ACTA SCIENTIAE

CC BY

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7064

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos: Análisis de la Demanda Cognitiva en Tareas Matemáticas Escolares

Jenny Patricia Acevedo-Rincón [a]
Campo Elías Flórez Pabón [b]

[a] Universidad Industrial de Santander, Escuela de Educación, Bucaramanga, Colombia.
[b] Universidad de Pamplona, Departamento de Filosofía, Pamplona, Colombia.

Recibido para publicación 26 mar. 2022. Aceptado después de revisión 13 dic. 2022.
Editor designado: Thiago Pedro Pinto.

RESUMEN

Antecedentes: El contexto de la investigación es la enseñanza sincrónica de matemáticas visualizadas a través de señas, como es la lengua de señas colombiana, que son accesibles al público, especialmente para los sordos escolarizados. **Objetivos:** Analizar la demanda cognitiva de 4 Tareas Matemáticas Escolares desarrolladas como lecciones de geometría sincrónica propuestas para la población escolar sorda en Colombia. **Diseño:** Investigación cualitativa, dentro del paradigma interpretativo, en el que se interpreta el fenómeno de enseñanza de clases de geometría sincrónica, a partir del análisis de contenido de la demanda cognitiva del Modelo Teórico de Tareas Matemáticas Escolares en las clases. **Lugar y Participantes:** la investigación se desarrolla bajo observación no participante de las lecciones en video alojadas en el canal público del Instituto Nacional de Sordos en Colombia. Las clases son impartidas por un único profesor, en las que participan cien personas, que siguen las señas del profesor. **Recopilación y análisis de datos:** De las veintinueve lecciones sincrónicas alojadas en el canal, se seleccionaron las que se centraron en la enseñanza de geometría bidimensional (triángulos, sus características y propiedades, semejanza, congruencia y teoremas de Pitágoras) de manera que permitiera analizar los significados escolares de conceptos, definiciones y procedimientos a partir de la demanda cognitiva en estos. **Resultados:** Los resultados apuntan al desarrollo de treinta tareas, centradas en la memorización y uso de procedimientos sin conexiones. **Conclusiones:** Se evidencia la necesidad de reflexionar sobre los planes de lección, especialmente para la población sorda, además de la búsqueda de tareas que motiven el uso de procedimientos con conexiones y construcción de matemáticas. Además, es necesario incluir lo exploratorio-investigativo en la enseñanza de la geometría.

Palabras clave: Pensamiento espacial; Tareas matemáticas escolares; Demanda cognitiva; geometría bidimensional; triángulos.

Autor correspondiente: Jenny Patricia Acevedo-Rincón. Email: jepaceri@uis.edu.co

Spatial Thinking and Geometric Systems: Analyzing Cognitive Demand in School Mathematics Tasks

ABSTRACT

Background: The context of the research is the synchronous teaching of a mathematics visualized through signs, as is the Colombian sign language, which are publicly accessible, especially for the schooled deaf. **Objectives**: To analyze the cognitive demand of 4 School Mathematical Tasks developed as synchronous geometry lessons proposed for the deaf schooled population in Colombia. **Design**: Qualitative research, within the interpretative paradigm, in which the teaching phenomenon of synchronous geometry classes is interpreted, from the content analysis of the cognitive demand from the Theoretical model of Scholar Mathematics Task on the classes. **Setting and Participants**: the research is developed under non-participant observation of the video lessons hosted on the public channel of the National Institute of the Deaf in Colombia. The classes are taught by a single teacher, in which one hundred people participate, who followed the teacher's signs. Data collection and analysis: Of the twenty-nine synchronous lessons and hosted on the channel, were selected which focused on the teaching of two-dimensional geometry (triangles, their characteristics and their properties, similarity, congruence, and Pythagoras theorems) in a way that allows to analyze the scholastic meanings of concepts, definitions, and procedures from the cognitive demand on these. **Results**: The results point to the development of thirty tasks, centered on memorization and use of procedures without connections. **Conclusions**: It is evidenced the need to reflect on the lesson plans, especially for the deaf population, in addition to the search for tasks that motivate the use of procedures with connections and construction of mathematics. Moreover, it is necessary to include the exploratory-investigative in the teaching of geometry.

Keywords: Spatial thinking; School mathematical tasks; Cognitive demand; two-dimensional geometry; triangles.

Pensamento Espacial e Sistemas Geométricos: Análise da Exigência Cognitiva em Tarefas de Matemática Escolar

RESUMO

Contexto: O contexto da pesquisa é o ensino síncrono de uma matemática visualizada por meio de sinais, como é a língua de sinais colombianas, as quais são de acesso público, sobretudo para os surdos escolarizados. **Objetivos:** analisar a exigência cognitiva de 4 Tarefas Matemáticas escolares desenvolvidas em aulas síncronas de geometria propostas para população surda escolarizada da Colômbia. **Design**: A pesquisa qualitativa, dentro do paradigma interpretativo, na qual se interpreta o fenômeno de ensino das aulas síncronas de geometria, a partir da análise da exigência cognitiva do modelo teórico das Tarefas Matemáticas escolares (TME) nas aulas. **Ambiente e participantes**: a pesquisa é desenvolvida sob a observação não participante das videoaulas hospedadas no canal público do Instituto Nacional de surdos na Colômbia. As aulas são ministradas por um único professor, na qual participam 100 pessoas, que seguiam os sinais do professor. **Coleta e análise de dados**: Das 29 aulas síncronas e hospedadas no canal, foram selecionadas as que focavam no ensino da geometria bidimensional (triângulos, suas características e suas propriedades, teoremas de semelhança, congruência e Pitágoras) de forma que permita analisar os significados escolares dos conceitos, definições e procedimentos a partir da exigência cognitiva sobre estes. **Resultados**: Os resultados apontam para o desenvolvimento de 30 tarefas, centradas em memorização e uso de procedimentos sem conexões **Conclusões**: Se evidencia a necessidade de refletir sobre os planos de aula, sobretudo para a população surda, além da procura de tarefas que motivem o uso de procedimentos com conexões e construção das matemáticas. Além disso, é necessário incluir o exploratório-investigativo no ensino da geometria.

Palavras-chave: Pensamento espacial; Tarefas Matemáticas Escolares; Exigência cognitiva; geometria bidimensional; triângulos.

INTRODUCCIÓN

El currículo de matemáticas en Colombia, está delimitado por los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), y también por otros documentos como los estándares básicos de competencias (MEN, 2006), los derechos básicos de aprendizaje de los estudiantes (MEN, 2016), en los cuales promueve una visión globalizada de las matemáticas como un área de saber obligatoria dentro del currículo institucional al interior de la Educación básica primaria, Educación básica Secundaria y la Educación media. En estos documentos se destaca que la enseñanza de las matemáticas debe guiarse por sus componentes denominados 'pensamientos matemáticos', los cuales se subdividen en áreas de especialización, a saber: numéricas, espaciales, métricas, variacional y aleatorio; a su vez, estos son desarrollados a partir de los procesos matemáticos de: razonamiento, ejercitación, modelado, resolución de problemas y comunicación); y, mediados por contextos en los cuales se pueden proponer situaciones de aprendizaje, tales como: el contexto matemático, el contexto interdisciplinar –a través de otras ciencias–, y el contexto de lo cotidiano.

Las orientaciones generales motivan hacia la formación de ciudadanos matemáticamente competentes, lo que implica que los estudiantes estén en la capacidad de *saber hacer* y/o aplicar los diferentes pensamientos y procesos para desarrollar diversas situaciones (MEN, 2006). Sin embargo, los profesores han adaptado dichos lineamientos a la autonomía institucional regida por los planes de área de cada uno de los grados que conforman la escolaridad en Colombia. Por lo que, no es fácil encontrar un modelo único de enseñanza nacional, pues también dependerá de las realidades de las aulas, y de los movimientos (migratorios de población estudiantil y docente), las dinámicas familiares y sociales, entre otras que ocurren al interior de las diferentes ciudades colombianas. Lo que influye y trasciende la simple comprensión de los objetos matemáticos con los que se va a trabajar. Así mismo, no todos los pensamientos matemáticos son enseñados con la misma intensidad en las aulas regulares, lo que ha proyectado una importancia implícita de lo numérico y variacional sobre lo geométrico y aleatorio.

A pesar del reconocimiento de las contribuciones del desarrollo de habilidades de visualización, pensamiento crítico, intuición, resolución de problemas, y argumentación que puede ser desarrollada a partir del pensamiento espacial, se percibe que se invierte menos tiempo en estos aspectos en comparación con la enseñanza del pensamiento numérico. Otros aspectos que influyen en esta problemática son la enseñanza segmentada y aislada de los diferentes pensamientos al ser tratados como contenidos no secuenciales del currículo, correspondiente a dificultades heredadas de una formación docente escasa de transversalidad o de experiencias situadas en ambientes exploratorios (Acevedo-Rincón, 2018; González & Díaz, 2018). Tal como se evidencia en resultados de pruebas estandarizadas nacionales e internacionales realizadas en Colombia, donde se presentan evaluaciones con escenarios de resolución de problemas que requieren de la combinación de esta clase de pensamientos, como lo revelan los actuales reportes de investigación (Castro-Ávila & Ruiz Linares, 2019; Marmolejo-Avenía, G. A., Tarapuez-Guaítarílla, 2019; Rodríguez & Nates, 2021; Téllez, 2021; Martínez, 2021).

No muy distante de esta problemática, se encuentra la formación de la población sorda, no solo en Colombia, sino en Latinoamérica, en la que denotan las limitaciones que se tienen a la hora de implementar estrategias didácticas, pedagógicas y disciplinares para la población con discapacidad en aulas regulares, así como también de las necesidades de profesionales especializados para atender la enseñanza de las matemáticas escolares para garantizar el derecho de ser incluidos en los procesos formativos que son un derecho fundamental en la ciudadanía colombiana (Ladd, 2003; Meresman & Ullmann, 2020; Muñoz Vilugrón et al, 2020).

En este sentido, usualmente, tanto el lenguaje hablado como el escrito tienen diferencias substanciales que aún llevan a los oyentes a dificultades para interpretar textos y resolver problemas, estos se acentúan cuando el profesor no tiene formación en Lenguaje de Señas (LSC, para el caso de Colombia), lo que podría facilitarse si utilizan ayudas visuales para la comprensión (Ignatius, Nogueira & Da Silva, 2018). No obstante, es de aclarar que el uso de recursos gráficos por sí mismos no garantizan su comprensión o resolución de las situaciones.

Desde las necesidades presentadas para atender a la diversidad de grupos minoritarios invisibilizados por décadas, surge entre otros, la Declaración Universal de Derechos Lingüísticos (DUDL) para la población sorda (UNESCO, 1996) que garantiza su derecho a la participación. Así mismo, nace en 1997 el Instituto Nacional del Sordo (INSOR), como entidad pública de orden nacional, vinculado al MEN, y cuyo objetivo corresponde a promover el desarrollo y la implementación de políticas públicas para la inclusión social de la población sorda desde el sector educativo público y privado (INSOR, s/f). Estas acciones afirmativas frente la inclusión han logrado visibilizar la población sorda, y, en general, con discapacidad, ante sus necesidades y las responsabilidades de los entes territoriales para su cumplimiento (por ejemplo, c. f. decreto 1421 de 2017 del MEN, 2017).

Ante esta perspectiva, el compromiso del INSOR es mantener un contacto inclusivo con la población escolarizada de Colombia en condición de discapacidad auditiva, por lo que a través de clases transmitidas en vivo se logró reforzar algunos contenidos de todas las áreas, en el periodo entre 2017 y 2021, trasmitiendo entre cinco (5) y seis (6) lecciones al año en el área de matemáticas. Pero, el hecho de transmitir contenidos en vivo no garantiza el desarrollo de las habilidades y competencias matemáticas necesarias, ni la motivación para los diferentes razonamientos de los participantes, aún en transmisiones en las que no todos los participantes pertenecen a la población sorda, sino que son oyentes interesados en acompañar las clases (padres de familia, hermanos y/o profesores de estudiantes participantes) o motivados por la investigación sobre los modelos pedagógicos y didácticos de enseñanza de las matemáticas, o su aprendizaje (Riaño & Nicol, 2020; Ortega, 2020).

De acuerdo con estas inquietudes, la investigación pretende analizar la exigencia cognitiva de cuatro (4) Tareas Matemáticas Escolares (TME) desarrolladas durante las sesiones sincrónicas de geometría para la población sorda de Colombia. De manera que la investigación está orientada por la pregunta: ¿cuáles son los niveles de demanda cognitiva de las TME implementados para la enseñanza de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial durante las clases en vivo del canal INSOR en Colombia?

A seguir, se encuentra el sustento teórico frente a los niveles de Demanda Cognitiva (baja y alta), que pueden desarrollarse a partir de la selección e implementación de TME. Posteriormente se presenta el contexto de la investigación, del que fueron seleccionadas las TME analizadas según su demanda cognitiva. Para construir la conclusión en torno de la importancia de la enseñanza de la geometría y pensamiento espacial en la población sorda en Colombia.

REFERENCIAL TEÓRICO

Esta investigación presenta por marco teórico las bases de las TME desde la de demanda cognitiva y la de limitaciones de aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el contexto propio de las instituciones educativas colombianas.

De acuerdo con Stein y Smith (1998) una TME se define como "un segmento de la actividad de clase (de matemáticas) que se dedica al desarrollo de una idea matemática particular" (p. 268). Siendo que esta no es suficiente por sí misma para garantizar el aprendizaje sobre una realidad matemática específica, porque otros factores como los objetivos y la gestión de la clase influyen en cómo un profesor invita a participar de la tarea a los estudiantes, los cuales son pensados desde el ejercicio de la planeación de la clase (Acevedo-Rincón, 2017).

Diversos factores influyen en el análisis de aprendizaje de las TME; unos relacionados con la práctica del profesor (*knowledge of/for practice*) y otros relacionados con el estudiante desarrollado a partir de las orientaciones del profesor en la práctica al interior del salón de clase (*knowledge in practice*), como se anuncia en la Figura 1.

Esto implica que la TME es concebida desde la visión del profesor, la cual permite desarrollar en el estudiante sus competencias y conocimientos sobre situaciones particulares. Esto es, de acuerdo con la Figura 1, los conocimientos del profesor pueden ponerse en escena a partir de los conocimientos curriculares y conceptuales de las matemáticas de, y para la práctica escolar (*Knowledge of Learning Mathematics Standards* - KLMS), los cuales permiten organizar una planeación de la enseñanza a partir del conocimiento de la didáctica de la matemática, pero, también de las formas de aprendizaje de los estudiantes. En este punto, la tarea matemática escolar se manifiesta en un estado de organización (planeación) de las características de las tareas y de las demandas cognitivas que implican dicha planeación. Por último, lo anterior redunda en un conocimiento en la práctica que es implementado por el profesor al orientar e indagar sobre la tarea y posibles espectros de respuestas de la tarea matemática escolar, que permiten a los estudiantes identificar asuntos propios de la tarea, y razonar sobre las respuestas hasta consolidar su aprendizaje. Aspectos que pueden enriquecer el desarrollo de las TME basados en las normas de clase, instrucciones del profesor, actitudes y relaciones personales del profesor y del estudiante, así como de los ritmos de aprendizaje de los estudiantes y su compromiso con la clase.

Figura 1

Relación entre las variables incorporadas en la tarea y el aprendizaje de los estudiantes. (Adaptado de Stein, Grover & Henningsen, 1996, p. 459)

Otras perspectivas que enriquecen esta visión de las TME corresponden a lo propuesto por Moreno y Ramírez-Uclés (2016) en la que la tarea es vista como una acción matemática del estudiante, previamente planeada por el profesor como elemento de aprendizaje o evaluación, o la propuesta por Ramos-Rodríguez, Valenzuela-Molina y Flores (2019) en la que se encasilla su desarrollo a partir de las relaciones de la triada alumno-docente-contenido.

Figura 2

Taxonomía demanda cognitiva de las TME. (Adaptado de Smith y Stein, 1998, p. 348)

De acuerdo con Smith y Stein (1998), el análisis de las TME, pueden ser realizado a partir de descriptores primarios, como lo que se observan a primera vista de las TME y, secundarios, los que implican un análisis a profundidad de las tareas, su finalidad y contenido matemático necesario para su desarrollo. Además de estudiar la coherencia entre la instrucción de la tarea y su propósito para investigar las limitaciones de aprendizaje (errores y dificultades) y, finalmente, la demanda cognitiva (Smith & Stein, 1998).Así se presenta la taxonomía de la demanda cognitiva, generada por las TME, las cuales están divididas en las exigencias de bajo nivel, las cuales reconocen a la memorización y los procedimientos sin conexiones como base para el desarrollo de una tarea; y, las de alto nivel, las que reconocen los procedimientos con conexiones y la construcción de las matemáticas como elementos implicados en el desarrollo de las TME.

Como se destaca en la Figura 2, la demanda cognitiva de la tarea está basada en las características propias de resultados previos (Doyle,1988; Resnick, 1987; NCTM, 1991; Stein, Grover & Henningsen, 1996; Stein, Lane & Silver, 1996). Los cuales constituyen en una base conceptual adecuada para el análisis de las TME, en las que, los procesos de desarrollo de competencias matemáticas, está limitado a la planeación y oferta de las TME que motiven un desarrollo de exigencias cognitivas de alto nivel en la que los procedimientos y aprendizaje de conceptos, trasciende la simple ejercitación de algoritmos o memorización de conceptos y reglas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A partir de los descriptores de la demanda cognitiva de las tareas (Figura 2), se podrán caracterizar las tareas matemáticas escolares que se implementen para el desarrollo del pensamiento matemático, en el salón de clases. Sin embargo, esto no es exclusivo de un currículo escolar, pues las video clases del INSOR se proponen de manera abierta, no orientada por estandarización del conocimiento, sino por el reconocimiento del concepto matemático a partir de niveles trazados desde su planeación. De manera que, los estudiantes que asisten a la transmisión online de las lecciones en video tienen la posibilidad de participar de las tareas dentro de los tiempos estipulados dentro del desarrollo en vivo, vía chat en vivo, o *WhatsApp* del INSOR, y, si estas respuestas llegan durante la transmisión, entonces pueden ser retroalimentadas. Posteriormente, estas conversaciones quedan guardadas dentro la lista de reproducción de las clases de matemáticas en el canal institucional, los cuales pueden ser desarrollados posteriormente por los estudiantes a su propio tiempo, pero sin retroalimentación de la clase sincrónica, sino que, puede ser usada como recurso de refuerzo en casa, o por los profesores con estudiantes sordos o con baja audición, al interior de los colegios.

Por otra parte, autores como Gutiérrez y Jaime (2013) y Gutiérrez, Jaime y Alba (2014) han referido el estudio de las características de las tareas, en las aulas regulares bajo la necesidad de valorar los esfuerzos cognitivos de los estudiantes, y recíprocamente involucrando las prácticas docentes de planeación, alineadas con este objetivo. Por lo que, el planteamiento de las TME involucra pensar también en las limitaciones de aprendizaje de la geometría escolar. Dentro de las limitaciones más conocidas se encuentra la falta de formación de profesores de matemáticas con la especificidad de atender a la población sorda (Barham & Bishop, 1991), la simplificación de enunciados para transformarlos en formatos más comprensibles, o el acompañamiento de intérprete que comprenda los conceptos, señas, y traducciones de significados propios del quehacer matemático (Rosich & Serrano, 1998).

Por su parte, Balacheff (2000) afirma que las concepciones de los deficientes auditivos son más débiles que las de alumnos oyentes, en cuanto a las implicaciones lingüísticas como también en la clasificación de situaciones no dicotómicas y tareas que involucren imágenes en los contenidos. Así como también las referidas por Rosich et al (2006), en la que se evidencian dificultades puntuales al establecer relaciones entre palabras e imágenes, al interpretar propiedades matemáticas, al reconocer las posibilidades de definir caracterizando conceptos geométricos mediante propiedades diferentes, entre otras.

Aunado a esto, se mencionan obstáculos propios de las matemáticas que comparten con la población oyente. De acuerdo con Socas (2008) pueden proceder de distintas fuentes tales como: la complejidad del objeto matemático, los procesos de enseñanza, los cognitivos, o los afectivos de los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, Montes, Climent y Contreras (2022) consideran que un conjunto reducido de ejemplos puede constituirse en un obstáculo para que el alumno no llegue a la generalización de estos conceptos. Además, diferentes estudios revelan un estilo de enseñanza que, aunque promueven tareas para personas sordas, manifiestan una brecha con respecto a las de los oyentes, ya que el nivel es inferior al propuesto. Para estos últimos, considerar solo procesos cognitivos básicos, las cuales no atienden las necesidades de los sordos (Gallo, 2011).

METODOLOGÍA

Esta investigación con metodología cualitativa pretende analizar el fenómeno de enseñanza de las matemáticas escolares, durante la ejecución de las TME en las clases sincrónicas del modelo de clase abierta para la población sorda y de baja audición escolarizada en Colombia. Sin embargo, otro grupo de personas participaban en el desarrollo de estas, tales como padres de familia, profesores, familiares, entre otros, algunos oyentes con conocimiento de Lengua de Señas, y otros interesados en conocer la estructura de la clase. Además, se considera de tipo exploratoria y descriptiva (Hernández, Fernández & Baptista, 2014), en la que se pretenden interpretar e identificar los niveles de exigencia cognitiva de las tareas desde cada uno de los videos de acceso libre alojados en el canal de *YouTube* institucional del Instituto Nacional de Sordos de Colombia (INSOR).

Esta investigación es realizada en el marco de la enseñanza por medio de clases abiertas para la población sorda colombiana, en la cual, en promedio se realizan entre seis (6) y siete (7) clases por año, distribuidas a lo largo del año, entre 2017 y 2021. De las veinte y nueve (29) clases realizadas en dicho periodo, solo siete (7) de ellas fueron realizadas en el año 2019, y una (1) en el año 2021.

A continuación, la Tabla 1 presenta los nombres y contenidos de las video clases, la fecha en la que fue desarrollada, la duración y la cantidad de las TME propuestas para el desarrollo del contenido de la clase.

Tabla 1

Lista de video clases del Pensamiento espacial y sistemas geométricos. (Adaptada de la información de la lista de reproducción del canal INSOR educativo, https://www.youtube.com/playlist?list=PLyihWF0yVBhQklMXkBFmH2gMm8xtAjeVX)

Nombre de la clase	Fecha	Duración	Cantidad de TME por Clase
Propiedades triangulares en LSC_Clases en vivo de matemáticas	10/04/2019	1h09m32s	5

Clasificación de los triángulos en LSC_Clases en vivo de matemáticas	07/05/2019	1h02m29s	4
Construcción de triángulos en LSC_Clases en vivo de matemáticas	06/06/2019	1h05m24s	4
Teorema de Pitágoras en LSC_Clases en vivo de matemáticas	09/08/2019	1h21m19s	6
Semejanza de triángulos_Clases en vivo de matemáticas	03/09/2019	1h21m31s	5
Congruencia de triángulos en LSC_Clases en vivo de matemáticas	03/10/2019	55m18s	6

La Tabla 1 presenta cada uno de los temas y conceptos desarrollados en el año 2019. Para el caso particular de la propuesta de desarrollo del pensamiento espacial, a partir de tareas de geometría, en las video clases del INSOR, fueron propuestas seis (6) clases en vivo, enfocadas en la enseñanza de conceptos geométricos que de alguna manera son generales y transversales en todos los niveles de educación básica primaria, secundaria y media, por las mismas características de la población participante en las clases. De estos temas, fueron seleccionados para el análisis cuatro (4) TME que involucran: a. La construcción de triángulos dadas características de medidas de lados, b. ángulos internos, c. Teorema de Pitágoras y d. congruencia entre triángulos. Para el caso de la clase de resolución de problemas espaciales se orientó hacia la identificación de vistas y posiciones de formas tridimensionales en contraste con el enfoque dado a la geometría bidimensional del 2019.

Para el análisis de las video clases, se usó la observación como técnica que implica "poner atención a los detalles, poseer habilidades para descifrar y comprender conductas, ser reflexivo y flexible para cambiar el centro de atención" (Hernández, Fernández & Baptista, 2014, p. 403). Más aún, si el lenguaje de la clase no es el nativo del equipo investigador. Esto, motivó una inmersión de uno de los investigadores en cursos de lengua de señas colombianas (LSC) para comprender a profundidad lo expuesto, ante un eventual silencio de la audio descripción del intérprete que traducía la clase sincrónicamente. Además, no se encuentran todos los videos subtitulados (por los silencios), lo que impide un análisis fluido de los datos, en cambio, se hizo necesaria la repetición del mismo fragmento de video en varias ocasiones, para comprender lo que sucede, conforme relata Díaz-Cintas (2010) frente a la necesidad de subtitulado y audio descripción de lo que sucede durante el video, para efectos principalmente de comprensión de lo comunicado por el profesor y/o intérprete (para oyentes), pero además, ayuda a la población no nativa a situarse en el lugar del alumno y del profesor sordo. De acuerdo con Krippendorff (1990), con dicho conjunto de datos puede realizarse un análisis de contenido, estableciendo como unidad de análisis, el contenido matemático correspondiente al pensamiento espacial y los sistemas geométricos expuesto por el profesor e intérprete). Así las cosas, este análisis es de corte teórico-cualitativo, desde la comprensión de los niveles de exigencia cognitiva de cuatro tareas propuestas para la enseñanza de la geometría y sus limitaciones para el aprendizaje (errores, dificultades y obstáculos), lo que permitirá estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y sus procedimientos (Rico & Fernández-Cano, 2013). En este sentido, se estudia la estructura y análisis formal de conceptos, definiciones y procedimientos, sistemas de representación, que comprende las distintas notaciones (pictóricas, gráficas, simbólicas y de signos involucrados), además del análisis fenomenológico sobre la enseñanza en medios virtuales para población con discapacidad durante la pandemia, la cual en dicho contexto dota (totalmente) de sentido a los contenidos matemáticos que son objeto de estudio (Rico & Fernández-Cano, 2013), enfocado en la mirada sobre las tareas propuestas para la secuencia de clases.

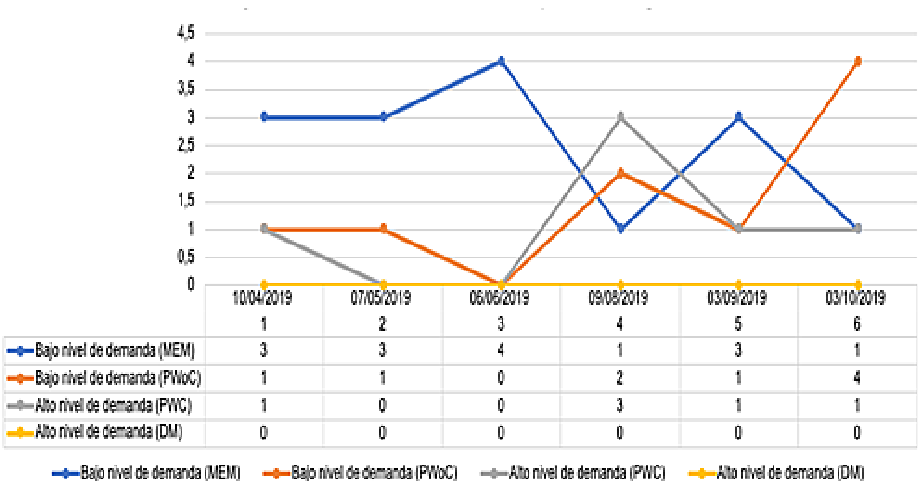
RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para efectos del análisis de las TME desarrolladas en el canal, centraremos la mirada en las que fueron desarrolladas para introducir, enseñar o ejercitar un tema en específico, pues permite evidenciar el orden y la secuencia de su desarrollo, durante el consecutivo de las clases (Figura 3), y no un tratamiento aleatorio como algunas de las video clases de 2020 y 2021, cuyo foco es la resolución de problemas de los diferentes pensamientos de la matemática, sin generar secuencialidad en su desarrollo.

En tal sentido, se propusieron treinta (30) TME en el desarrollo del módulo de geometría y pensamiento espacial, las cuales se transmitieron durante el año 2019. En estas TME puede destacarse las tareas de baja demanda en azul y naranja, caracterizadas como Memorización (MEM) y las correspondientes Procedimientos sin conexiones (PwoC), respectivamente. En gris y amarillo se registran las tareas de alta demanda cognitiva desarrolladas en el módulo de geometría, caracterizadas como: Procedimientos con Conexiones (PWC) y Construcción de las matemáticas (DM). De esto, es necesario destacar que, durante las seis (6) sesiones desarrolladas en el año 2019, ninguna de ellas fue caracterizada como DM; solo seis (6) se encontraron en la categoría PWC. En cambio, las tareas de baja demanda, azul y naranja en la gráfica sobresalen durante el desarrollo de las clases. Siendo estas las que predominan en el conjunto de tareas (24/30).

Figura 3

Demanda cognitiva en clases de vídeo de tareas de pensamiento espacial. (Adaptada de la información de la lista de reproducción del canal INSOR educativo https://www.youtube.com/playlist?list=PLyihWF0yVBhQklMXkBFmH2gMm8xtAjeVX)



En el mismo sentido, son descritas e interpretadas cuatro (4) que se relacionan con TME de diferentes niveles de demanda cognitiva como se evidencia en la Tabla 2. Allí se presentan los contenidos geométricos seleccionados para el análisis a partir del planteamiento de los niveles de demanda cognitiva de las TME para el módulo de pensamiento espacial y geométrico.

Tabla 2

Clasificación de contenido declarado para el análisis de demanda cognitiva

TME	Propósito	Contenido geométrico
1	Comprobar la medida de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo.	Ángulos internos.
2	Identificar que la suma de dos lados de un triángulo, deben ser mayor que su tercer lado, para conformar una figura plana cerrada.	Desigualdad triangular.
3	Comprobar el teorema de Pitágoras a partir de diferentes representaciones.	Teorema de Pitágoras.
4	Identificar la congruencia de dos triángulos por medio de la aplicación del criterio ALA.	Criterios de congruencia.

Nota. Las actividades aquí presentadas, fueron seleccionadas de las treinta (30) desarrolladas en el módulo de pensamiento espacial y sistemas geométricos, procurando que sean distribuidas en los diferentes niveles de Demanda Cognitiva (DM). No hubo en el desarrollo del módulo actividades de tipo DM.

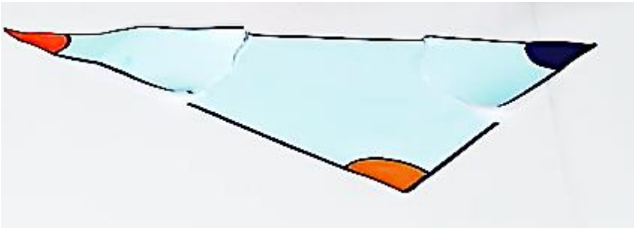
Es de resaltar que en la Tabla 2, se presentan las tareas seleccionadas, de acuerdo con los diferentes niveles de demanda cognitiva. A continuación, se presentan en detalle las cinco (5) TME y sus respectivos análisis sobre las clases.

TME 1. La Figura 4 contiene las representaciones que surgen al comprobar la medida de los ángulos internos como 180°. En un triángulo azul, se han demarcado los tres ángulos de su interior. El objetivo es comprobar que la suma de los ángulos adyacentes al ángulo naranja es 180°. Para este hecho se usa la representación concreta de la forma abstracta (triángulo).

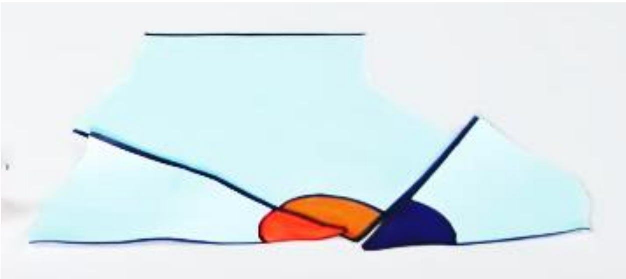
Durante los momentos previos de la clase, se ha caracterizado la forma triangular por el número de lados y ángulos. En esta ocasión, se pretende generalizar el valor de la suma de los ángulos internos, cuyo valor es constante (180º) independiente de los ángulos internos que conforman el triángulo.

Figura 4

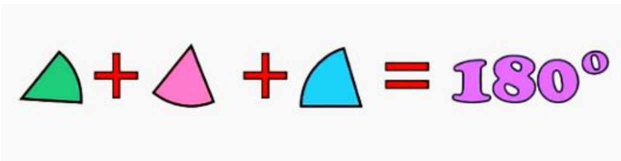
Comprobación de ángulos internos del triángulo. (Adaptada de la clase ‘propiedades triangulares en Lengua de Señas Colombiana Clase en vivo de matemáticas’ del canal INSOR educativo, https://youtu.be/DEaw2yKL10c)



a.



b.



c.

Para la verificación son usados cinco (5) triángulos (isósceles, rectángulo, acutángulo, equilátero y obtusángulo), que llevan al estudiante a pensar que independiente de las características de los ángulos o de los lados de los triángulos, siempre, su suma será 180°. Para esto, es importante que los estudiantes identifiquen el ángulo resaltado en colores rojo, naranja o azul (Figura 4a), que dispondrán de forma adyacente a los otros (Figura 4b).

Al analizar las limitaciones de aprendizaje esperadas para esta tarea se pueden identificar dos: las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y las que corresponden al aprendizaje deficiente de destrezas, hechos o conceptos o la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Al identificar el ángulo, como un espacio resaltado al interior del triángulo, se diluye el significado del ángulo como la representación de la abertura entre dos segmentos, y lleva al estudiante a la comprensión de este como una superficie subrayada, lo cual concuerda con lo señalado por Cañadas (2002), al señalar los casos particulares como base para llegar a conclusiones generales y refuerza lo propuesto por Balacheff (2000) y Rosich (2006) frente a la dificultad que representa la solución de tareas que involucran imágenes en los contenidos. Pero, al recortar los 'ángulos' posiblemente se formen nuevos triángulos, y no necesariamente una 'representación del ángulo', y si no se ha resaltado previamente el ángulo, difícilmente construirán el ángulo llano, juntando las tres partes recortadas, lo cual, para este caso particular promovería un error del estudiante debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento (Radatz,1979). Sin embargo, en la población sorda, este tipo de representaciones implicará conflictos a la hora de establecer relaciones entre imágenes, conceptos y propiedades, tal como lo anunció Rosich (1998; 2006).

De la misma forma, se repite el procedimiento con diferentes tipos de triángulos, lo cual no lleva al estudiante a indagar sobre la generalización del concepto de la medida interna de la suma de los ángulos. Pues al presentar los triángulos de diferentes tamaños, no se indica de manera intencional el afirmar que el nuevo triángulo corresponde a un triángulo con nuevas características de lados y ángulos, solo se resalta su diferencia, pero no se indica en qué radica tal diferencia. De manera que, el participante reiterativamente se implica en un aprendizaje deficiente de destrezas, hechos o conceptos o la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes (Radatz,1980). Así mismo, revela la necesidad de memorización de procedimientos, sin conexión próxima a las propiedades de los triángulos contenidos en la nueva representación.

Independiente de la prueba que sea realizada con diferentes tipos de triángulos, esta TME de baja demanda cognitiva, siendo de PWoC 02, ya que se requiere de procedimientos instrumentales, como medir ángulos (aproximados) con transportador, realizar la suma de tres números y comprobar que sea 180º (Figura 5c), o hacer coincidir los ángulos adyacentes resaltados con colores diferentes para que conformen una forma de base recta, o representen un ángulo llano.

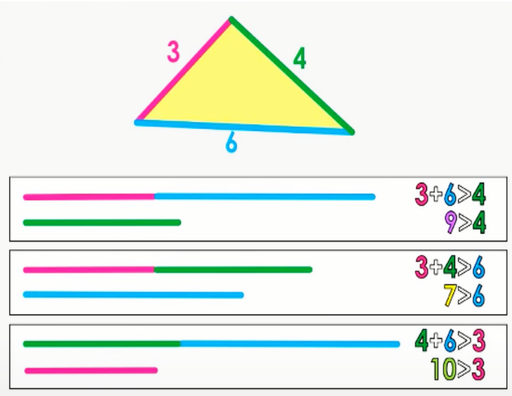
Para la comprobación del segundo tipo de triángulo, se sugiere un modo explícito de solución de la tarea, ya que es réplica de la primera tarea. Al hacerlo cinco (5) veces seguidas, simplemente se refuerza cuál es el camino por seguir del estudiante para la realización de la tarea, lo que implica una tarea de bajo nivel, y ya el alumno puede proyectar la respuesta a obtener, sin necesidad de realizarlo con material concreto.

TME 2. Posterior a la realización de otras TME en las que se modela la relación de los lados en *GeoGebra* basado en triángulos con lados de diferentes longitudes, el profesor procede a mostrar la tarea en la que usa material concreto (varas de diferentes tamaños). En esta TME, se propone el análisis de la desigualdad triangular, dada por la relación entre los lados del triángulo, en la que la suma de dos de sus lados será siempre mayor que el tercero como lo propone la Figura 5.

Figura 5

Representación de un triángulo construido con varas. (Adaptada de la clase 'propiedades triangulares en Lengua de Señas Colombiana Clase en vivo de matemáticas' del canal INSOR educativo, https://youtu.be/DEaw2yKL10c)

a.

b. 

En la figura 5a se presenta un triángulo construido con lados, cinco (5) unidades, tres (3) unidades y seis (6) unidades, en los que cumplen las relaciones: 5 +3 >6, 5+6>3 y 3+6>5. Posterior a esto, son presentados dos (2) ejemplos en los que la desigualdad no se cumple, como es el caso de los triángulos de dos (2) unidades, tres (3) unidades y seis (6) unidades, donde la suma de dos (2) de sus lados (dos unidades y tres unidades) es menor que el tercer lado y no alcanza a formar una figura geométrica (cerrada). También, el siguiente triángulo usando de dos (2) unidades, tres (3) unidades y cinco (5) unidades donde la suma de dos (2) de sus lados (2 unidades y 3 unidades) es igual al tercer lado (5 unidades).

Los tres ejemplos usados con el material concreto invitan a los participantes a indagar sobre la posibilidad de realizar comparaciones entre los lados, sin enunciar explícitamente la relación entre los lados. Al enunciar el cuarto ejemplo (Figura 5b) se enuncian las relaciones de la desigualdad triangular, con representaciones simbólicas del valor de los lados, de forma tal que cada color usado por un lado del triángulo representa su valor en el planteamiento de la desigualdad.

Al analizar las limitaciones de aprendizaje esperadas para esta tarea se pueden identificar tres (3) limitaciones: a. Las relacionadas con las representaciones de la desigualdad, b. el paso de lo inductivo a lo deductivo y c. las relaciones entre las magnitudes involucradas.

Esta tarea evidencia a falta de recursos para promover la indagación y comprobación del cumplimiento de la desigualdad para otro grupo de números que representen el valor de los lados. Lo que corresponde con las limitaciones relacionadas al aprendizaje del concepto de triángulo con base en la relación de representación-modelo, o ejemplos prototípicos (Climent, 2002) y, con el obstáculo causado a partir de un grupo reducido de ejemplos Montes, Climent y Contreras (2022).

Esto es para llegar a la generalización de lo que se pretende de la desigualdad, podrían usarse recursos como otras representaciones, preguntas con otros planteamientos que incluyan valores de los lados de un triángulo que cumplan con la condición de la desigualdad triangular (no necesariamente con números naturales). También, poner un nuevo ejemplo (con material o con números que representen los valores) y esperar a que los participantes confirmen si cumplirán con la desigualdad triangular. A este último, corresponde identificar las implicaciones de la falta de una interacción efectiva, que no permite desarrollarse a partir de la lectura de mensajes de los participantes, pues la participación fue nula (Cf. en https://youtu.be/DEaw2yKL10c [51:52 - 11:03:05]).

Esta tarea no trasciende a la enunciación de la desigualdad triangular como representación simbólica, debido a la heterogeneidad de población que participa de la clase, y se limita al uso de representación del número y equivalencia en colores (Figura 5b). Lo cual refiere a la necesidad de integrar elementos de la desigualdad triangular para promover la resolución de problemas desde la modelización de situaciones, en la que aproxime a los estudiantes a los nuevos conceptos para llevar a cabo procesos inductivos y deductivos según convengan (Rico, 2009). Esto puede convertirse en una dificultad posteriormente, al no reconocer la generalización de la ocurrencia en cualquier valor de los lados a, b y c, conforme refiere Rosich et al (2006).

De acuerdo con Porras (2013, p. 6), la desigualdad triangular presupone el establecimiento de relaciones entre las partes que componen la desigualdad, esto es, el valor de un par de lados con respecto al resto, sin implicar un necesariamente un razonamiento deductivo. Es posible que, con esta TME el estudiante pueda aplicar dicha situación en múltiples conjuntos numéricos, para el valor asignado a la magnitud de longitud de los lados, es decir, podrá hacer la transferencia de sus deducciones hacia los números Reales ($\mathbb{R}^+$). Sin embargo, presenta un número reducido de ejemplos que no permitirá llegar a la generalización (Montes, Climent, & Contreras, 2022) . Los ejemplos se limitan al reconocimiento de longitudes con valores enteros. Es decir, realizar algunos cuestionamientos hacia otros valores, incluso superiores a los usados con las longitudes del material concreto usado, promoverá la realización de conjeturas sobre el concepto, para identificar si los estudiantes comprendieron la esencia de dicha desigualdad y la construcción del triángulo.

Sobre todo, se garantizará el paso de figuras prototípicas Gutiérrez (2013) a otras propuestas por los mismos participantes, o tal vez, proponer cuestionamientos tales como la comprobación del cumplimiento de la desigualdad para grupos de tres (3) números que cumplan la condición de ser el valor del lado del triángulo rectángulo. Lo cual permitiría reconocer que el enseñar geometría, además del desarrollo del pensamiento espacial permite establecer relaciones aritméticas y algebraicas, teniendo por base las construcciones geométricas (Gutiérrez, 2002), siendo este un pretexto adecuado para trascender los niveles básicos de las nociones de los participantes (sordos y oyentes), y llevarlos a caracterizar conceptos geométricos mediante las propiedades de los números.

Esta TME es caracterizada como procedimiento sin conexiones (PWC03), en donde suelen usar representaciones con materiales manipulables y varios ejemplos donde se cumple la desigualdad triangular y donde no se cumple se revisa su causa (figura abierta, o lados sobrepuestos que no alcanzan a inclinarse para conformar una figura cerrada). Se concluye que, aunque los ejemplos utilizados para dar significado a la desigualdad triangular ayuden a la comprensión de dicho planteamiento, pero que pueden usarse cuestionamientos que permitan trascender la tarea hacia la generalización con otros conjuntos numéricos, los cuales, la población sorda encontrará con dificultad ya que el establecimiento de relaciones entre el concepto de desigualdad triangular, y sus representaciones (Rosich et al, 2006).

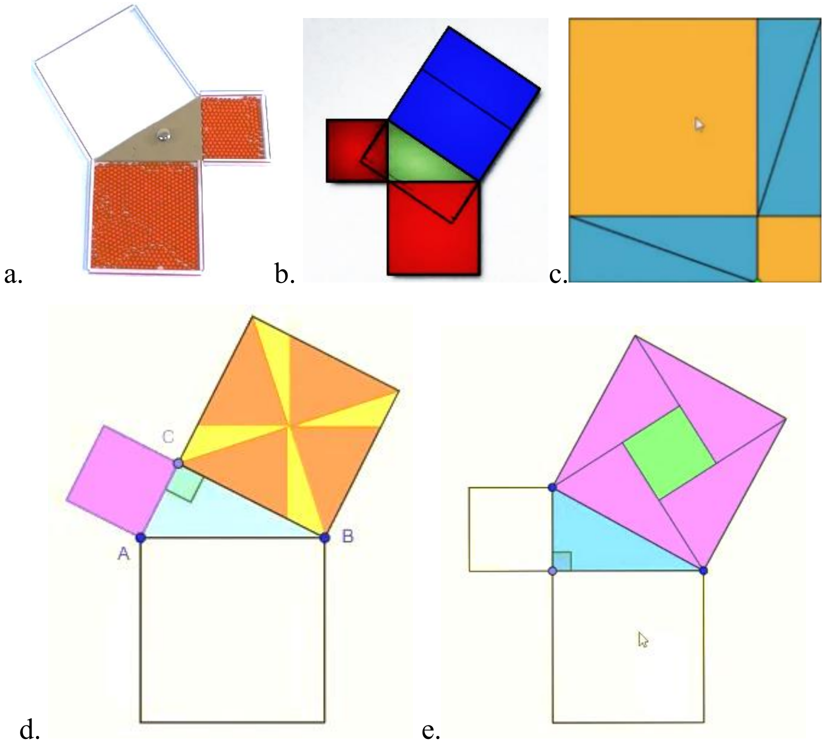
TME 3. La clase inicia con una contextualización de la representación algebraica del Teorema de Pitágoras. Posteriormente, se modelan cinco (5) formas diferentes de comprobar el Teorema de Pitágoras como lo presenta la Figura 6. En esta TME, se propone el reconocimiento de la representación algebraica del Teorema y su aplicación en diversas situaciones.

Esta TME pretende mostrar al estudiante la equivalencia del cuadrado de la suma de los lados de un triángulo rectángulo, con el cuadrado del valor de la hipotenusa, como se desataca en la Figura 6.

Para esto se usa la representación realizada a partir del vaciado de superficies (Figura 6a) y el movimiento de los cuatro modelos de *GeoGebra* (Figuras 6b, 6c, 6d, 6e) presentan la relación de equivalencia entre las 3 superficies cuadradas, dos (2) formadas a partir de los lados adyacentes al ángulo recto, y la tercera corresponde al cuadrado formado con el lado de la hipotenusa.

Figura 6

Comprobación del teorema de Pitágoras. (Adaptada de clase ‘Teorema de Pitágoras en Lengua de Señas Colombiana Clase en vivo de matemáticas’ del canal INSOR educativo, https://youtu.be/3b875GTTxNg)



Dentro de las limitaciones de aprendizaje analizadas para esta tarea se pueden identificar la limitación del concepto que representa el Teorema de Pitágoras, al uso de representaciones geométricas, y la poca comprensión de la demostración.

La presentación del Teorema de Pitágoras se reduce a la representación de este como la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, cuya demostración acostumbra a aparecer reducida a representaciones gráficas (Cañadas, 2001). Esto corresponde solo a una expresión del teorema, por lo que “los conceptos matemáticos no pueden confundirse con la forma de representarlos” (Troyano & Flores, 2016, p. 55). En particular, el tratamiento del teorema para este concepto se reduce a la reiterada presentación de representaciones de superficies triangulares para comprobar medidas longitudinales (lados del triángulo rectángulo), lo que implica solo relaciones entre los registros de representación simbólico y geométrico, sin trascender a la comprensión de la demostración y de las implicaciones de los triángulos allí presentados, que, de acuerdo con Socas (2008) no trasciende a la complejidad de la comprensión del objeto matemático.

A pesar de que se proponen diferentes representaciones sobre “la prueba” del Teorema de Pitágoras, no se promueve una reflexión por parte del estudiante que conduzca a la relación entre las distintas representaciones geométricas de la demostración (Altamirano-Chavarría, 2021). De manera que, hay necesidad de involucrar al participante en el uso de preguntas orientadoras que lleven a identificar aspectos comunes en las diferentes pruebas realizadas del teorema, conforme las definidas por Troyano y Flores (2016) como: la relación métrica entre superficies de los cuadrados (figura 6a, 6b, 6d, 6e), la relación métrica de las longitudes de los lados del rectángulo (figura 6c) y la condición necesaria y suficiente para que el triángulo sea rectángulo, la cual no está contenida dentro de las representaciones ejemplificadas de la figura 6).

La implementación de valores particulares para cada uno de los casos modelados, como ejemplos de aquella generalidad, permite que los estudiantes identifiquen la variación del valor de los lados de los triángulos rectángulos se vea en la modelación, sobre todo en la figura 6b, cuyos cuadrados (rojos y azules) pueden tener una variación en las longitudes de los lados. De acuerdo con Romero (2011, p. 47): “el aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos”, lo que implica proponer diversas representaciones, pero también conducir a generalizaciones y argumentos, que son necesarios en el aprendizaje de los contenidos matemáticos partir de criterios elegidos (Gutiérrez, 2013). Pero, en el ejemplo de la TME3 no se profundiza en las prácticas propias de las matemáticas, como motivar procesos deductivos, inductivos, generalizar o conjeturar a partir de los modelos del teorema presentados (Romero, 2011, p. 46).Por el contrario, se torna reiterativa la demostración, sin tener claridad sobre el tratamiento de las representaciones, lo que en palabras de Gallo (2011) da indicios sobre propuestas de nivel inferior de razonamiento (en contraste, por ejemplo, con propuestas hacia poblaciones oyentes) por considerar solo procesos cognitivos básicos que no atienden las necesidades de los sordos.

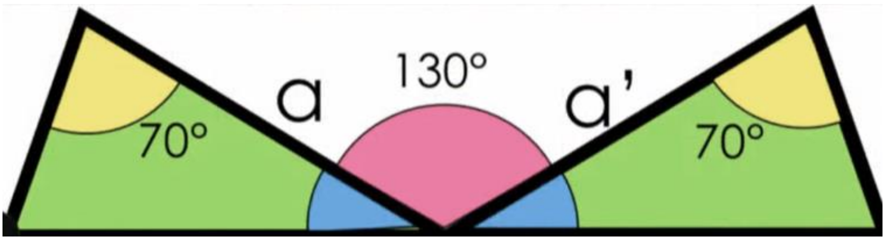
Esta TME es caracterizada como procedimiento con conexiones (PWC02), en el cual sugiere de modo implícito los caminos a seguir, los mismos que no permiten generalizar estos caminos, a partir de la comprensión respecto a las características de los triángulos rectángulos, y el uso del teorema para encontrar el valor de uno de sus lados, aunque se torne reiterativo. En esta tarea en particular, se hace necesario el uso de representaciones gráficas y la modelación de la variación de los lados para el cumplimiento de la equivalencia planteada por el Teorema. Así mismo, este tipo de tareas permite hacer conexiones con otras representaciones y características y relaciones del triángulo rectángulo, que permiten elaborar el significado del porqué se mantiene la equivalencia. Lo cual permitirá identificar la fácilmente el procedimiento de aplicación en tareas puntuales que impliquen la aplicación del Teorema para su resolución.

TME 4. En esta tarea se propone la identificación del uso del criterio Ángulo-Lado-Ángulo (ALA) para comprobar si la pareja de triángulos es congruente. La tarea es proyectada, con la forma construida (Figura 7).

En esta TME, se propone identificar la congruencia de dos triángulos por medio de la aplicación de algunos de los criterios previamente presentados.

Figura 7

Congruencia de triángulo (criterio ALA). (Adaptada de clase ‘Congruencia de triángulos en Lengua de Señas Colombiana Clase en vivo de matemáticas’ del canal INSOR educativo, https://youtu.be/3GlCzPOuq70)



Esta TME pretende mostrar al estudiante las características de los lados, ángulos externos, ángulos adyacentes, para relacionarlo con el criterio de congruencia entre triángulos: ángulo-lado-ángulo. En la figura 7, se muestran las representaciones usadas en distintos colores con los que pretenden relacionar ángulos equivalentes entre los dos triángulos, y también, señalan las superficies de los triángulos en color verde. Para ambos triángulos, se tiene un par equivalente de ángulos de 70º, resaltados en amarillo, y un par de ángulos adyacentes (azules) a un ángulo común (rojo).

La notación de los ángulos se ha realizado como un sector circular que denota superficie y no la medida de la apertura entre dos segmentos. Evento que coincide en los tres tipos de ángulos resaltados en colores amarillo, azul y rojo. Ante esto, y suponiendo que la porción resaltada en azul, sumado al ángulo común rojo, cuyo valor es 130º, se deduce que los ángulos son equivalentes, y su valor será de 25º. Posterior a esto, se procede a realizar la deducción del ángulo interno de cada triángulo, dado que previamente habían identificado el valor de la suma de los ángulos internos del triángulo (180º), para lo que obtienen que el ángulo que no se ha destacado, y que es parte de ambos triángulos, tiene un valor de 85º. Así mismo, para deducir la congruencia de ambos triángulos, se destaca la equivalencia de los lados a y a', para lo que se deduce que ambos triángulos son congruentes.

Al analizar las limitaciones de aprendizaje esperadas para esta tarea se pueden identificar las limitaciones relacionadas con la repetición de ejercicios a partir del criterio explicado; el reducido campo de ejemplos usados con los criterios, y la no presentación ejemplos en los que no se cumplan los criterios expuestos. La secuencia de clase deja ver que posterior a la aplicación de cada criterio se ejemplifica, por tanto, el ejemplo que se proyecta tiene que ver con el criterio recién explicado. Cada uno de los ejemplos presentados podría haberse desarrollado de forma inversa, en la que uno de los ejemplos no cumpliera con el criterio recién explicado, con eso se podría promover el uso de la flexibilidad mental frente al cuestionamiento, de qué conocimientos tiene, y qué conocimientos me harían falta para desarrollar la tarea propuesta. El uso de formas predeterminadas, y la falta de registros durante la explicación no permiten reconocer las características comunes de ambos triángulos en las cuales predominan recursos articulados con tres (3) sistemas de registro: gráfico, simbólico y viso-gestual (Calderón & León, 2016), que favorecen la comprensión de dichos conceptos.

Al igual que en la TME 1 (Figura 4), el ángulo es representado como una superficie (amarilla en la Figura 7) en la que se destaca en ambos casos en el mismo color. Además, en todos los ejemplos desarrollados, los triángulos aparecen con colores intencionalmente puestos para que sea más fácil identificar ángulos, y en consecuencia, la congruencia. Esto revela la simplificación del concepto (Gallo, 2011) al ofrecer un conjunto reducido de ejemplos, que no permiten razonamientos más elaborados sobre lo presentado (Montes, Climent, & Contreras, 2022), que impide llegar a la generalización. Además, no se presentan triángulos en los que los criterios no se cumplan, por lo que no es fácil identificar si el estudiante logrará la comprensión del criterio de congruencia, en ausencia del color o de los destaques dados intencionalmente.

Las figuras geométricas no han sido llamadas por sus vértices, lo que complejiza la denotación de los ángulos o lados, limitándolos a las representaciones de las partes de las figuras resaltadas como superficies o segmentos de colores como una estrategia de simplificación de enunciados o conceptos para hacerlos comprensibles (Rosich & Serrano, 19989). Lo anterior tiene consecuencias en la comprensión de los registros de representación simbólicas de los ángulos, los símbolos de equivalencia entre ángulos y lados, y la formalización de la deducción realizada, que, finalmente redundarán en el establecimiento de relaciones, clasificación y atribución de propiedades (Rosich et al, 2006), la cual se limita al conocimiento del lenguaje corporal, o a lo manifestado por la audio descripción o subtitulado de la transmisión en vivo.

Esta TME es caracterizada como tarea de memorización (MEM01), en el cual se plantea el uso de criterios para identificar congruencia, sin embargo, implican reproducir el análisis de ángulos y lados de un par de triángulos dados, en los que se repiten características como en ejemplos previos, con otros criterios dados (Lado-Lado-Lado y Lado-Ángulo-Lado). La comprensión del ejemplo y la identificación de características es sencilla, ya que las medidas de los lados, las características de los ángulos, y la identificación del ángulo restante, se hacen evidentes ante el destaque en colores, de lo que quiere resaltarse para la identificación y aplicación del criterio de congruencia.

En general, las cuatro (4) TME analizadas en permiten reconocer diferentes niveles de demandas cognitivas presentado en el referencial teórico de este artículo. En el que sencillas tareas pueden ser exploradas en diversas formas de manera que intencionalmente pueden alcanzar otros niveles de demanda cognitiva.

Finalmente, al analizar la demanda cognitiva (Smith & Stein, 2016) de cuatro TME, en las clases online propuestas para la población sorda escolarizada de Colombia, se lograron identificar distintos niveles de demanda cognitiva (MEM, PWoC, PWC y DM), en las que las TME no mantienen una constante en la cantidad de TME propuesta en algún nivel de demanda cognitivas, sino que pasa, por ejemplo, de una tarea PWC, para una MEM, o viceversa. Indistinto del concepto (geometría, medición, variación, numérico o aleatorio). Esto hace un énfasis en el desarrollo de pensamiento espacial; ninguna de las clases propuso o desarrolló tareas de alto nivel de tipo DM. No obstante, estas clases, pueden caracterizarse por medio de TME de baja demanda cognitiva, pues de las treinta (30) tareas propuestas, en el desarrollo de las seis (6) clases, veinte y cuatro (24) correspondían a baja demanda (15 de tipo MEM y 9 de PWoC), el resto de TME corresponden a Tareas de tipo PWC, concentradas en la clase 1, 4, 5 y 6.

CONCLUSIONES

Este artículo ha realizado una aproximación al análisis de las TME para la población sorda desde la propuesta del INSOR. Con ello, es posible identificar diferentes abordajes dados a los objetos geométricos y su abordaje mediante herramientas digitales para la población sorda.

Las acciones docentes incorporan diversos recursos en pro del aprendizaje del estudiante. En ella, la planeación de una clase y la selección e implementación de TME hacen parte de un ejercicio docente que involucra el aprendizaje de los estudiantes mediante la apropiación de estrategias y acciones para desarrollar el pensar matemáticamente (Acevedo-Rincón, 2017). Además, la apropiación de diversas estrategias converge en las acciones que el estudiante realice sobre los objetos matemáticos. Esto es una acción mediada por los diferentes momentos de la clase, que permite negociar significados, participar, equivocarse, volver al primer paso, o encontrar un posible camino de solución, para cada situación presentada, entre otros.

De acuerdo con el modelo propuesto por Stein, Grover y Henningsen (1996) y reformulado por la primera autora (Figura 1), está basado en el conocimiento *de la* práctica (Cochram Smith & Little, 1999; 2009). Adicionalmente, se evidencia el conocimiento *para la* práctica de enseñar matemáticas (Ball, Thames & Phelps, 2008; Cochram Smith & Little, 2009), el conocimiento pedagógico y didáctico del contenido matemático (recursos, currículo, características del aprendizaje, enseñar matemáticas a población con discapacidad, acciones e interacciones de los estudiantes frente a las TME, etc.).

Uno de los factores que lleva al reconocimiento de los bajos niveles de demanda corresponden a la diversidad de la población, pues es una clase abierta a la población escolarizada, y, en ocasiones, profesores padres de familia o intérpretes. Lo que implica, encontrar puntos comunes en la elaboración de TME en la que pueda participar la mayoría de la población que visualiza la clase.

Durante el desarrollo de los diferentes momentos de la clase, se presupone una actividad conjunta en dos vías, de estudiante a profesor y viceversa, las cuales son mediadas por el saber matemático (Acevedo-Rincón, 2018). En este sentido, la propuesta del INSOR permite identificar diferentes estrategias seleccionadas (Smith & Stein, 1998) e implementadas en el desarrollo de la clase. Dichas estrategias fueron usadas como contextos de las diferentes TME.

Al identificar la trayectoria de enseñanza usada por una clase modelo de matemáticas en vivo, del canal INSOR, se reconocen TME con diferentes características entre ellas, niveles diferenciados de las tareas que pasan de explicaciones básicas a otras con mayor dificultad. Así mismo, las ayudas audiovisuales son otro claro ejemplo de las diferentes formas de presentar la información, pues esta no se limita a la voz de fondo que acompaña y traduce al profesor intérprete, sino que, a su vez, las situaciones son modeladas a través de diferentes esquemas, y representaciones gráficas de las situaciones, o, en otras estas vienen desarrolladas a partir de un video que presenta un situación, tal como destacan Smith & Stein (1998) son prácticas que orientan discusiones productivas alrededor de un concepto matemático.

Particularmente, el análisis de las cuatro TME correspondientes al pensamiento espacial, se evidencian cuatro niveles de demanda cognitiva entre ellas, siendo que hay predominio de actividades de construcción que incluyen la visualización de material concreto, modelación o recreación de situaciones que viven los personajes (otros profesores) en la clase, que permiten movilizar la participación de la comunidad mediante el chat del canal o de los canales alternos de comunicación, por ejemplo, *WhatsApp*. Este tipo de TME garantizan la conexión de los participantes, así como la significación de los procedimientos expuestos o de los llamativos materiales usados para el desarrollo de las situaciones (Ignatius, Nogueira & Da Silva, 2018).

Cabe resaltar que estas tareas son preparadas con anterioridad por varios profesores (de matemáticas e intérpretes) que planean en conjunto (Fiorentini, 2013), y sus contenidos son abordados, de acuerdo con el sondeo de "necesidad" de explicación y/o profundización en los aspectos conceptuales, pero también, del desarrollo de procesos propios de la enseñanza-aprendizaje de la matemática como el razonamiento, ejercitación, comparación, modelación y/o resolución de problemas.

Cada una de las estrategias de enseñanza, incorporadas en las TME permiten que los estudiantes interactúen con el conocimiento matemático de diversas formas. La participación, como elemento constituyente en el aprendizaje (Wenger, 2013) mantiene varios factores que influyen en el normal desarrollo de una clase, concebida bajo el modelo de interacción alumno, saber y profesor. Por lo que una de las dificultades encontradas radica en la participación tardía entre las respuestas registradas en el chat y las preguntas preparadas por el profesor. Lo tardío obedece al desfase entre la herramienta de transmisión y el tiempo en el que llega la pregunta para ser respondida, y así mismo sucede con el retorno de las respuestas.

Los segundos vacíos en las transmisiones bajan los niveles de atención de quienes están conectados, los cuales son "ajustados" con saludos a los participantes; los cuales son aprovechados también para revisar si hay respuestas o preguntas en el número de *WhatsApp* habilitado para generar conversación entre los participantes. Así mismo se busca que las TME sean resueltas en el menor tiempo posible, por las implicaciones en el balance entre el tiempo de transmisión y la interacción de los participantes; esto es, a mayor tiempo al aire, menos eficiente la interacción de los participantes. Este tipo de respuesta requieren de una argumentación básica y el esfuerzo que esto demanda para los participantes es mínimo. El incluir más actividades de procedimientos con conexiones y/o construcción de las matemáticas involucraría limitar el número de TME a desarrollar en la clase, además de garantizar el desarrollo de otros procesos matemáticos diferentes a la ejercitación.

Al profundizar un poco más sobre el aprendizaje de los estudiantes sordos (y/o participantes oyentes) a través de las lecciones online, se destaca que este tipo de formato de clase, con encuentros sincrónicos con frecuencia bimensual entre lecciones, no permite realizar un acompañamiento individual de los participantes durante la sesión sincrónica, o en los tiempos entre sesiones. Pero, durante la sesión se evidencian algunas comprensiones de las explicaciones dadas en grupo, en la medida en que logran participar en el *chat* con preguntas o respuestas de las TME, o por medio de la realización de preguntas.

Lo anterior permite relacionar los niveles de demanda cognitiva de las tareas con la participación constante, y la manifestación de estrategias durante la sesión. Sin embargo, no se podría implementar una evaluación formativa entre los asistentes, pues no todos tienen garantizada la participación, ya sea por desconocimiento de algunos procedimientos base, o porque no se fomenta la competencia en la entrega las respuestas para ser proyectadas para el resto de la clase. Aun así, las respuestas enviadas por los participantes, cuando existen, son tenidas en cuenta y proyectadas en vivo (en su mayoría durante la sesión). Aunque las respuestas enviadas, no todas sean correctas, se garantiza por parte del profesor que esta tenga una retroalimentación de la solución de la TME de clase aun siendo ilegibles (ya sea por la escritura o por las señas usadas).

Así mismo, las TME que quedan para desarrollar posterior a cada sesión son resueltas al final de las sesiones en vivo, con base en las respuestas previamente seleccionadas de los participantes. Estas tareas, fueron contabilizadas como parte de la lectura de las seis (6) clases de pensamiento geométrico, siendo caracterizadas como TME de tipo PWoC 02 (TME1, clase del 07/05/2019), PWC03 (TME2, clase del 07/05/2019), PWC02 (TME3, clase 09/08/2019), MEM01(TME4, 03/10/2019). Esto es, de las seis (6) clases, cuatro (4) de ellas tuvieron TME extraescolar, y la mayoría de ellas (tres de cuatro) fueron de baja demanda cognitiva.

Esta propuesta del INSOR permite trascender la integración de la persona sorda, en un diálogo horizontal y simétrico entre las dos culturas (oyente y sorda). Esto implica permitir la participación de la persona sorda en distintos espacios, a medida que se incorpora y legitiman sus acciones a través de distintos medios (video, texto, gráficos, etc.) los cuales son valorados y retroalimentados durante las clases.

Es de resaltar que la producción e intercambio de saberes geométricos, durante las clases, no se limita al espacio físico bajo una denominación institucional como lo representa el INSOR. De manera que, las experiencias vividas a partir de las video clases, dejan diversos aprendizajes, como la construcción de espacios de interacción simétrica donde todos los participantes (sordos y oyentes) tengan el conocimiento de la lengua para garantizar interacciones no excluyentes y permitan aproximar al sordo a la comprensión de los espacios que habita y de la identidad en una ciudadanía intercultural, pero que tampoco son limitados a la comunicación en lengua de señas, sino que el intérprete hablante, pueda constituirse en un puente para todo aquel participante que entre a la clase, por ejemplo, por curiosidad de saber cómo son las interacciones con poblaciones diversas en las que prima la disminución o ausencia de la función auditiva.

Este artículo finalmente da cuenta de un análisis riguroso sobre tareas particulares que desarrollan el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, en los cuales se logra el objetivo de aproximación al reconocimiento, descripción y análisis de las TME abordada para conceptos y procesos particulares. Lo que constituye una invitación hacia la implementación de nuevos niveles de exigencia cognitiva en los que se permita a los participantes trascender la repetición de los procedimientos particulares, hacia el nivel de hacer matemáticas , por medio de la lectura oportuna de situaciones con conexiones (en la matemática, hacia su cotidiano, o hacia otras ciencias) que lleven a la formulación de hipótesis y permitan niveles superiores de argumentaciones, no limitando respuestas a un número (por ejemplo, el valor de la suma de los ángulos internos, en Figura 2) o la identificación de un teorema, propiedad, o característica en el desarrollo de situaciones netamente matemáticas (identificación de postulado, en Figura 5). Lo cual implicaría, un mayor reconocimiento de la población participante (fija), para profundizar en temáticas necesarias para que los estudiantes, principalmente, puedan desempeñarse adecuadamente en diversas situaciones, o en la presentación de pruebas 'estandarizadas', por ejemplo, para ingresar a la universidad.

Finalmente, aunque la propuesta es pionera a nivel nacional, y sus emisiones apoyan constantemente a la población sorda (y oyente) de Colombia, esta, debe continuar reflexionando sobre las posibles mejoras sobre una enseñanza más incluyente, en la que los recursos virtuales ofrecidos, no se limiten a las representaciones de los conceptos, sino que trasciendan al reconocimiento de características, propiedades y que a partir de estas, en los estudiantes se promuevan procesos propios del quehacer matemático, sin que se limite su aprendizaje a un conjunto reducido de opciones, o ejemplificación reiterativa de ejemplos que mudan de forma o color. Esto es las exigencias cognitivas para la población sorda debe trascender de la comprensión, que el oyente tiene sobre la educación matemática y, en cambio promover espacios de educación de población sorda desde las necesidades propias de la población colombiana.

DECLARACIÓN DE LOS AUTORES

La recogida de datos y el análisis preliminar fueron realizados por la JPAR. Ambos autores, CEFP y JPAR, discutieron la planificación del artículo y participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos producidos y que respaldan los resultados de este estudio pueden ser suministrados por los autores previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Acevedo-Rincón, J. P. (2017). O planejamento conjunto nas aulas de matemática: As experiências do uso do Lesson Study [comunicação]. In: *VI Seminário de Inovações em atividades curriculares*, Campinas, Brasil, 4p.

Acevedo-Rincón, J. P. (2018). *Aprendizagens profissionais docentes do (futuro) professor de Matemática situadas em um estágio interdisciplinar* [Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas] Repositório da produção científica e intelectual da Unicamp. https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1018401.

Acevedo-Rincón, J. P. & Flórez-Pabón, C. E. (2022). Children's lives in times of pandemic: experiences from Colombia. *Children's Geographies*, *20*(4), 404-411. https://doi.org/10.1080/14733285.2022.2078655

Altamirano-Chavarría, A. (2021) *Obstáculos Didácticos en el Aprendizaje del Teorema de Pitágoras, Noveno Grado "A" del Instituto Nacional San Ramón.* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua]. Eprints repository software. https://repositorio.unan.edu.ni/15427/

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. In N. Gregorio, J. Deulofeu, & A. Bishop. (Ed.), *Matemáticas y Educación*: *Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.70-88). Graó ICE-UB.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(1), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barham, J. & Bishop, A. (1991). Mathematics and Deaf Child. En K. Durvin, B. Shire, (Ed). *Language in Mathematical Education*: *Research and Practice* (pp. 179–187). Open University Press.

Benedicto, C., Jaime, A. & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. In C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153- 162). SEIEM.

Calderón, D. & León. (2016). Elementos para una didáctica del lenguaje y las matemáticas en estudiantes sordos de niveles iniciales. *Serie: Investigaciones.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://doi.org/10.14483/9789588972343

Cañadas, M. C. (2001). Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos. In J. M. Cardeñoso, A.J. Moreno, J. M. Navas & F. Ruiz, (Ed.). *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad*, (pp. 111-116). Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/258/1/CannadasM01-2718.PDF

Castro Ávila, M. & Ruiz Linares, J. (2019). La educación secundaria y superior en Colombia vista desde las pruebas. *Saber Praxis & Saber*, *10*(24), 341-366 Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). https://doi.org/10.19053/22160159.v10.n25.2019.9465

Climent, N. (2002). El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso. [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva]. Arias Montano. Repositorio Institucional. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2742

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. (1999). Relationships of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. *American Educational Research Association*,*24*(1) 249-305. https://doi.org/10.3102/0091732X024001249

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. (2009). Inquiry as Stance: Practitioner Research for the Next Generation. *Teachers College Press*, 392p.

Díaz-Cintas, J. (2010) La accesibilidad a los medios de comunicación audiovisual a través del subtitulado y del audio descripción. En L. González, y P. Hernúñez (Ed.) *El español, lengua de traducción para la cooperación y el diálogo*, (pp.157-180). Instituto Cervantes.

Fiorentini, D. Learning and professional development of mathematics teacher in research communities. *Sisyphus – Journal of Education*, *1*(3), 152-181.

Gallo, E. (2011). Algoritmo de signación en niños de primaria de una escuela para población no oyente de la ciudad de Cali. [Tesis de grado, Universidad del Valle].

González, A., & Díaz, A. M. (2018). Formación docente y desarrollo profesional situado para la enseñanza del lenguaje y matemáticas en Colombia. *Panorama*, *12*(22), 6-17.

Gutiérrez, C. (2002). *Didáctica de la matemática para la formación docente. Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica*, *22*(1), 1-158. https://ceccsica.info/sites/default/files/content/Volumen_22.pdf

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, (pp. 319-326). SEIEM.

Gutiérrrez, A., Jaime, A. & Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3- dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. In M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*, (pp. 405-414). SEIEM.

Ignatius Nogueira, C. M., Carneiro, M. I. N., & Silva, T. dos S. A. da. (2018). O uso social das tecnologias de comunicação pelo surdo: limites e possibilidades para o desenvolvimento da linguagem. *Revista Pesquisa Qualitativa*, *6*(12), 470–497. https://doi.org/10.33361/RPQ.2018.v.6.n.12.234

INSOR (s/f). Ley 324 de 1996 (octubre 11): *por la cual se crean algunas normas a favor de la Población Sorda*. http://www.suin-juriscol.gov.co/viewDocument.asp?id=1658178

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido*: teoría y práctica. Paidós.

Ladd, P. (2003). *Comprendiendo la Cultura Sorda, en busca de la Sordedad*. Gran Bretaña: Biblioteca del Congreso de la Catalogación en la Publicación de datos.

Liñán, M. M. (2017). Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria. [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva]. Arias

Montano. Repositorio Institucional. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/14230

Marmolejo-Avenía, G. A., Tarapuez-Guaítarílla, L. C., & Blanco-Álvarez, H. (2019). Geometría y medición en las pruebas saber-grado quinto ¿qué evalúan? *Revista EIA*, *16*(32), 55-64. https://doi.org/10.24050/reia.v16i32.1234

Martínez, J. G. (2021). *Evaluación por competencias para el área de matemáticas en contextos bilingües*: coherencia, retos y limitaciones [Tesis de maestría, Universidad La Gran Colombia]. Repositorio UGC. http://hdl.handle.net/11396/6949

Meresman, S.& Ullmann, H. (2020). COVID-19 y las personas con discapacidad en América Latina Mitigar el impacto y proteger derechos para asegurar la inclusión hoy y mañana. *Serie Políticas Sociales- CEPAL*. https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/46278/1/S2000645_es.pdf

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (1998). Matemáticas. In: *Serie Lineamientos curriculares*. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Matemáticas. DBA V2. Ministerio de Educación Nacional. https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (2017). Decreto 1421 de agosto 29 de 2017. *Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad*. https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-381928.html

Montes, M., Climent, N., & Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta*, *51*(1), 27-36. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8378188.pdf

Moreno Martínez, A., & Climent, N. de los Ángeles. (2021). Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono. *Unión - Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *17*(61), 1-20. https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/252

Moreno, A., Ramírez-Uclés, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Org.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 243-254). Pirámide.

Muñoz Vilugrón, K. A., Catin Quicel, G. K., Villanueva Vallejos, V. B., & Cárdenas Chávez, C. M. (2020). Coeducador y Modelo lingüístico: Presencia de la comunidad sorda en el contexto educativo chileno y colombiano. *Perspectiva Educacional*, *59*(2), 136-162. http://dx.doi.org/10.4151/07189729-vol.59-iss.2-art.1058

Ortega Diaz, K. (2020). Registros de representación semiótica en situaciones de suma y resta de números naturales empleados por estudiantes sordos usuarios de lengua de señas colombiana de básica primaria. Tesis (Maestría en Educación y Desarrollo Humano). Facultad de Ciencias Sociales y Humanas, Universidad de Manizales. https://ridum.umanizales.edu.co/xmlui/handle/20.500.12746/3858

Porras, M. (2013). La geometría del plano en la escolaridad obligatoria. Análisis de una clase. *Cuadernos de Educación* XI(11), 1-13.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 163-172. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.10.3.0163

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16–20.

Ramos-Rodríguez, E.; Valenzuela, M.; Flores, P. (2019). El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. In R. Olfos, E. Ramos, & D. Zakaryan (Ed.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (pp. 51-100). Graó.

Riaño, T., & Nicol, M. (2020). *Un estado de la investigación sobre la inclusión en el aula de matemática de personas con limitación auditiva durante los últimos diez años en Colombia*. Licenciatura en Matemáticas (tesis). Universidad Pedagógica Nacional. http://hdl.handle.net/20.500.12209/12450.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14 http://hdl.handle.net/11162/79435

Rico, L. & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y metodología de Investigación. En: Rico, L.; Lupiáñez, J. L.; Molina, M (Eds.). *Análisis didáctico en Educación matemática: metodología de la investigación, formación de profesores e innovación Curricular* (p. 1-22).

Mora Rodríguez, J. J., & Estrada Nates, D. (2021). La relación entre el desarrollo de los municipios y la puntuación en Matemáticas: un caso aplicado para Colombia. *Revista De Métodos Cuantitativos Para La Economía Y La Empresa*, *32*, 112–129. https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.4465 .

Rosich, N. & Serrano, C. (1998). Las adquisiciones escolares: aprendizaje en matemáticas. In Silvestre, N. (Coord.). Sordera. *Comunicación y aprendizaje* (pp.133-141). Mason.

Rosich, N., Jiménez, J., Latorre, R. M., & Muria, S. (2013). Diversidad y geometría en la ESO: el caso de alumnado deficiente auditivo. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, *8*(1), 51–68. https://doi.org/10.18172/con.557

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on Practice: Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344–50. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Smith, M. S. Y Stein, M. K. (2016). *Prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas*. Reston.

Socas, M. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática*, *XXI*(1),19-52.

Stein, M. K.; Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, Reston, *3*(1), 268-275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268

Téllez-Garzón, R. D. (2021). *Lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia y la formación sociopolítica de ciudadanos críticos y participativos*. Uniagustiniana. http://repositorio.uniagustiniana.edu.co/handle/123456789/1565.

Troyano, J., Flores, P. (2016) Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras. *Épsilon*, *33*(3), 51-60.

NESCO (1996). *Declaración Universal de Derechos Lingüísticos*. UNESCO. http://goo.gl/AqSUi1 .

Wenger, E. (2013). Uma teoria social da aprendizagem. In Illeris, K. (Org). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Traduzido do original por Ronaldo Cataldo Costa. (pp. 246-257). Editorial Penso.