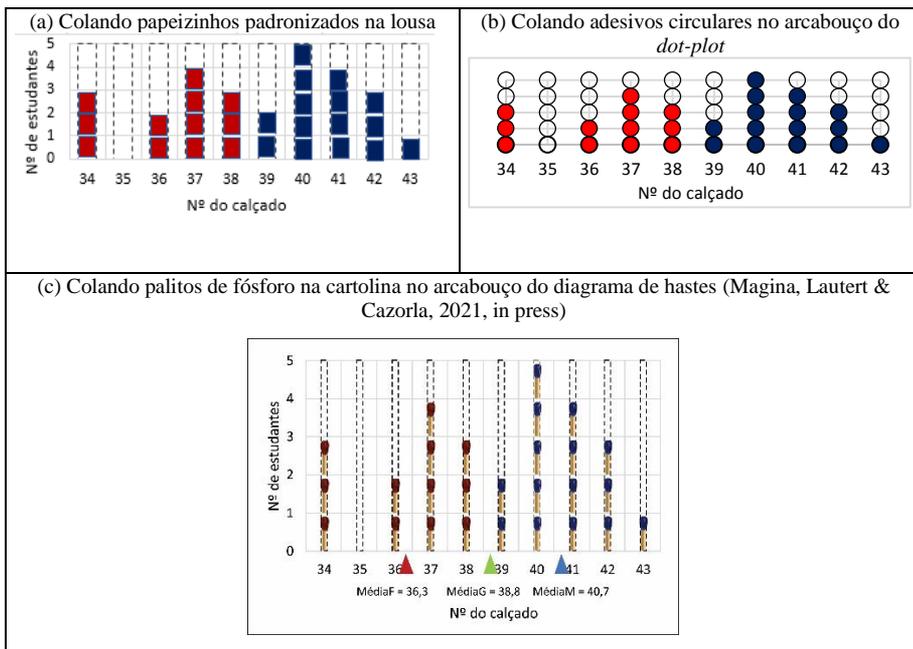
Em todos estes casos os estudantes reconhecem seus dados e conseguem visualizar a distribuição da variável em estudo. Isto é, existe uma relação biunívoca entre o estudante e seu dado, o que pode ser enfatizado colocando o nome do estudante em uma face do cubo ou no desenho do seu

calçado, podendo-se utilizar cores diferentes para distinguir uma variável qualitativa. Por exemplo, vermelho para as meninas e azul para os meninos; ou uma cor para cada idade, o que permitirá que os estudantes visualizem possíveis características da variável.

Também, podemos utilizar outros materiais não tão ostensivos como os da Figura 3, mas que os estudantes ainda possam manipular. Na Figura 4a apresentamos um “gráfico de barras”, muito utilizado na Educação Básica, colando papeizinhos padronizados na malha quadriculada colada/desenhada na lousa; adesivos circulares no arcabouço do diagrama de pontos (Figura 4b) ou palitos de fósforo/canudinhos no arcabouço do diagrama de hastes desenhado na cartolina (Figura 4c). Como podemos verificar, os estudantes ainda podem reconhecer e acompanhar os seus dados.

Figura 4

Organização e representação da variável “Número do calçado” utilizando ostensivos



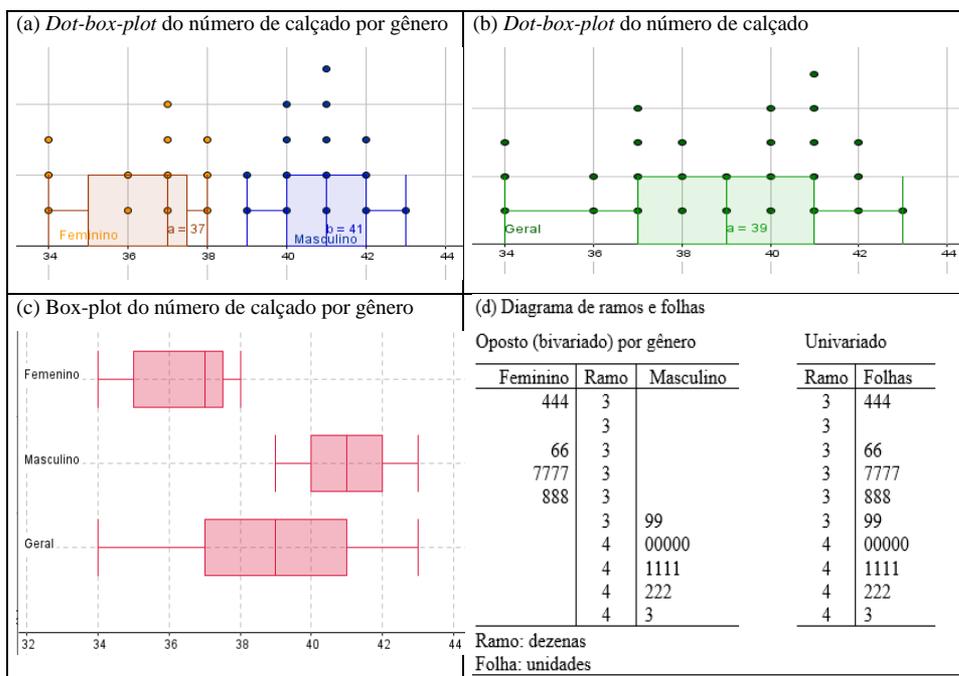
Aproveitamos a Figura 4c para representar a média do número do calçado das meninas, dos meninos e geral, utilizando triângulos na base da

escala numérica (abscissa). Nesta figura podemos observar que as meninas tem pés menores do que os meninos, sendo que a distribuição desta variável apresenta um comportamento bimodal, marcado pela influência do gênero.

Na Figura 5a apresentamos o *dot-box-plot*, colorido por gênero; o *dot-box-plot* geral (Figura 5b); e o *box-plot* para cada gênero e global (Figura 5c), os três construídos com o *software GeoGebra*. Também apresentamos o diagrama de ramos e folhas por gênero e geral (Figura 5d). Nesses gráficos estamos mobilizando elementos *não-ostensivos*, referentes ao plano cartesiano, os pontos, os segmentos de reta que compõem o *box-plot*, além de ter calculado a mediana, os quartis e examinado a presença de valores discrepantes.

Figura 5

Estatísticas da variável “Número do calçado” utilizando não-ostensivos



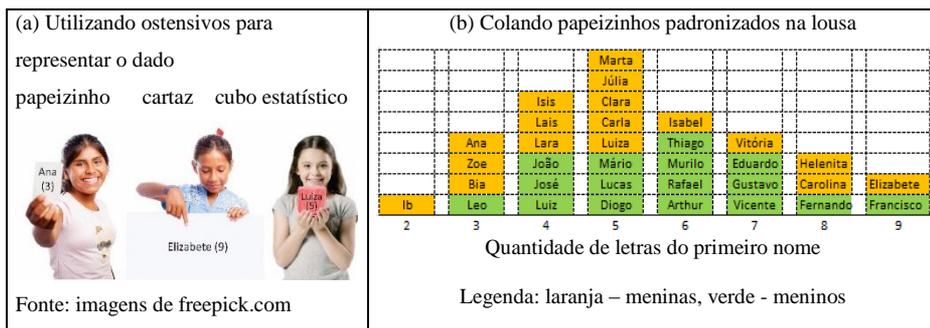
Como já mencionamos, o *dot-plot* não foi elencado na BNCC. Todavia, podemos observar a sua contribuição na construção e compreensão

do *box-plot*, pois o estudante ainda pode “ver” o ponto que pode representar o seu dado, assim como acompanhar seu dado no diagrama de ramo e folhas. Já o *box-plot* se desprende dos dados e se transforma em um objeto abstrato, de modo que o estudante já não sabe qual é seu dado. Por isso, advogamos o ensino do *dot-plot*, precedendo o ensino do *box-plot*.

Quando as variáveis não são perceptíveis a olho nu, como a quantidade de letras que formam o primeiro nome, precisamos utilizar material concreto, como papezinhos padronizados, cartazes ou cubo estatístico, no qual o estudante representa o seu dado (Figura 6a). Esta estratégia pode ser utilizada também para as variáveis contínuas. O tratamento desta variável pode seguir todos os passos descritos anteriormente, sendo que os estudantes formarão filas segundo a quantidade de letras do seu nome, empilhando os cubos e, ainda, no quadro podem colar seus papezinhos ou escrever por extenso seus nomes (Figura 6b).

Figura 6

Ostensivos para representar a variável “quantidade de letras do primeiro nome”



No âmbito da experimentação, Vendramini e Magina (2010) apresentam a “Germinação de sementes”, em que os estudantes plantaram em copinhos de café com terra 10 sementes de alpiste, registaram o seu palpite sobre a quantidade de sementes que iriam germinar (variável conceitual) e, após um determinado período, contaram as sementes que de fato germinaram (variável empírica). Santos (2018) realizou experimento similar junto com crianças da pré-escola utilizando sementes de girassóis.

Este protótipo de análise e utilização dos ostensivos se aplica a qualquer variável discreta que toma poucos valores, fruto da observação como

a quantidade de irmãos ou de letras que formam o primeiro nome, ou valores produzidos por eles em uma experimentação, como a quantidade de sementes que germinaram, ou, ainda via simulação, jogando moedas ao invés de plantar sementes.

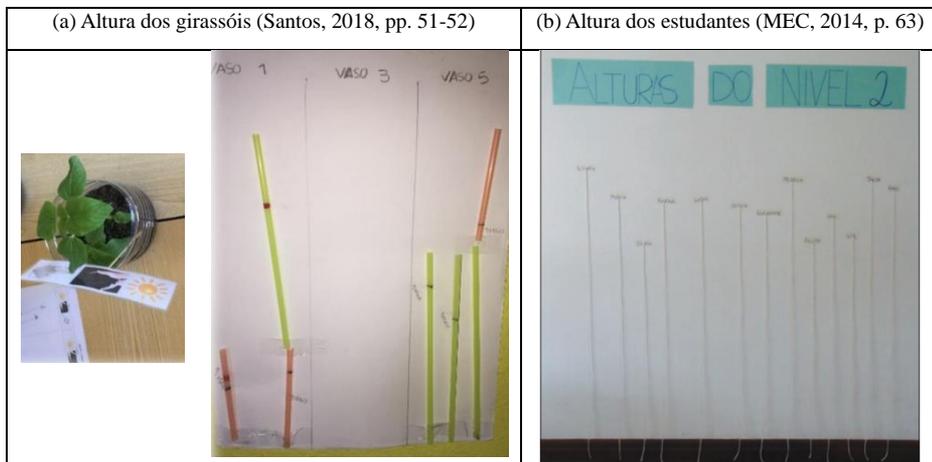
(b) A utilização de ostensivos na análise univariada de variáveis contínuas ou discretas que tomam muitos valores

Da mesma forma como utilizamos os *ostensivos* para representar e organizar as variáveis discretas que tomam poucos valores, podemos utilizar as mesmas estratégias para a representação e organização de variáveis discretas que tomam muitos valores, como por exemplo, a quantidade de passageiros que viajam por dia em um ônibus urbano ou variáveis contínuas, como a altura de uma planta ou de um estudante.

Observamos que existem estratégias que permitem coletar os dados de variáveis contínuas em escala contínua, como a realizada por Santos (2018), em que as crianças acompanharam o crescimento dos girassóis utilizando canudinhos (palhinha) de 10 e 20 centímetros de comprimento, realizando marcas para observar até onde a plantinha cresceu (Figura 7a) ou na sugestão constante no Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (MEC, 2014), para que os estudantes meçam a altura dos colegas com barbante, cortem e coleem na lousa (Figura 7b).

Figura 7

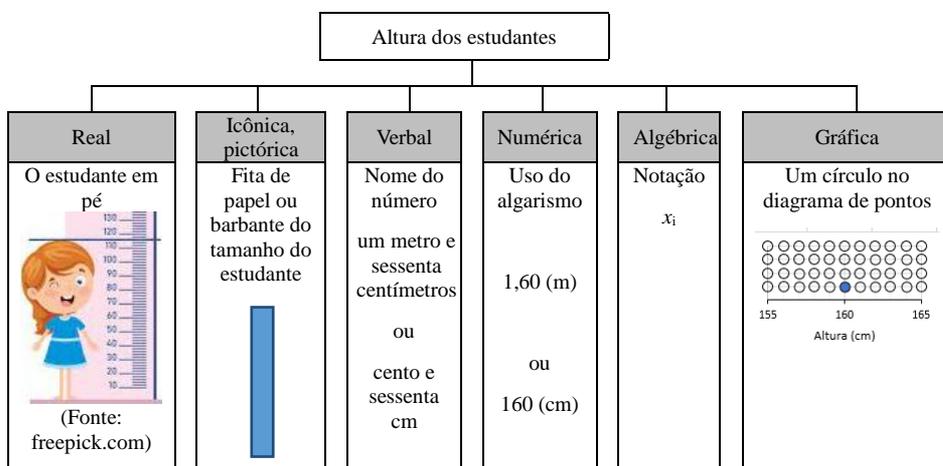
Uso de ostensivos para medir a altura (variável contínua, escala contínua)



Para ilustrar a maneira como podemos representar as variáveis contínuas, consideramos como exemplo a “altura dos estudantes”, no qual temos o próprio estudante (real), podemos cortar fitas de papel/barbante com uma marca representando o tamanho da altura do estudante e colar na parede, representar por extenso (de forma oral ou escrita), e assim por diante, conforme Figura 8.

Figura 8

Tipos de representações de uma variável contínua (discretizada)



Silva, Magina e Silva (2010) trabalharam com as variáveis antropométricas com 25 estudantes do 9º ano. Para trabalhar a variável “Altura dos estudantes”, as autoras mobilizaram os estudantes para vivenciar a representação de dados utilizando seus próprios corpos, solicitando que formassem uma fila, em ordem crescente (menor para maior altura) (Figura 9a). Aos estudantes com a mesma altura foi solicitado que estes ficassem uns atrás dos outros (“empilhados”), formando filas perpendiculares à principal, formando o “dot-plot humano”. Nesta figura vemos a pesquisadora solicitando à estudante que ocupava a 13ª posição para dar um passo à frente para sinalizar que a sua altura era a representante da altura mediana.

Na Figura 9b as pesquisadoras utilizaram uma fita métrica gigante (enquanto *ostensivo*) para mostrar aos estudantes, que estar um ao lado do outro, não significa que a distância seja a mesma e por isso é importante a representação na reta numérica. Na Figura 9c, observamos a representação dos dados do *dot-plot humano* no registro numérico, assume um papel importante para encontrar as medidas de posição, a mediana (M_d), o primeiro (Q_1) e o terceiro quartil (Q_3). Todavia, se faz necessária a conversão correspondente no registro gráfico, visando a real quantificação da variável “altura”, conforme mostrado na Figura 9d.

Figura 9

O papel da ação dos estudantes na representação e de ostensivos da variável altura

(a) A representação da mediana

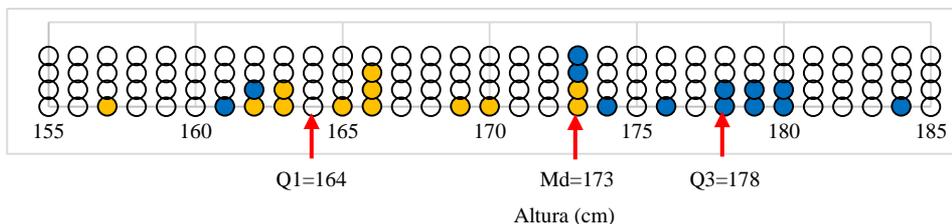
(b) o uso da fita métrica gigante



(c) o registro numérico e a determinação da mediana e dos quartis

Gênero	F	M	F	M	F	F	F	F	F	F	F	F	F	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
Altura	157	161	162	162	163	163	165	166	166	166	169	170	173	173	173	174	176	178	178	179	179	180	180	184	
Posição	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª	18ª	19ª	20ª	21ª	22ª	23ª	24ª	25ª
Estatística	Q1 = 164											Md				Q3 = 178									

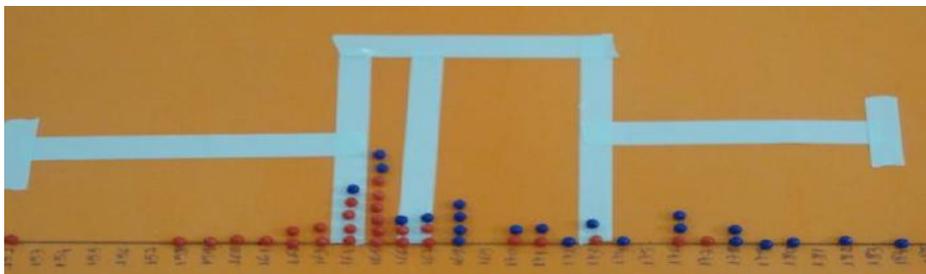
(d) o registro gráfico e a determinação da mediana e dos quartis



Quanto ao uso do material concreto, Silva, Kataoka e Cazorla (2014) trabalharam com 24 professores de Matemática do Ensino Médio, que construíram o *dot-box-plot* (Figura 10) utilizando a base de isopor, alfinetes/tachinhas coloridas para representar os pontos e fita crepe para desenhar o contorno do *box-plot*.

Figura 10

Dot-box-plot construído com material concreto (Silva, Kataoka & Cazorla, 2014, p. 4)



Santana (2020) avançou com a utilização dos *ostensivos* e da ação dos estudantes na gestão das variáveis quantitativas, no estudo do papel das variáveis estatísticas na contextualização da função afim. O autor utilizou o cubo estatístico (Cazorla & Santana, 2020) como *ostensivo* para representar sete variáveis, a saber: gênero (qualitativa com duas categorias), utilizando a cor do cubo, sendo laranja para as meninas e azul para os meninos, e nas faces do cubo a idade, altura e envergadura dos braços e a massa corpórea (contínuas discretizadas). O IMC (com um decimal) e as faixas de IMC (qualitativa ordinal). O autor utilizou fita métrica, balança digital e cubo estatístico no processo de representação, formação e representação das variáveis (Figura 11).

Para que os estudantes pudessem visualizar a distribuição das variáveis, o autor construiu quatro *banners*, sendo dois para análise univariada e os outros dois para a análise bivariada. O primeiro *banner* tinha três metros de comprimento e meio metro de largura (Figura 12), com uma malha quadriculada para representar a altura/envergadura dos braços (de 150 até 200 cm) e a massa corpórea (50 até 100 kg). Cada quadradinho media 5,5 cm de lado para acomodar o cubo estatístico, formado por quadrados de 5 cm de lado.

Para analisar a distribuição dos dados, Santana (2020) solicitou aos estudantes para que cada um colocasse seu cubo no *banner* (Figura 12a). Depois de todos os estudantes terem colocado os seus cubos no *banner*, o autor solicitou que eles descrevessem a distribuição dos dados (Figura 12b).

Para indicar o local onde provavelmente se encontraria a média, os estudantes utilizaram um estojo preto (Figura 12c).

Figura 11

O papel da ação dos estudantes na representação e dos ostensivos na representação de variáveis (Santana, 2020, Figura 55, p. 111)

(a) medindo altura

(b) medindo
envergadura dos braços

(c) medindo a massa
corpórea (peso)

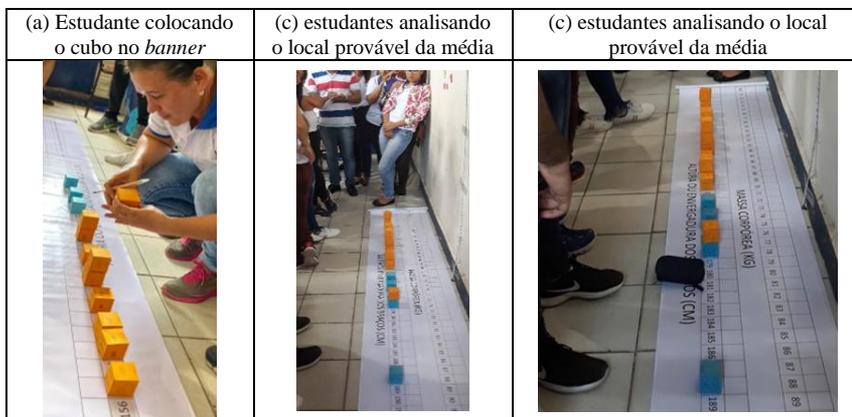
(d) escrevendo os
dados no cubo
estatístico



Para analisar a distribuição dos dados, Santana (2020) solicitou aos estudantes para que cada um colocasse seu cubo no *banner* (Figura 12a). Depois de todos os estudantes terem colocado os seus cubos no *banner*, o autor solicitou que eles descrevessem a distribuição dos dados (Figura 12b). Para indicar o local onde provavelmente se encontraria a média, os estudantes utilizaram um estojo preto (Figura 12c).

Figura 12

O papel da ação dos estudantes na gestão da variável altura utilizando o cubo estatístico (Santana, 2020, Figura 56, p. 113)



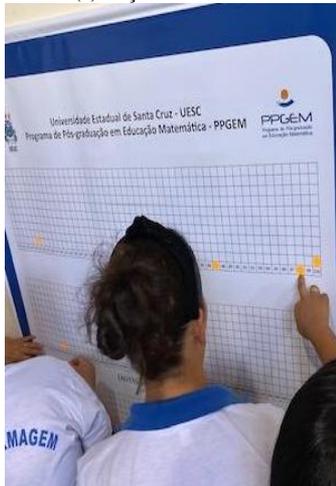
Neste caso, o cubo estatístico atua como um *ostensivo* que ainda mantém uma relação biunívoca com os dados dos estudantes, pois cada estudante reconhece o seu cubo. Portanto, a representação ainda guarda aderência com os dados dos estudantes.

O segundo *banner* foi construído para acomodar os adesivos circulares de 2 cm de diâmetro (Figura 13). Assim, cada quadradinho tinha 2,1 x 2,1 cm². A seguir, o pesquisador entregou adesivos circulares (laranja para as mulheres e azul para os homens) e solicitou que eles colassem nos locais respectivos às medidas que estavam no cubo (Figura 13a), construindo o *dot-plot* da altura, envergadura dos braços e massa corpórea, colorido por gênero (Figura 13b).

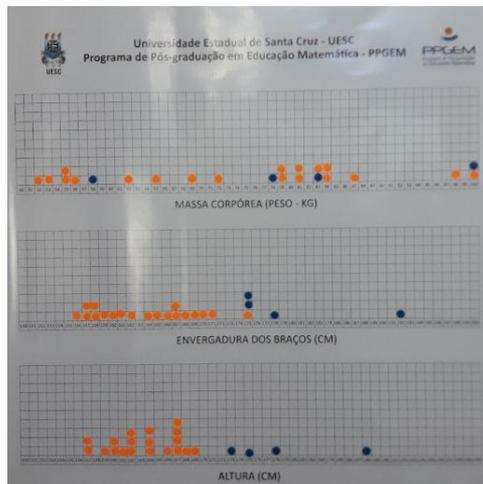
Figura 13

O papel dos ostensivos na gestão de representação e conversão de dados estatísticos do registro numérico para registro gráfico utilizando adesivos circulares coloridos (Santana, 2020, Figura 57, p. 113)

(a) a ação do estudante



(b) dot-plots construídos pelos estudantes com ostensivos



Como o *banner* era grande e estava colado na parede, assim que os estudantes terminaram de colar os seus respectivos adesivos, o autor solicitou que olhassem a distribuição dos dados, guiando-os com perguntas norteadoras do tipo: quem são os mais altos? Os mais baixos? Em que local deve se situar a média? Comparando a distribuição da altura e da envergadura, qual das duas é a mais variável? Comparando a distribuição da altura e da massa corpórea, qual é a mais variável? Os estudantes anotaram nos seus cadernos os seus palpites dos valores da média, que depois foram comparados com a média calculada mediante a utilização dos dados. O autor observou quão próximos foram os palpites dos valores da média. Essa estratégia de análise coletiva se mostrou muito promissora, pois um estudante complementava o raciocínio do outro, formando um conhecimento coletivo.

(c) A utilização de ostensivos na análise bivariada de variáveis quantitativas

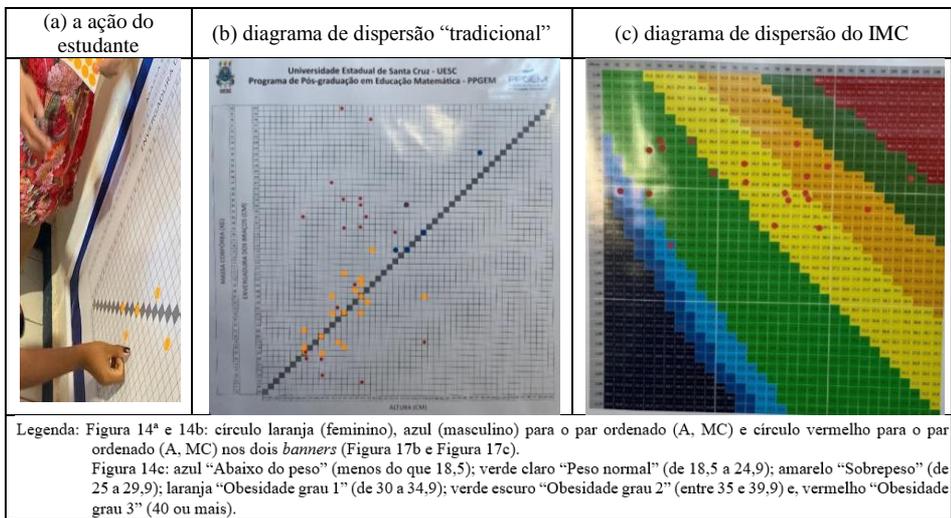
Para a análise bivariada, o autor construiu um terceiro *banner* simulando o plano cartesiano (Figura 14b), com 1,5m de lado, na abcissa

tinha a altura, cujas medidas variavam de 150 a 200 cm, em unidades; na ordenada tinha duas escalas, uma para a envergadura, tomando os mesmos valores da altura, e uma segunda escala para a massa corpórea, cujas medidas variavam de 50 a 100 quilos. A diferença para o plano cartesiano tradicional é que nele as linhas da malha se interceptam nos números inteiros; já nesta construção, os números se encontram entre as linhas de grade, a fim de comportar nesta malha quadriculada os círculos adesivos. Essa adaptação foi uma estratégia didática, a fim de representar as variáveis contínuas, que tiveram que ser discretizadas para poder utilizar o material concreto. Neste gráfico, as medidas das pessoas pequenas e magras se localizam no canto inferior esquerdo, as das pessoas magras e altas no canto inferior direito, as pessoas baixas e obesas no canto superior esquerdo e as das pessoas altas e obesas no canto superior direito.

O quarto *banner* (Figura 14c) é um diagrama de dispersão próprio para acompanhar o IMC. Ele tinha na abscissa a massa corpórea, variando de 46 a 110 kg, e na ordenada a altura, variando de 1,46 até 2,10 metros (ambas discretizadas, variando em uma unidade). A leitura se inicia no ponto (1,46 m; 46 kg), no canto superior esquerdo, sendo a leitura para a abscissa da esquerda para a direita e a leitura da ordenada de cima para baixo. Na interseção de cada medida encontra-se o valor calculado do IMC, que foi colorido segundo as faixas de IMC. Neste gráfico, as medidas das pessoas que se encontram dentro da faixa de normalidade se situam na diagonal, ligeiramente à esquerda (faixa verde), as medidas das pessoas com problemas de baixo peso se encontram na parte inferior da diagonal (faixa azul) e as medidas das pessoas com indícios de obesidade, acima da diagonal (faixas amarela, laranja, verde escuro e vermelha).

Figura 14

O papel dos ostensivos na gestão de representação e de dados estatísticos do registro numérico para registro gráfico utilizando adesivos circulares coloridos (Santana, 2020, Figura 57, p. 113)



Para realizar a análise bivariada, Santana (2020) solicitou aos estudantes que verificassem suas alturas (A) e envergaduras dos braços (EB), representados no cubo estatístico, que identificassem o par ordenado (A, EB) e colassem o círculo adesivo no quadradinho (azul para os homens e laranja para as mulheres) do terceiro banner (Figura 14a), formando uma nuvem de pontos bastante aderente a reta da igualdade ($EB = A$) e pediu que se posicionassem com relação à conjectura de Vitruvius que a envergadura dos braços é igual à altura ($EB = A$).

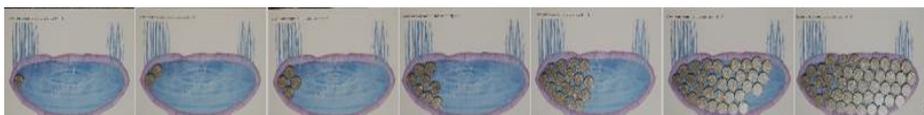
A seguir, o autor solicitou que os estudantes olhassem as suas alturas (A) e massas corpóreas (MC) e colassem um adesivo vermelho (sem distinguir o gênero) no local correspondente, construindo assim o diagrama de dispersão da MC e A (Figura 14b), cuja nuvem de pontos era tolamente dispersa, sem nenhum padrão.

Por fim, o autor, solicitou aos estudantes que olhassem suas alturas e massas corpóreas e colassem os seus respectivos adesivos no quarto banner (Figura 14c), quando os estudantes ficaram impactados ao constatar a tendência à obesidade da maioria deles.

A título de ilustração apresentamos o exemplo de simulação para a modelagem da função exponencial realizada por Correia e Cazorla (2020) – no contexto de covariação determinística –, inspirados no vídeo de Maurício Féo¹, que explica o crescimento exponencial no processo de eutrofização de um lago por vitórias régias, lançando a seguinte pergunta: “Até quando posso limpar o lago, antes de perder o controle e a vitória régia tome o lago?”. Neste caso, os autores propõem que os estudantes simulem o processo de eutrofização pela planta aquática *E. crassipes*, conhecida no Brasil como baronesa que, em condições ideais, consegue duplicar sua biomassa em um período de aproximadamente 15 dias, utilizando tampinhas de garrafa/moedas/feijões ou qualquer material concreto que tenha formato e tamanho iguais, para simular as baronesas e desenhar um lago em cartolina (Figura 15).

Figura 15

A simulação da eutrofização do lago pela baronesa, crescimento exponencial (Correia & Cazorla, 2020, Figura 3, p. 12)



O estudante sabe que o processo se inicia no período zero ($x=0$) com uma baronesa e a cada período a baronesa duplica a sua biomassa, em processo semelhante à meiose (divisão celular). Os autores sugerem que se trabalhe paralelamente o crescimento linear com taxa igual a dois e que sejam disponibilizadas uma tabela e uma malha quadriculada ou milimetrada para construir os gráficos no ambiente papel/lápis.

Neste processo, os estudantes têm as tampinhas como ostensivos que representam a quantidade de baronesas no lago a cada período e, além disso, a ação do estudante em adicionar tampinhas a cada período poderá ser um potencializador para que compreenda a covariação presente na simulação pois, estrategicamente, o estudante poderá contar a quantidade total de tampinhas que deve ter no lago a cada período ou identificar que, dada a quantidade existente no período X_n , ele deve adicionar somente uma

¹ <https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml>

quantidade $X_{n+1} - X_n$ para completar a quantidade necessária em X_{n+1} . Ou seja, ao trabalhar com esse raciocínio, completando a quantidade que falta, o estudante poderá, por meio de sua ação, desenvolver a noção da covariação, identificando que na situação linear o incremento é igual em todos os períodos, porém, na situação exponencial, este incremento vai sendo maior a cada período.

Para a covariação estatística os autores propõem o acompanhamento da quantidade de casos acumulados dos infectados e óbitos pela Covid-19, que no momento de expansão podem ser modelados pela função exponencial. Todavia, esses dados são secundários, de forma que os estudantes não têm ação direta, a não ser procurar nas fontes oficiais. Além disso, dificilmente poderemos utilizar *ostensivos* na sua representação, até porque a ordem de grandeza ultrapassa os milhares, sendo necessária a utilização de planilhas eletrônicas ou *softwares* matemáticos/estatísticos gratuitos, como o *GeoGebra*, por exemplo, mas que não abordaremos neste trabalho.

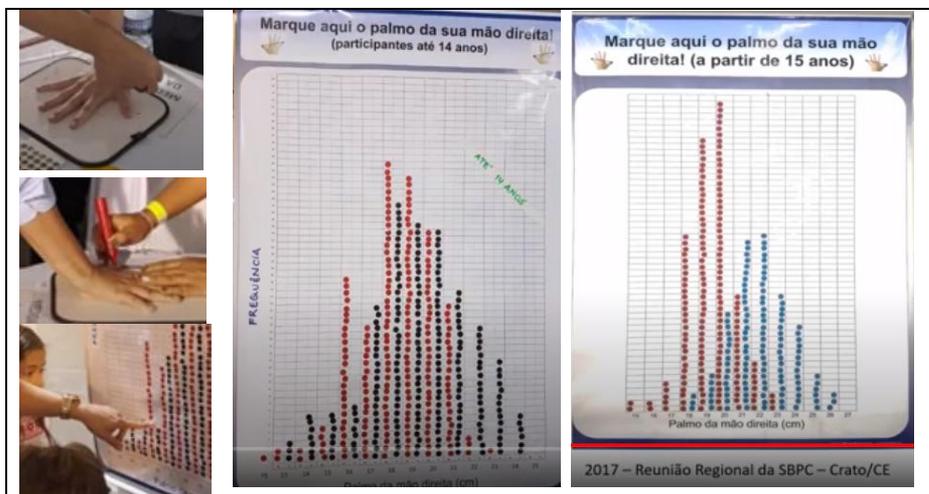
A título de sugestão de leitura adicional, Cazorla, Samá, Velasque, Diniz e Nascimento (2021) apresentam várias possibilidades para trabalhar com os conceitos estatísticos inerentes aos dados gerados no contexto da pandemia da Covid-19, no qual apresentam dois *applets* para simular o crescimento exponencial e a taxa de contágio, sensibilizando os estudantes sobre a importância da adesão às medidas de prevenção, tais como a utilização de máscara, evitar locais fechados, aglomeração e como isso impacta nas trajetórias do gráfico – que mudam, muitas vezes, drasticamente.

Existem outros trabalhos em que os pesquisadores têm utilizado os *ostensivos* de forma bastante promissora, como “Vamos medir o palmo da nossa mão?”, realizado pela “Tenda Estatística”, liderada pelas Professoras. Lisbeth Cordani e Doris Fontes, da Associação Brasileira de Estatística, e que tem percorrido o país nos encontros da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência – SBPC, popularizando o ensino de Estatística, como podemos observar no vídeo no Youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=cqIQAXFO8Aw>).

Durante a visitação à Tenda Estatística nas reuniões da SBPC, as professoras Lisbeth e Doris encorajaram os visitantes a medirem o palmo da mão direita e colar um adesivo (vermelho para meninas e azul para meninos) em um dos *banners*, um para crianças e adolescentes (Até 14 anos) e outro para adultos (15 anos ou mais), conforme mostrado na Figura 16.

Figura 16

A utilização de ostensivos na popularização da Estatística (Tenda Estatística)



No vídeo supramencionado, a Professora Cordani contextualiza e analisa as possibilidades para a compreensão das ideias fundamentais da Estatística, como a diferença por gênero, por faixa etária, a distribuição mais simétrica e concentrada dos mais velhos e mais espalhada dos mais novos, o que é explicado pela presença de crianças e adolescentes em pleno crescimento, dentre outros aspectos. Encorajamos os leitores a assistir ao vídeo e participar da experiência *on-line*.

CONCLUSÕES

As ideias fundamentais de Estatística apresentam um paradoxo. São ao mesmo tempo intuitivas e complexas, pois, apesar de não ter complexidade matemática nos seus conceitos, elas são difíceis de interpretar. O caso mais emblemático é o da média, haja vista que a maioria dos estudantes sabe calcular, mas não consegue atribuir significado, como mostra o trabalho de Santana (2020), quando solicitou que os estudantes dessem palpites sobre o valor da média da altura examinando a distribuição dos cubos no *banner*. Todavia, a partir de uma análise guiada por perguntas-chaves, os estudantes compreendem o real significado da média, tanto que seus palpites foram muito próximos ao valor calculado com os dados.

Além disso, um dos pontos-chaves é a definição e operacionalização das variáveis, a geração dos dados e como estes são transformados em estatísticas – tabelas, gráficos e medidas resumo. Nesse sentido, a utilização dos *ostensivos* e da ação do estudante na gestão dos conceitos nos parece ser um aspecto fundamental na aprendizagem.

Quando os estudantes participam de todo o processo, desde a coleta de dados, e acompanham como os dados se transformam em estatísticas, conseguem compreender e dar significado às medidas, como relatado por Cardoso, Nagamine e Cruz (2010, p. 8) sobre a fala da estudante, cuja altura era o valor mediano no *dot-plot* humano. Ela ficou tão impressionada que ao ver a mediana no diagrama da caixa disse: “aquele pontinho da mediana sou eu”. Ou, ainda, os estudantes de Santana (2020, p. 116), que exclamaram: “Precisamos cuidar melhor de nossa alimentação!” e “Das atividades físicas”. Esses depoimentos revelam que envolver o estudante em todo o processo de aprendizagem parece ser uma estratégia didática promissora.

Ao longo deste artigo pudemos constatar inúmeras possibilidades de utilização de *ostensivos* e esperamos que os Professores se sintam encorajados a utilizar materiais concretos manipuláveis à mão livre, envolvendo ativamente os estudantes em todo o processo de coleta e transformação de dados.

Todavia, como pode ser visto na construção dos *banners*, é preciso flexibilidade e atenção às modificações que devemos realizar para que os *ostensivos*, de fato, possam cumprir com o seu papel, auxiliando o estudante na captura dos dados e em sua possível transformação em diferentes registros de representação.

Com este artigo, esperamos ter construído uma reflexão teórica sobre o papel do material concreto manipulável à mão livre e da ação do estudante na produção do conhecimento estatístico, empoderando-o na leitura de mundo.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

I. M. C. é responsável pela concepção do trabalho, A. H. pelo quadro teórico da TRSS e TAD, C. V. S. forneceu os dados de sua dissertação de mestrado referente à contribuição das variáveis estatísticas na contextualização da função afim e G. S. C. está desenvolvendo sua dissertação com a modelagem da função exponencial e contexto de covariação determinística e estatística.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo primeiro autor deste artigo, I. M. C., mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

- Alsina, A. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*, 34(95), 25-48.
- Alsina, A., Vásquez, C., Muñoz-Rodríguez, L. & Rodríguez-Muñoz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la Covid-19 para Educación Primaria. *Épsilon*, 104, 99-128.
- Caetano, S. (2004). *Introduzindo a estatística nas séries iniciais do Ensino Fundamental a partir de material manipulativo: uma intervenção de ensino* (229 f.). Dissertação de mestrado, Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Cardoso, N., Nagamine, C. & Cruz, L. (2010). Uma sequência didática para o ensino de estatística: o homem vitruviano. In *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/MC/T11_MC401.pdf.
- Cazorla, I. & Oliveira, M. (2010). Para saber mais. In I. Cazorla e E. Santana (Orgs.). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico* (pp. 113-144). Via Litterarum.
- Cazorla, I., Henriques, A. & Santana, C. (2020). O papel dos Ostensivos na representação de variáveis estatísticas qualitativas. *Bolema*, 34(68), 1243-1263. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a19>.
- Cazorla, I., Santana, C. (2020). O cubo estatístico: material para trabalhar variáveis estatísticas. 2020. In *Anais X Congresso Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas*. http://congreso.pucp.edu.pe/xciem/wp-content/uploads/sites/59/2019/02/XCIEM_programa_resumenes_14_02_2020.pdf.

- Cazorla, I., Samá, S., Velasque, L., Diniz, L. & Nascimento, L. (2020). Reflexões sobre o papel da Educação Estatística na formação de professores no contexto da pandemia da Covid-19. *JIEEM*, 13(4), 1-21.
- Cazorla, I., Utsumi, M. & Monteiro, C. (2021a). Variáveis estatísticas e suas representações em gráficos: reflexões para seu ensino. *Números*, 106, 23-32.
- Cazorla, I., Utsumi, M. & Monteiro, C. (2021b). Dos dados brutos à informação: o papel das técnicas transnumerativas no ensino de Estatística. *Educ. Matem. Pesq.*, 23(4), 109-139.
<https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p109-139>
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 19(2), 221-266.
- Correia, G. & Cazorla, I. (2020). A função exponencial no Ensino Médio: Uma proposta alinhada à BNCC. In: *Anais I Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática*. (pp. 1-15). UNEMAT.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 21st*, Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). 24th*, Hiroshima, Japan, July 23-27, 2000. Volume 1; see ED452 031.
<https://eric.ed.gov/?id=ED466737>.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

- Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais* (1ª ed.). Livraria da Física.
- Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. In: Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales. *Resúmenes del VI Coloquio Internacional*. (pp.14-17). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Fielding-Well, J. (2018). Scaffolding Statistical Inquiries for Young Children. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris & E. Paparistodemou (eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education, supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 109-128). Springer. (eBook). <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7>.
- Henriques, A. (2019). *Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias*. Via Litterarum.
- Lima, R., Bezerra, F. & Valverde, M. (2016). Uso de materiais manipulativos: oficina “mãe dinada” como introdução ao estudo de probabilidade e estatística. In: *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6058_3776_ID.pdf.
- Magina, S., Lautert S. & Cazorla, I. (2021). A Teoria dos Campos Conceituais na sala de aula. In S. Magina, A. Spinilo, S. Lautert (Org). *Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática. Teorias, Pesquisas e Salas de Aula* (in press).
- Ministério da Educação - MEC (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília. MEC. 92 f. <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>.
- Ministério da Educação - MEC (2014). *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Grandezas e Medidas*. Brasília: MEC. <https://wp.ufpel.edu.br/obeducpacto/files/2019/08/Unidade-6-3.pdf>.
- Ministério da Educação - MEC. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC. 600 f.
- Nascimento, R. (2007). *A formação de conceitos elementares do conteúdo do tratamento de informação com auxílio de material concreto: uma intervenção de ensino* (186 f.). Dissertação de mestrado, Ensino de

Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

- Oliveira Junior, A. & Vieira, M. (2015). A Educação Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental: estado da arte. *Triângulo*, 8(2), 33-52. <http://seer.uftm.edu.br/revistaelectronica/index.php/revistatriangulo/article/view/1410/3>.
- Oliveira, T. (2020). *Contribuições das disciplinas de Estatística na formação do futuro professor de Matemática para a Educação Básica* (178 f.). Dissertação de mestrado, Educação Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, Brasil.
- Oliveira, P. & Paim, S. (2019). O mapeamento de pesquisas brasileiras sobre o letramento estatístico de 2006 a 2018. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, 3(2), 669-699. <https://doi.org/10.33238/ReBECCEM.2019.v.3.n.2.22631>.
- Pfannkuch, M. & Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, 1(2), 4-21.
- Porciúncula, M. & Schreiber, K. (2019). Sala de aprendizagem de estatística – SALAESTAT: um ambiente para interação e cooperação. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 9(2), 30-47. https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/317.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., L. Muñoz-Rodríguez, L., Vásquez, C. & Alsina, Á. (2020) ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números*, 104, 217-238.
- Santana, C. (2020). *Relações entre variáveis estatísticas na contextualização e apropriação da função afim* (163 f.). Dissertação de Mestrado, Educação Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus.
- Santos, R. (2015). *Estados da arte e história da pesquisa em Educação Estatística em programas brasileiros de pós-graduação* (347 f.). Tese de doutorado, Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Santos, T. (2018). *O contributo das atividades experimentais para a aprendizagem científica de um grupo de crianças em Educação Pré-*

Escolar e em alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico (164 f.).
Dissertação, Mestrado, Instituto Superior de Ciências Educativas,
Ramada, Portugal.

- Schreiber, K. & Porciúncula, M. (2019). Mapeamento das pesquisas sobre Educação Estatística na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações: um olhar para a formação do professor de matemática. *Revista eletrônica de Educação Matemática*, 14(e), 1-17.
<https://doi.org/105007/1981-1322.2019e.62799>.
- Selva, A. (2003). *Gráficos de barras e materiais manipulativos: analisando dificuldades e contribuições de diferentes representações no desenvolvimento da conceitualização matemática em crianças de seis a oito anos* (226 f.). Tese de doutorado, Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Silva, C., Cazorla, I. & Kataoka, V. (2011). O Homem Vitruviano. In I. Cazorla & V. Kataoka (Org.). *A Estatística vai à escola* (pp. 40-45). Editus.
- Silva, C., Magina, S. & Silva, E. (2010). Homem Vitruviano. In I. Cazorla e E. Santana (org.). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico* (pp. 80-93). Via Litterarum.
- Silva, C., Kataoka, V. & Cazorla, I. (2014). Analysis of teacher's understanding of variation in the *dot-boxplot* context. In: *Proceedings of the 9th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 9)*. Flagstaff, Arizona, USA: International Statistical Institute, July.
http://icots.net/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_3A2_SILVA.pdf.
- Silva, D. (2019). Caixa estatística: otimizando o estudo de amostragem e estimação. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, 9(3), 223-234.
<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/4931/3074>.
- Tavares, F. & Lopes, C. (2019). Mapeamento do uso do Geogebra no ensino de Estatística. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14(e), 1-20. <http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e62800>.
- Vendramini, C. & Magina, S. (2010). Germinação das sementes. In I. M. Cazorla e E. Santana (Orgs.). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico* (pp. 94-105). Via Litterarum.

Watson, J. (1996). What's the point. *The Australian Mathematics Teacher*, 52(2), 40-43.