ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7099

Teorema Fundamental del Cálculo: Requisitos Cognitivos y Limitaciones en el Aprendizaje de Tareas Matemáticas

Jenny Patricia Acevedo-Rincón [a]
Elisabeth Ramos-Rodríguez [b]
[a] Universidad Industrial de Santander, Escuela de Educación, Bucaramanga, Colombia
[b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemáticas, Valparaíso, Chile

Recibido para publicación 11 abr. 2022. Aceptado tras revisión 30 ago. 2022
Editor designado: Gabriel Loureiro de Lima

RESUMEN

Contexto: las tareas matemáticas para la docencia universitaria son generalmente de gran demanda cognitiva, sin pensar en las limitaciones que implican para sus alumnos. **Objetivos:** desarrollar un análisis teórico de las limitaciones de la enseñanza y la exigencia cognitiva de cuatro tareas propuestas para la enseñanza del cálculo, específicamente, el Teorema Fundamental del Cálculo. **Diseño:** desde el paradigma cualitativo, con un enfoque descriptivo-interpretativo, según la naturaleza de los datos recolectados. **Ambiente y participantes:** el estudio se enmarca en una Universidad Colombiana, en la disciplina "Cálculo II" para estudiantes de ingeniería del segundo semestre, donde un profesor concibe las tareas a implementar en este curso. **Recopilación y análisis de datos:** Los datos corresponden a los planes de lecciones del profesor, en particular, las declaraciones de las principales tareas matemáticas dentro de ellos. Estos planes se eligieron en función de la disponibilidad y la asequibilidad. Se realizó un análisis de contenido, considerando como unidades de análisis los párrafos o conjuntos de párrafos en la declaración de cada tarea matemática escolar. **Resultados:** La mayoría de las tareas propuestas corresponden a una alta demanda cognitiva (procedimientos con conexiones y construcción matemática) y solo una fue de baja demanda (memorización). Además, cada una de las tareas presenta su demanda cognitiva y varias restricciones de aprendizaje que, algunas de ellas, concuerdan con la literatura expuesta. **Conclusiones:** El trabajo pretende tener implicaciones para la educación superior, ya que para pensar una propuesta didáctica para un mejor abordaje de la enseñanza, es necesario configurar planes de clase que movilicen el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería, pero a partir del uso de Tareas con diferentes demandas de habilidades cognitivas, en las que variará de menos a más, y conducirá a un aprendizaje significativo para abordar nuevas tareas.

Palabras llave: Demanda cognitiva; tareas de matemáticas; teorema fundamental del cálculo; integrales; derivados.

Autora correspondiente: Jenny Patricia Acevedo-Rincón. Email: jepaceri@uis.edu.co

Fundamental Theorem of Calculus: Cognitive Demands and Learning Limitations on Mathematical Tasks

ABSTRACT

Background: mathematical tasks for university teaching are generally of great cognitive demand, without thinking about the limitations they imply for their students. **Objectives**: to develop a theoretical analysis of the teaching limitations and cognitive demand of four tasks proposed for teaching calculus, specifically, the Fundamental Theorem of Calculus. **Design** qualitative paradigm, with a descriptive-interpretive approach, according to the nature of the data collected. **Setting and Participants**: the study is framed in a Colombian University, in the subject "Calculus II" for second semester engineering students, where a teacher designs the tasks to be implemented in this course. **Data collection and analysis:** the data correspond to the teacher's lesson plans the statements of the main mathematical tasks within them. These plans were chosen based on availability and accessibility. A content analysis was conducted, considering as units of analysis the paragraphs or sets of paragraphs of the statement of each school mathematics task. **Results**: Most of the proposed tasks correspond to high cognitive demand (procedures with connections and mathematical construction) and only one was of low demand (memorisation). Moreover, each of the tasks presents its own cognitive demand and several learning constraints that, some of them, agree with the exposed literature. **Conclusions**: The work aims to have implications for higher education, since to think of a didactic proposal for a better approach to teaching is necessary to configure lesson plans that mobilize the learning of mathematics in engineering, but from the use of tasks with different cognitive demands, in which will vary from less to more, and lead to meaningful learning for the approach of new tasks.

Keywords: Cognitive demand; mathematical tasks; fundamental theorem of calculus; integrals; derivatives.

INTRODUCCIÓN

Se observa una preocupación en el profesorado de los diferentes niveles educativos por identificar y proponer tareas matemáticas para la enseñanza que no sean del mismo nivel de exigencia cognitiva o bien de extremos de esta. Tal como lo describen Itzcovich (2005), Ruiz-Olarría (2015) y Valer (2017), el plan de clases que se visualiza en el profesorado a nivel universitario incluye tareas matemáticas del mismo nivel de demanda cognitiva, que no pretenden una variabilidad en el desarrollo del pensamiento matemático para el conocimiento de los temas, o por el desarrollo de la flexibilidad mental, de manera que se usan para ejemplificar, los errores y dificultades típicas para su explicación o para su ejercitación. Esto provoca la tipificación de estilos de enseñanza de las matemáticas que no especifican en la didáctica los contenidos o procedimientos a enseñar, “sino a cómo los docentes prefieren enseñar y cuáles son sus procedimientos típicos o predominantemente empleados en el acto de enseñar” (Ventura, 2013, p. 11).

En consecuencia, se observa un estilo de enseñanza de la matemática marcado en prácticas que revelan niveles estáticos, centrado en prácticas cuyas decisiones y actuaciones docentes se corresponden con otros modelos epistemológicos usados a lo largo de la historia (Gascón, 2001) y tienen implicaciones dentro del aparato didáctico de la construcción de propuestas de enseñanza en los niveles escolares de educación básica, secundaria y media, donde se observa mayor diversidad de uso de tareas de distintos nivel cognitivo (Cárdenas, & Blanco, 2016; López, 2013). Sin embargo, vale la pena indagar sobre: ¿qué sucede en la educación superior? Estudios avalan que en este nivel escolar está marcado por estilos de enseñanza centrados en un alto nivel de exigencia para el desarrollo de las tareas, donde las actividades propuestas tienden a necesitar una alta exigencia cognitiva de los estudiantes (Kessler, Stein, & Schunn, 2015; Planas, 2004; Smith & Stein, 1998; Ursini, & Trigueros, 2006).

Teniendo en cuenta que lograr objetivos de enseñanza requiere de la implementación de tareas matemáticas de distintos niveles cognitivos (Smith y Stein, 2016), se hace necesario, identificar otros elementos que proyecten una enseñanza universitaria que considere estos niveles de exigencia cognitiva en las tareas matemáticas propuestas en el aula de educación superior, de manera de apoyar el aprendizaje regulado de sus estudiantes (De la Fuente-Arias et al., 2008; García & Benítez, 2013; Penalva, Posadas, & Roig, 2010), y no frustrar reiterativamente las aproximaciones de los estudiantes universitarios hacia el conocimiento de las bases teóricas, especialmente en la formación de ingenieros (Álvarez, & Ruíz-Soler, 2010; Cortés, Arellano, & Vázquez, 2019; García Retana, 2013).

Al respecto, Acero (2019) estudia la demanda cognitiva en textos universitarios relativos a la asignatura de álgebra lineal, obteniendo como resultado que cuatro de los cinco textos estudiados, superan la media en términos de presentar actividades de alta demanda cognitiva. El quinto libro está por debajo de la media en todas los componentes de alta demanda cognitiva que ellos definen, exceptuando el del cálculo algorítmico. Esto nos da luces que, a nivel universitario parece ser que se prioriza actividades de alta demanda cognitiva por sobre otras.

Por otro lado, García y Benítez (2013) presentan una propuesta para realizar la asignación de tareas que apoyen el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de primer año universitario. Sus resultados arrojan que el aprendizaje de los estudiantes se ve favorecido cuando existe congruencia entre la demanda cognitiva de las tareas, el contenido matemático de los problemas y los objetivos curriculares.

Por otra parte, una caracterización de la actividad de planteamiento de problemas en el dominio de la probabilidad por estudiantes universitarios a partir de la demanda cognitiva que se pone en juego, fue realizado por Penalva, Posadas y Roig (2010). En sus hallazgos, afirman que, a partir del análisis comparativo de las características de la actividad matemática de los grupos de estudiantes que han planteado problemas con un nivel alto de demanda cognitiva y los que lo han hecho con un nivel bajo de demanda, no fue posible establecer una relación entre el tipo de planteamiento efectuado por los estudiantes y la manera como resuelven en grupo los problemas con los conceptos tratados. Aun así, consideran que proporcionar un balance adecuado entre tareas de planteamiento y de resolución de problemas produce un efecto positivo en la enseñanza de la matemática a nivel universitario.

Por su parte, un tema relevante en la enseñanza del cálculo integral es la relación entre la antiderivada y la integral definida dentro del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) en el cual convergen elementos conceptuales del cálculo diferencial y las bases del cálculo Integral (Larson & Edwards, 2016). Por consiguiente, para su interpretación los estudiantes deben tener conocimiento sobre los conceptos base del TFC (Larson & Edwards, 2016), tales como: funciones continuas, derivación y sus propiedades, antiderivada y cálculos con antiderivadas. Esta variedad de elementos a considerar en su tratamiento puede generar una presentación del tema desde una alta demanda cognitiva, dejando de lado propuestas con distinto nivel cognitivo, lo cual se hace relevante a la hora de lograr objetivos de enseñanza (Smith, & Stein, 2016).

En este contexto, este artículo pretende desarrollar un análisis teórico de la exigencia cognitiva de cuatro tareas propuestas para la enseñanza del TFC y sus limitaciones para el aprendizaje (errores, dificultades y obstáculos). Para lo cual se pretende responder a la pregunta ¿Qué niveles de exigencia cognitiva se pone en juego a partir de los enunciados de tareas para la enseñanza del TFC. Además, ¿qué limitaciones en el aprendizaje presupone la enseñanza del TFC a partir del enunciado de tareas matemáticas para su enseñanza?

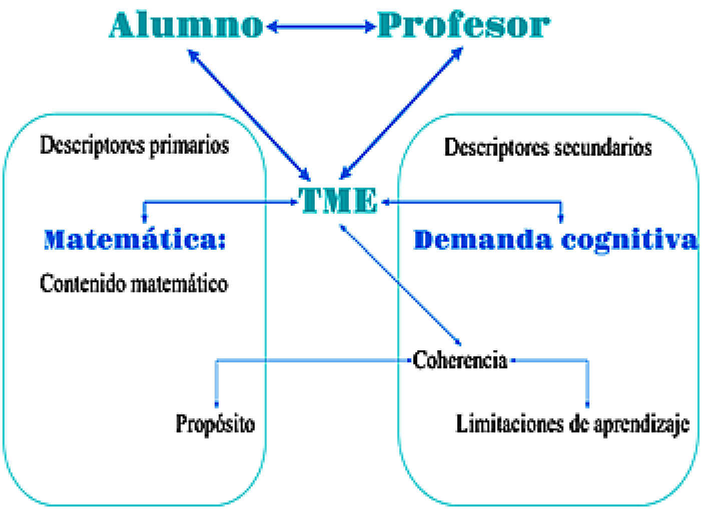
REFERENCIAL TEÓRICO

Nuestro marco de referencia teórico se basa en tres constructos: la noción de tarea matemática escolar, la de demanda cognitiva de esta y la de limitaciones de aprendizaje. Además, profundizaremos en el TFC de manera de contar con referentes teóricos sobre su aplicabilidad.

Entenderemos la noción de tarea matemática escolar como aquella propuesta para el alumno que implica una acción de él (actividad) frente a las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje (Moreno, & Ramírez-Uclés, 2016). Estas pueden ser analizadas desde distintas ópticas, una de ellas la presenta Ramos-Rodríguez, Valenzuela y Flores (2019) a partir de la tríada alumno-profesor-contenido implicado en el modelo ilustrado en la figura 1. El modelo propone una forma de abordar las tareas matemáticas escolares considerando el análisis y la discusión estimulada por descriptores primarios y secundarios de estas. Los primarios tienen que ver con lo observado a primera vista en las tareas matemáticas escolares, en específico, el propósito de esta y el contenido matemático que se pone en juego en su desarrollo.

Figura 1

Caracterización de tarea matemática escolar. (Ramos-Rodríguez, Valenzuela, and Flores, 2019)



Los descriptores secundarios requieren un análisis más profundo de la tarea, obliga a: i) estudiar la coherencia entre la instrucción del enunciado de la tarea y el propósito de esta, ii) indagar en las limitaciones de aprendizaje (errores, dificultades y obstáculos) y, iii) analizar la demanda cognitiva que la tarea involucra (Smith, & Stein, 2016) y que se deben considerar en su implementación.

Las limitaciones de aprendizaje se refieren a los posibles errores, dificultades y obstáculos que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Estas tareas matemáticas involucran modelación matemática, resolución de problemas, y otros relacionados con la comprensión lectora y apropiación del lenguaje simbólico, baja apropiación de conceptos previos como el dominio de la función (Gallardo, & Galindo, 2015; Guzmán, & Vallejo, 2004; Plaza-Galvez, 2016), de manera de apoyar al académico universitario en la elección de buenas tareas para la enseñanza del cálculo. Al respecto, los obstáculos pueden considerarse desde la perspectiva de Bachelard (2000) y Brousseau (1983), los cuales se categorizan en tres tipos: ontogénicos (limitaciones neurofisiológicas y de aprendizaje) epistemológicos (relacionados con el origen de los conceptos) y didáctico (relacionado con la enseñanza de los conceptos, los escenarios y el sistema educativo).

Por su parte, Autino et al. (2011) caracterizan los obstáculos atravesados por estudiantes de ingenierías como: comprensión de objetos matemáticos y su uso en situaciones problema, además del uso del lenguaje matemático y cotidiano en ambos sentidos (epistemológicos); falta de métodos de estudio, motivación, interpretación y atención continua en los compromisos académicos (ontogenéticos); y, organización en los contenidos del curso, estructura curricular, identificación de características del grupo al que se enseña y materiales de clase inadecuados (didácticos). Otros autores como Hein y Biembengut (2006) revelan causas asociadas al estudiante frente a las dificultades del estudiante al desconocimiento de la interpretación de un contexto, ligado a modelación de fenómenos o procesos.

En particular, diversos autores señalan limitaciones en el aprendizaje del cálculo, señaladas a partir del desequilibrio que existe entre el tratamiento conceptual y algorítmico de las integrales (Muñoz, 2000; Zavala, Vera, & Ruiz, 2017); también, los contextos de aplicación del cálculo son 'estereotipados' con uso indiscriminado de técnicas y procedimientos, dando privilegio a lo algorítmico sobre el tratamiento geométrico y su significado en la enseñanza del TFC (Artigue, 2002), o falta de momentos de ‘descubrimiento’ entre la población estudiantil a nivel universitario (Gordon, & Gordon, 2007).

Además, autores como Zavala, Vera y Ruiz (2017) resaltan que existen dificultades en los estudiantes universitarios relacionadas con el uso de representaciones (y tránsito entre ellas) en la enseñanza del cálculo, las cuales se deben a: (i) la complejidad en su uso; (ii) el tiempo invertido para proponer diversos registros (si no se usan programas especializados para modelar como GeoGebra); (iii) no son considerados significativos dentro de las planeaciones; o, (iv) simplemente porque el currículo lo delimita un libro de texto que acota su enseñanza a lo netamente algebraico y operativo de las integrales.

Por otra parte, la demanda cognitiva de una tarea matemática escolar se refiere a la exigencia cognitiva que esta involucra, para lo cual emplearemos la taxonomía presentada por Smith y Stein (2016) (Tabla I).

Tabla 1

Taxonomía demanda cognitiva (adaptado de Smith y Stein (2016, p.16-17))

Tipo	**Indicadores**
	Exigencia cognitiva de bajo nivel
Memorización (MEM)	**(MEM1)** La tarea implica la reproducción o desarrollo de reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidas.
	(MEM2) La tarea no cuentan con una resolución inmediata mediante procedimientos, debido a la ausencia de estos o también por el poco tiempo asignado por el docente para que la tarea sea resuelta con el procedimiento presentado.
	(MEM3) La tarea carece de ambigüedad. Lo que implica que la tarea sea una reproducción exacta del procedimiento o concepto previamente visto y la instrucción claramente invita a reproducirse de manera directa.
	(MEM4) La tarea no tiene relación con los conceptos o con el significado que subyacen en los hechos, reglas, fórmulas o definiciones que están aprendiendo o reproduciendo.
Procedimientos	**(PWoC1)** La tarea se caracteriza por ser algorítmica, y utilizar el procedimiento que se menciona específicamente o que resulta evidente de anteriores instrucciones, experiencias o ubicaciones de la tarea.

	(PWoC2) La tarea exige una demanda cognitiva limitada para su exitosa realización. Hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita hacer y sobre cómo llevarlo a cabo. **(PWoC3)** La tarea no tiene conexión o relación con los procedimientos que se usará. **(PWoC4)** La tarea se centra en producir respuestas correctas en vez de desarrollar la comprensión sobre el objeto matemático. **(PWoC5)** La tarea no requiere explicación o solo se centra en la descripción del procedimiento utilizado.
Exigencia cognitiva de bajo nivel	
Procedimientos con conexiones (PWC)	**(PWC1)** La tare fija la atención del estudiante en el empleo de procedimientos, con el fin de desarrollar niveles más profundos de comprensión respecto de las ideas y conceptos matemáticos. **(PWC2)** La tarea sugiere, de modo explícito o implícito, los caminos a seguir, mismos que sean procedimientos generales propuestos de forma superficial, que se vinculan estrechamente con las ideas conceptuales subyacentes, a diferencia de los rígidos algoritmos que son opacos respecto de los conceptos implícitos. **(PWC3)** La tarea exige cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden seguirse procedimientos generales, eso no se hace irreflexivamente. Los estudiantes han de involucrarse con las ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos a fin de completar la tarea con éxito, lo cual desarrolla comprensión. **(PWC4)** La tarea suele representarse de múltiples formas, como diagramas visuales, materiales manipulables, símbolos y situaciones problemáticas. Lo que invita al estudiante para realizar conexiones entre diversas representaciones ayuda a elaborar significado.
Construcción de las matemáticas (DM)	**(DM1)** La tarea requiere de pensamiento no algorítmico y complejo, de manera que la tarea, sus instrucciones o un ejemplo resuelto (previamente) no sugiere explícitamente caminos o enfoques predecibles o estudiados. **(DM2)** La tarea exige que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos, o relaciones matemáticas. **(DM3)** La tarea requiere del estudiante un automonitoreo o una autorregulación de los propios procesos cognitivos.

(DM4) La tarea exhorta al estudiante para tener acceso a sus conocimientos y recordar experiencias relevantes en las que hagan un uso apropiado de estos al estar trabajando en la tarea.

(DM5) La tarea requiere que el estudiante la analice y que examine activamente las restricciones de esta, que permitan identificar a tiempo posibles limitaciones de las estrategias de solución y/o las soluciones mismas.

(DM6) La tarea demanda un esfuerzo cognitivo considerable y quizás conlleve un nivel de ansiedad para el estudiante, debido a la naturaleza impredecible del proceso de solución requerido.

En la tabla 1, se presentan las dos subdivisiones que caracterizan la taxonomía de exigencia cognitiva. En la primera parte de ella, se encuentran los indicadores correspondientes a la exigencia cognitiva de bajo nivel (memorización y procedimientos sin conexiones) y, en la segunda parte, los correspondientes al alto nivel (procedimientos con conexiones y construcción de las matemáticas).

Por último, parece importante decir que antes de abordar el tratamiento del TFC es necesario referirnos al teorema mismo, el que se enuncia en la figura 2.

Figura 2

Enunciado Teorema Fundamental del Cálculo (Larson, & Edwards, 2018, p.36).

Teorema. El Teorema Fundamental del Cálculo
Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Su presencia en el Cálculo es de vital importancia, dado que relaciona dos contenidos importantes de este, la derivada y la integral. Su demostración nos lleva a una compleja visualización desde el punto de vista matemático, lo que, a la vez, provoca dificultades en su enseñanza.

En relación con las limitaciones de aprendizaje en la enseñanza del TFC, se puede encontrar estudios que apuntan a su identificación. Dentro de los obstáculos más comunes en la comprensión del TFC se encuentran los recuerdos difusos sobre los objetos matemáticos previos y que son base para la comprensión de otros propios del teorema, tales como: función, continuidad, derivada e integral, razón de cambio y acumulación, así como también la falta de relaciones entre representaciones de la integral, al no identificar el vínculo de la integral con el área que representa o no variabilidad de los límites de la integral), o también desestimar el reconocimiento de la importancia del TFC en los programas de formación de ingenierías (Muñoz-Villate, 2021). Estas ideas son confirmadas por Reyna Segura, (2019) quien señala que las dificultades de aprendizaje del TFC radican en la complejidad de las nociones de Cálculo y en el lenguaje que se utiliza.

METODOLOGÍA

Este trabajo se ciñe al paradigma cualitativo, en donde se prioriza la mirada en la riqueza y profundidad de los datos por sobre la cantidad de estos (Hernández-Sampieri, Fernández-Collado, & Baptista, 2010). Se considera un enfoque descriptivo-interpretativo de acuerdo a la naturaleza de los datos recogidos.

El sujeto informante del estudio es una profesora universitaria de la Universidad Industrial de Santander (Colombia), que enseña en las diversas carreras de Ingeniería, escogida por criterio de disponibilidad y accesibilidad. Ella lleva 7 años de docencia a nivel universitario, tiene 41 años y tiene formación tanto disciplinar (magíster en docencia de la matemática) como didáctico (Doctora en Educación, en la línea de formación de prácticas pedagógicas en Matemática).

Los instrumentos de recogida de datos corresponden a cuatro planificaciones de clases de la profesora universitaria que diseña una propuesta didáctica para la enseñanza del TFC para estudiantes de ciclo básico de formación en educación superior, que incluye las carreras de Ingenierías de la universidad donde labora. De ellas se extraen los enunciados de las tareas matemáticas principales de las clases.

El objetivo general que se propuso la académica para las tareas matemáticas fue proponer modelos de representación geométrica del TFC para que los estudiantes identifiquen propiedades esenciales en la representación y el uso del teorema a través del uso de la geometría dinámica que ofrece el software GeoGebra.

Luego de recoger los datos se lleva a cabo un análisis de contenido (Flick, 2004), considerando como unidades de análisis los párrafos o conjuntos de ellos del enunciado de cada tarea matemática escolar. Las categorías de análisis se extraen de los elementos teóricos presentados en el apartado anterior, a saber, los niveles de demanda cognitiva y las limitaciones de aprendizaje, en este caso, en relación al TFC. La tabla 2 ilustra las categorías utilizadas.

Tabla 2

Categorías de análisis del estudio

Categoría	Subcategorías
Demanda cognitiva, exigencias de bajo nivel	Tarea matemática de memorización
	Procedimientos sin conexiones
Demanda cognitiva, exigencias de alto nivel	Procedimientos con conexiones
	Construcción de las matemáticas
Limitaciones de aprendizaje	Errores de estudiantes frente a la tarea matemática propuesta para el TFC
	Dificultades de estudiantes frente a la tara matemática propuesta para el TFC

Las categorías declaradas de demanda cognitiva (exigencia de bajo o alto nivel) especificadas en la tabla 2 se utilizan para analizar cada uno de los enunciados propuestos en las 4 tareas matemáticas escolares y clasificar las tareas. Así mismo, las limitaciones de aprendizaje, son identificadas en todas las tareas analizadas, con el fin de observar elementos en los que recurrentemente restringen la comprensión total del objeto matemático, o elementos implícitos desde la misma concepción del diseño de las tareas para la enseñanza del TFC, que contribuyen a la baja o nula comprensión de los objetos matemáticos. Se consideran las limitaciones de aprendizaje observadas en estudios anteriores.

En el siguiente apartado serán presentadas las cuatro tareas matemáticas escolares seleccionadas para el análisis de la demanda cognitiva y las limitaciones de aprendizaje en relación a la enseñanza del TFC.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Se presenta una secuencia de tareas matemáticas escolares que apuntan a momentos distintos de la enseñanza del TFC.

Antes de abordar el análisis de los descriptores secundarios de cada tarea escolar (demanda cognitiva y limitaciones de aprendizaje), especificaremos los descriptores primarios de estas tareas, los propósitos declarados y los contenidos matemáticos puestos en juego en ellas, lo que se detallan en la tabla 3.

Tabla 3

Propósitos declarados y contenidos puestos en juego en cada tarea

Tarea	Propósitos	Contenidos matemáticos
1	Explorar el significado del TFC a través de la modelación del comportamiento de una función lineal y el significado del área bajo la curva como función de acumulación, donde se analiza su comportamiento de la función para la aplicabilidad del TFC	Integración, derivación, reglas de derivación y continuidad, representación gráfica de una función.
2	Evaluar las condiciones del TFC, y la existencia o no de condiciones particulares para una función.	Integración, límites laterales y continuidad.
3	Inferir valores de la imagen de la función de acumulación F de la función f para el intervalo $[0,2\pi]$ a través de características especiales de continuidad y derivabilidad de la función coseno.	Área bajo la curva, integración de una función, evaluación de la integral en un intervalo.

4	Ejemplificar sobre una función con características particulares de continuidad, en la que se usa la geometría dinámica del software GeoGebra para recrear el comportamiento de las funciones, bajo características de continuidad (o no) y sus implicaciones de aplicabilidad del TFC.	Continuidad de la función, derivada, reglas de derivación, integración, área bajo la curva.

Esto pone de relieve los descriptores primarios de cada tarea matemática escolar (Ramos-Rodríguez, Valenzuela y Flores, 2019), que tienen que ver con lo observado a primera vista en las tareas matemáticas escolares, en específico, el propósito de esta y el contenido matemático que se pone en juego en su desarrollo.

A continuación, serán abordados los descriptores secundarios, a medida que se presentan los enunciados de las tareas matemáticas escolares para la enseñanza del TFC.

Tarea matemática escolar 1. La figura 3 ilustra el enunciado de la primera tarea matemática escolar a nivel universitario que se propone, cuyo objetivo es explorar el significado del TFC a través de la modelación del comportamiento de una función lineal y el significado del área bajo la curva como función de acumulación, donde se analiza su comportamiento de la función para la aplicabilidad del TFC.

Para esto, la docente escoge adecuadamente una función continua *f*, con *F* derivable, como se describe en figura 3.

Figura 3

Enunciado de la primera tarea matemática escolar.

Para la función f definida por $f(x) = \frac{4}{3}x - 1$, con $x \in [0.1,4]$, usando su gráfica y las herramientas de GeoGebra:

a) Compruebe si la función es continua;

b) Calcule el área bajo la curva descrita por f;

c) Determine la integral que representa el área bajo la curva en el intervalo $[0.1,4]$.

d) Visualice los valores del rastro de la función que identifica el área acumulada F, a medida que el valor de x aumenta (hacia el extremo 4) ¿Para qué valores de x, F se hace 0?

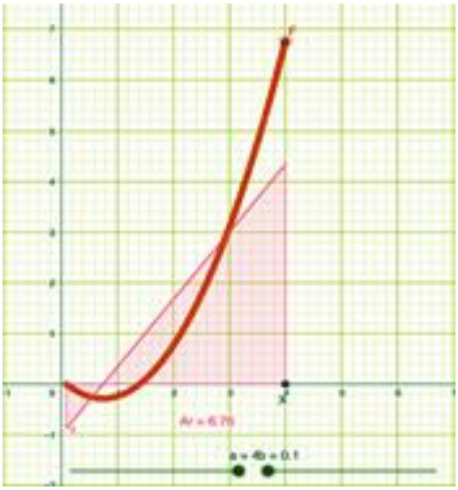
e) Realice el cálculo de F y verifique usando el TFC.

(Sugerencia: usar el *Applet 1: https://www.GeoGebra.org/m/hcvdbkt8*)

En este desafío, se espera que los alumnos entreguen una respuesta como la que se ilustra en la figura 4.

Figura 4

Respuesta esperada con la aplicación desde el Applet 1
(https://www.GeoGebra.org/m/hcvdbkt8)



Esta tarea parte de una función lineal resaltada en color rojo, que a simple vista se puede verificar su continuidad en el intervalo cerrado $[0.1,4]$. por ser una función lineal, es "suave" en todo su recorrido.

Posteriormente, se espera que el estudiante calcule el área bajo la curva usando la herramienta "rastro" de la función acumulación en GeoGebra, lo cual le arrojará $A = 6.76$.

La integral solicitada en el apartado c) no debería tener dificultades para determinarse algebraicamente, pues solo exige cálculos simples, posterior a evaluar la integral en el intervalo cerrado [0.1,4]. Es decir, el rastro puede evidenciar cuál será el área bajo la curva, al señalar los extremos del intervalo, para obtener finalmente 6.76. Una de las hipótesis que deben establecer los estudiantes sobre la función rastro, es identificar si la función es derivable.

Para el apartado d) la función de acumulación F estará definida como $F(x) = \frac{2}{3}x^2 - x$, la cual se destaca en la gráfica en color rosado. Esta área recorrida, está resaltada por el rastro que deja la curva (con los valores del área) al "pasar" por los puntos de x, a lo largo del intervalo [0.1,4].

Finalmente, en el apartado e), al derivar la función acumulación $F(x) = \frac{2}{3}x^2 - x$, obtenemos: $F'(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)x^{2-1} - 1 = \frac{4}{3}x - 1$, lo cual coincide con la función f, satisfaciendo el TFC.

En particular, es importante para el estudiante comprobar mediante la modelación gráfica de la función f y el rastro de la función acumulación F que, el valor del área acumulada varía. Es decir, su área acumulada se encuentra en los valores negativos, por los valores de x, hasta llegar a $x = 1.4$. Desde este punto de vista, la gráfica de la función acumulación toma valores positivos hasta llegar a 6.76.

Al analizar las limitaciones de aprendizaje esperadas para esta tarea se pueden observar tres. En primer lugar, para comprobar la continuidad en la función, se espera que los estudiantes involucren los conceptos de límites laterales de la función lineal, o que lo deduzcan de la representación gráfica.

Una de las dificultades que puede tener el estudiante en este punto es sobre la definición del intervalo de la función $[0.1, 4]$, pues no necesariamente se definen de manera abierta, sino para un intervalo específico, lo que implicaría falta de comprensión del objeto matemático y su especificidad para el intervalo dado. Este dificultad coincide con los hallazgos de Hein y Biembengut (2006).

En segundo lugar, se espera que los estudiantes identifiquen la función lineal y el área bajo la curva de la función lineal, $[0.1, 4]$. Sin embargo, es posible que no consideren el área bajo la curva para el intervalo $[0.1, 0.75]$.

Dado que es un área que explícitamente no está literalmente bajo la curva, y no se relacione como el valor de un área en una zona negativa del plano, por los valores de x para la función. Para esto, es posible indagar sobre los valores de x, para los cuales la función F tomará valores positivos o negativos o 0. Lo que lleva a una limitación por comprensión del tratamiento geométrico y significado de la integral, conforme lo señala Artigue (2002).

Por último, es posible que una dificultad radique en relacionar el valor obtenido de F en un punto x, con el área bajo la curva. Esto es, reconocer la función F como una función acumulación de áreas. Finalmente, el área equivalente a la zona rosada $(6{,}76)$, equivale al valor almacenado del área representada por la función acumulación F. En este caso, esta dificultad es consecuencia de la comprensión geométrica de la función acumulación y su uso en una situación particular dentro del TFC, conforme lo alude Autino et al., (2011)

Por otro lado, esta tarea se clasifica como una tarea de alta demanda cognitiva, del tipo "procedimientos con conexiones" (PWC4), ya que exige el uso de distintas representaciones (algebraicas, numéricas, gráficas y tabular), con el manejo de diversos conceptos, para poder verificar la aplicabilidad del TFC en este desafío. De manera que, los estudiantes se vinculan a la solución de las tareas, a partir de las conexiones entre las representaciones que lo llevan a la significación del concepto.

Tarea matemática escolar 2. La figura 5 ilustra la segunda tarea, cuyo objetivo es evaluar las condiciones del TFC a partir del análisis de la existencia (o no) de condiciones particulares para una función f, a partir de la representación de la función acumulación y verificación de condiciones mínimas de la funciones..

Para esta tarea, la docente escoge adecuadamente una función no continua f, con F derivable en $[-5{,}0]$ y $(0{,}5]$.

Figura 5

Enunciado de la segunda tarea matemática escolar

Dada la función: $f(x) = \begin{Bmatrix} 3, si\ x \in [-5{,}0] \\ -x, si\ x \in (0{,}5] \end{Bmatrix}$

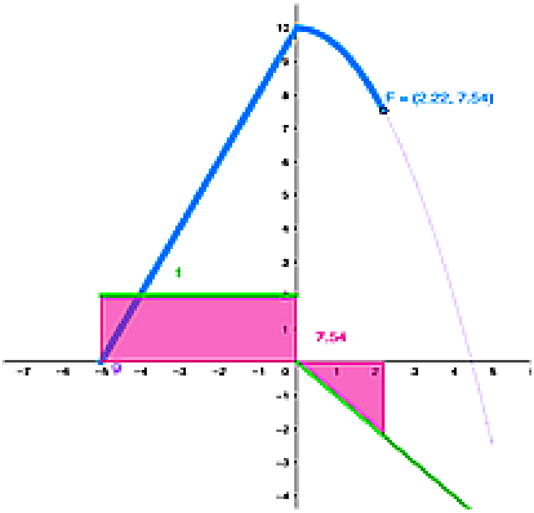
a) Dibuje la función de acumulación F para cada parte del dominio de la función f.

b) Verifique la condición de existencia de forma algebraica.
c) ¿Satisface f el TFC? Argumente.
(Sugerencia: Use el Applet 2: https://www.GeoGebra.org/m/thh5dnwv)

A partir del uso del Applet 2 los alumnos pueden entregar respuestas como la que se ilustra en la figura 6.

Figura 6

Representación de función discontinua desde el Applet 2 (www.GeoGebra.org/m/thh5dnwv)



De acuerdo con la gráfica de la función, es posible observar que esta presenta una discontinuidad cuando $x = 0$, lo cual implica que f no es una función continua, pues $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$. A pesar de esto, existe F en todo punto de la función (ver *Applet* 3: https://www.GeoGebra.org/m/rqe7trjt: GeoGebra), pues bajo la curva, el área sigue acumulándose. Sin embargo, a pesar de la condición de discontinuidad en f. En f esto no afecta la continuidad de F en todo punto del intervalo

$[-5{,}5]$. Esto es, en el intervalo [-5,0] sería $F(x) = 3x$, y en el intervalo $(0{,}5]$ sería $F(x) = \frac{-x^2}{2}$.

Es notorio el "cambio brusco" que hace la función F en $x = 0$, pues su gráfica cambia de pendiente y va decreciendo hasta llegar a $x = 5$.

En este tipo de gráficas, a pesar de esta condición siempre existirá F'. Si se restringiera la función a los puntos en los cuales f es continua. Esto es, en este ejemplo podemos notar que F no es derivable en 0, en el intervalo $[-5{,}0]$ sería $F'(x) = 3$, y el intervalo $(0{,}5]$ sería $F'^{(x)} = \frac{-2x}{2} = -x$. Es decir:$F(x) = \begin{Bmatrix} 3x, si\ x \in [-5{,}0] \\ -\frac{x^2}{2}, si\ x \in (0{,}5] \end{Bmatrix}$y su derivada: $F'(x) = \begin{Bmatrix} 3, si\ x \in [-5{,}0] \\ -x, si\ x \in (0{,}5] \end{Bmatrix}$

Por lo cual, a pesar que la función *f* no satisface la continuidad, *F* si lo hace y se cumple que $F' = f$ en cada sub-intervalo $[-5{,}0]$ y (0,5].

Este ejemplo de tarea matemática escolar se ha puesto con fin de evaluar las condiciones del TFC, y la existencia o no de condiciones particulares de una función.

En relación con las limitaciones de aprendizaje que puedan surgir en la implementación de la tarea, se pueden observar tres. En primer lugar, un error frecuente en esta actividad es que el estudiante considere la función f como continua, al relacionarla con la función acumulación. El no notar las características de cada función, y al desestimar la continuidad, puede llevarle a un error conceptual donde, finalmente indique que $F'(x) = f(x)$. Una de las preguntas que surgirán aquí será ¿Por qué si existe la función acumulación F, se necesita garantizar la continuidad de f? De esta manera, se relacionaría con una dificultad de tipo conceptual, y su aplicación en una situación de discontinuidad, como las señaladas por Hein y Biembengut (2011).

En segundo lugar, es posible que los estudiantes consideren dos funciones, y no una única función definida por partes. Al contemplarse como dos funciones, permitirá encontrar las funciones F propias de los intervalos $[-5{,}0]$ y $(0{,}5]$. De manera que, cumple la condición dada del TFC, y puede llegar a proponer una $F'(x) = f(x)$ propia de cada intervalo. En este caso, se podría interpretar como una dificultad desde el tratamiento geométrico y su adecuado significado (en palabras de Artigue, 2002) de la función graficada, como partes aisladas.

Por último, como tercera limitación del aprendizaje, se puede observar que el 0 es un valor de cuidado a la hora de analizar la continuidad en la función, y el transitar por diferentes registros de representación, podría, por ejemplo, llevar a los estudiantes a contemplar el 0 como valor en ambos intervalos, siendo que solo está contenido en el primer dominio de la función. Es decir, corresponde a una dificultad de registros de representación en términos de Zavala, Vera y Ruiz (2017).

Por otro lado, desde el punto de vista de la demanda cognitiva de la tarea, se puede apreciar que su enunciado presenta una tarea cuya demanda cognitiva es alta, en donde destacan procedimientos con conexiones (PWC4), pues pretende que el estudiante movilice las representaciones algebraica y gráfica para comprobar la existencia de la función F que se entiende desde su representación verbal-algebraica, para la significación del concepto.

Tarea matemática escolar 3. El enunciado propuesto en la figura 7 ilustra la tercera tarea, cuyo propósito es inferir valores de la imagen de la función de acumulación F de la función f para el intervalo $[0,2\pi]$ a través de características especiales de continuidad y derivabilidad de la función coseno. Estas características se revelan tanto función inicial f, como la de la función de acumulación.

Para esta tarea matemática escolar, la docente escoge adecuadamente una función donde el estudiante pueda identificar la función F a partir de la modelación con el software GeoGebra y de la aplicación del TFC.

Figura 7

Enunciado de la tercera tarea matemática escolar

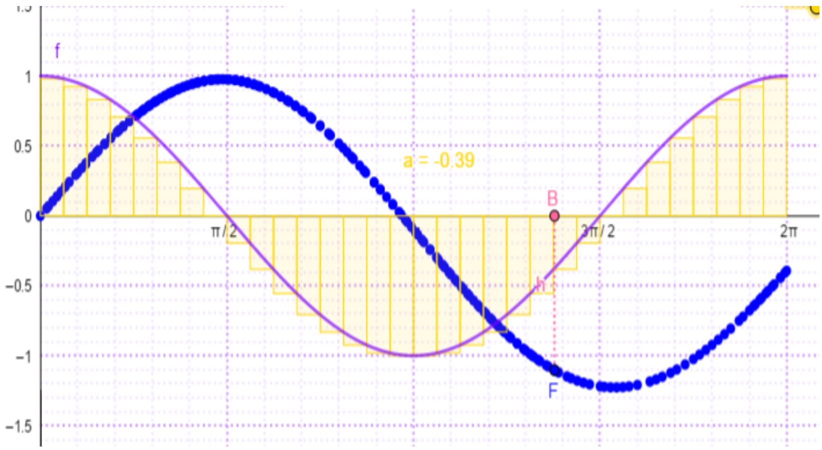
Sea la función f definida por $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0,2\pi]$.
(Sugerencia: Apóyese en *Applet 3* de GeoGebra: https://www.GeoGebra.org/m/rqe7trjt, para verificar que existe la función F, señalada en el TFC)

En la figura 8, la función trigonométrica f definida como $f(x) = cos(x)$ se encuentra resaltada en color morado. Esta función es continua en el intervalo cerrado $[0,2\pi]$. Más aún, la función es derivable.

La función de acumulación $F(x) = sen(x)$, la cual se destaca en la gráfica en color azul, que surge a partir de los rectángulos de Riemann. Esta área recorrida, está demarcada por las imágenes del punto x, comprendido entre el intervalo cerrado $[0,2\pi]$.

Figura 8

Modelación de la función seno en el intervalo [0,2 π] desde Applet 3 (https://www.GeoGebra.org/m/rqe7trjt)



Esto es, para el punto $\frac{11}{9}\pi rad$, equivalente a $x = 3.84$, el eje y, estará dado por $y = -0.66$. Lo que indica que el área que se encuentra en la parte negativa, acumulada hasta ese punto, es mayor que la positiva, en 0.66 unidades. Esto es, el área acumulada de la función resaltada $f(x) = \cos(x)$, es -0.66 , cuando se han recorrido casi $\frac{11}{9}\pi rad$.

En esta etapa de la tarea matemática, se espera proponer al estudiante dos representaciones para su interpretación del modelo y análisis de su comportamiento para la aplicabilidad del TFC.

Esta tarea matemática escolar además permite evaluar las condiciones del TFC, y la existencia o no de condiciones particulares de una función.

En relación a las limitaciones de aprendizaje se observa que con esta tarea matemática pueden surgir dos. La primera de ellas, tiene que ver con la representación de la función trigonométrica y las unidades a escala que representan los radianes en esta función trigonométrica, ya que conllevan a que posiblemente el estudiante no la represente de manera adecuada. Al transitar por las equivalencias de las medidas de los ángulos contemplados (en radianes), tanto para la función f, como para la función acumulación F, podrían convertirse en limitaciones de la tarea, pues el tiempo previsto para su desarrollo sería invertido en su mayoría, al intentar graficar de manera adecuada, si no se usa la sugerencia de usar Applet 3. Esto conlleva a una de las limitaciones de aprendizaje mencionadas por Zabala, Vera y Ruiz (2017) frente al tránsito entre representaciones, y sobre todo, su uso mínimo dentro del salón, al intentar representar de manera adecuada, y no involucrar recursos adecuados para la gráfica, que optimicen el tiempo en la correcta interpretación de la gráfica, a partir de las condiciones previamente dadas.

La segunda limitación del aprendizaje se relaciona con que dado que la función f es continua en el intervalo definido $[0,2\pi]$, es posible identificar que existe la función F de acumulación que es continua en el mismo intervalo, y además derivable, por lo que al derivar la función acumulación dada por $F(x) = sen(x)$, obtenemos: $F'(x) = \cos(x) = f(x)$. En esta función particular hay que enfocar la mirada en las características de la función acumulación resultante para esta función. Al ser funciones trigonométricas, es posible que los estudiantes confundan entre el valor de las derivadas y las integrales, pues al vincular un signo errado a la integral de la función f , estará llevando a la imagen de la función seno, reflejada sobre el eje x lo cual no le permitirá ver la relación con la función acumulación. La inadecuada comprensión del concepto, su significado y su tratamiento geométrico (Artigue, 2002) están implicadas en la correcta interpretación y representación de las funciones.

En esta tarea se propone que los estudiantes se muevan entre dos representaciones para su interpretación del modelo y análisis de su comportamiento para la aplicabilidad del TFC. De esta forma, se considera que esta tarea es de alta demanda cognitiva, pero enfocada a la construcción de las matemáticas (DM1 y DM2). El uso de las funciones trigonométricas en los ejemplos de representaciones conlleva a tener unos parámetros en medidas en radianes, sobre el plano, las cuales exigen un esfuerzo del trabajo cognitivo que este conlleva en relación a lo ya trabajado previamente. Este trabajo cognitivo que exige al estudiante es de tipo no algorítmico y complejo, y la verificación no requiere de caminos previamente revisados.

Tarea matemática escolar 4. De acuerdo con el enunciado de la figura 9, el enunciado de la tarea pretende ejemplificar sobre una función con características particulares de continuidad, en la que se usa la geometría dinámica del software GeoGebra para recrear el comportamiento de las funciones, bajo características de continuidad (o no) y sus implicaciones de aplicabilidad del TFC. En particular, para esta tarea, la docente escoge adecuadamente el intervalo [0,9] sobre la función que pretende la identificación de la primitiva, dada una función f modelada por el Applet 4.

Figura 9

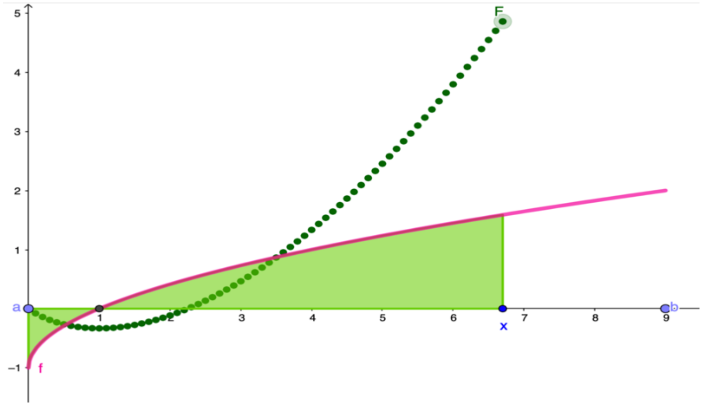
Enunciado de la cuarta tarea matemática escolar.

Sea la función f definida por $f(x) = \sqrt{x} - 1$ en el intervalo [0,9], Encuentre la función F, primitiva de f.   (Sugerencia: usar Applet 4, https://www.GeoGebra.org/m/abwfysf8).

En la figura 10, la función trigonométrica f definida algebraicamente como $f(x) = \sqrt{x} - 1$, se traza junto a su primitiva.

Figura 10

Imagen de $f(x) = \sqrt{x} - 1$ junto a su primitiva desde Apple 4 (https://www.GeoGebra.org/m/abwfysf8)



La función f (destacada en la figura 10 de color rojo) es continua en el intervalo cerrado $[0,9]$ y también es derivable en dicho intervalo. La función de acumulación F se destaca en la gráfica en color verde oscuro. Esta área recorrida, está demarcada por las imágenes del punto x, comprendido entre el intervalo cerrado $[0,9]$.

Este ejemplo de tarea matemática escolar se ha puesto con fin de evaluar las condiciones del TFC, y la existencia o no de condiciones particulares de una función.

En relación con las limitaciones de aprendizaje que pueden tener los estudiantes al enfrentarse a esta tarea matemática escolar se pueden evidenciar tres. La primera de ellas, es que los estudiantes podrían considerar la no existencia de la función para intervalos con límites inferiores menores que 0, por lo que no garantizaría la condición de continuidad. Sin embargo, esta función está definida para el intervalo $[0,9]$. La función definida en este intervalo, es continua en todos los puntos. De esta manera, la limitación estaría relacionada con la definición y su comprensión en la aplicación de una situación particular (otros valores no definidos en el intervalo), conforme lo señala Autino et al. (2011).

La segunda limitación de aprendizaje tiene relación a que, en esta tarea, los estudiantes podrían considerar no identificar la función que describe la función acumulación, es decir, no conocer las reglas de integración de la función radical; sin embargo, una conversión de raíz a potencia $\left(\frac{1}{2}\right)$, podría ser de utilidad a la hora de hallar la integral definida para ese intervalo. Por último, como limitación del aprendizaje, los estudiantes pueden tener problemas con la aplicación de algoritmos de tipo aritmético podrían interferir en el desarrollo de esta tarea al encontrar la función F. Así mismo, podrían interferir en el proceso inverso de identificar la derivada de F , como la función inicial f. A pesar del desbalance entre lo conceptual y procedimental, visto como la aplicación de reglas de integración, aún persisten problemas de comprensión del objeto matemático, así como del concepto y su significado (Artigue, 2002).

El enunciado de esta tarea matemáticas escolar se puede clasificar de baja demanda cognitiva, de tipo memorización (MEM1), ya que resulta fácil aplicar algoritmos ya aprendidos. Por ejemplo, de la tarea matemática escolar 1, en la cual, se encontraban las funciones en similares condiciones, de área bajo la curva, y resultaría fácil si ya se ha vivido una experiencia previa, a pesar de tener una función radical en esta tarea.

CONCLUSIONES

Nos hemos propuesto presentar y analizar tareas matemáticas escolares para el tratamiento del TFC, desde sus limitaciones de aprendizaje y la exigencia cognitiva que pone en juego su enunciado. Con eso es posible avanzar en la comprensión de la interpretación de la representación geométrica y la comprobación algebraica del teorema y cómo llevarlo al aula.

En la literatura se puede encontrar una diversidad de propuestas para el aula que apunten al tratamiento de conceptos matemáticos universitarios (Castelló, & Monereo, 1999; Espinosa, 2008; Peñalosa, Sonia, & Roa, 2013; Robles, Tellechea, & Font, 2014). Destacamos el trabajo de Robles, Tellechea y Font (2014) y de Monroy y Riveros (2020) quienes proponen un acercamiento alternativo al TFC desde diseños de secuencias, que incluyen a su vez entornos virtuales u otras aproximaciones que valoran relaciones inversas entre integrales y derivadas. En este escenario, se ha podido observar que, si bien las propuestas existentes favorecen la comprensión del objeto TFC, no consideran los niveles de exigencia cognitiva que plantean la presente propuesta de aula. Por tanto, desde esta óptica, este trabajo aporta a la comunidad universitaria con una propuesta de tareas matemáticas escolares específicas para la enseñanza del TFC centrada en la diversidad de demanda cognitiva que deben estar presente en estas, de bajo y alto nivel de exigencia, que involucran tareas de memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones y construcción de las matemáticas.

Por otro lado, y en la misma línea, concordamos con lo expuesto por García y Benítez (2012) quienes sugieren que el aprendizaje de los estudiantes se ve favorecido cuando existe congruencia entre la demanda cognitiva de las tareas, el contenido matemático de los problemas y los objetivos curriculares, lo cual de una u otra forma, se ha querido considerar en esta propuesta, el tener cuidado en el objetivo de la tarea y la demanda que se exige.

En relación con las limitaciones de aprendizaje es necesario tener en cuenta que el profesor universitario puede no ser consciente de ellas, lo que puede traer como consecuencia obstáculos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los diversos conceptos matemáticos. En el caso del TFC se pudo constatar que las limitaciones detectadas en la literatura (Muñoz-Villate, 2021; Reyna-Segura, 2019) fueron parte de las advertidas en este estudio para las tareas matemáticas propuestas. En particular, se señala que en la realidad universitaria predomina un tratamiento algebraico y/o algorítmico en la enseñanza del TFC, es decir, un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, lo cual privilegia la automatización de técnicas operatorias del objeto matemático (aislado/desintegrado) y no la formación de futuras generaciones de ingenieros capaces de trascender al uso y las relaciones entre objetos matemáticos integrados, como lo señalan Muñoz (2000) y Zavala, Vera, y Ruiz (2017). En particular, las cuatro tareas aquí presentadas, revelan dificultades relacionadas con la comprensión del objeto matemático y su aplicación en situaciones particulares, delimitadas en su mayoría por los intervalos, o la comprensión de la continuidad. Así mismo, algunas de estas tareas revelan posibles dificultadas relacionadas a la poca apropiación del objeto matemático y aplicación a otros registros de representación, no necesariamente algebraicos. La falta de uso de estos registros y su poco tránsito entre ellos, revela posibles implicaciones de la deducción de características de las integrales, para su análisis y tratamiento, o también, para una correcta interpretación y aplicación del TFC. Esto deja entre ver, además, la dificultad señalada anteriormente por Muñoz-Villate (2021). en relación a la falta de conocimientos previos sobre TFC.

De lo anterior, se deduce que, debe ser un propósito del profesor universitario estar constantemente instruyéndose sobre ello, de manera de favorecer el aprendizaje que surge en el aula e implementar los recursos necesarios para hacer de la modelación matemática un proceso transversal también a nivel de educación superior.

Diversas propuestas de actividades son presentadas en los libros de texto universitarios, donde parece no haber un análisis previo de la demanda cognitiva que conlleva para los estudiantes, y, en ocasiones, son planteadas considerando el tiempo de desarrollo que involucran para el docente, lo que puede llevar a contemplar tiempos fuera de la realidad del nivel de los estudiantes, lo que coincide con el estudio de Acero (2019).

De acuerdo con Smith y Stein (2016), es necesario proponer a los estudiantes tareas matemáticas escolares que involucren diversidad en la demanda cognitiva puesta en juego. En ese sentido, concordamos con Penalva, Posadas y Roig (2010) sobre la necesidad de proporcionar un balance adecuado entre distintos tipos de tareas matemáticas, ya que produce un impacto positivo en la enseñanza de la matemática a nivel universitario. Por tanto, sostenemos que, a nivel de enseñanza superior, esta necesidad también debe tenerse en cuenta, ya sean de bajo nivel (memorización o procedimiento sin conexiones) o de alto nivel (procedimientos con conexiones o construcciones matemática), de manera que los estudiantes universitarios puedan transitar por las diversas exigencias que una tarea puede proveerle y poder madurar paulatinamente los conceptos abstractos y complejos que están involucrados en ella.

A partir del estudio, sostenemos que, a nivel universitario, es recomendable partir con un *staff* de tareas matemáticas que involucren una exigencia de bajo nivel, para que haya una adecuada familiarización de los conceptos de manera que los estudiantes vayan tomando confianza en el proceso de aprendizaje de conceptos cada vez más complejos y abstractos. Sin embargo, no debe mantenerse en este nivel de demanda, sino que, a partir de nuevas tareas matemáticas, este vaya evolucionando a aquellas de alto nivel de exigencia, de manera de asegurar la comprensión profunda de los conceptos estudiados y avanzar en el desarrollo de habilidades cognitiva de alto nivel, como es la indagación y la inferencia.

Por otra parte, estas exigencias se relativizan de acuerdo con las características individuales de los estudiantes. Es afán del profesor universitario reconocer sus características, donde pueda buscar o diseñar tareas matemáticas que proporcionen diversos tipos de desafíos cognitivos a los estudiantes, y que los lleve a transitar entre los diferentes niveles, de manera que el aprendizaje de los estudiantes se vea favorecido cuando existe congruencia entre la demanda cognitiva de las tareas el contenido matemático de los problemas y los objetivos curriculares propuestos, como lo afirman García y Benítez (2013). Esto permitirá que los estudiantes universitarios lleguen a resolver tareas no necesariamente reiterativas en habilidades de memorización, procedimentales y operatorias, sino que trasciendan a la aplicabilidad de los conceptos, en este caso, la aplicabilidad del TFC.

En esta línea, una proyección de este estudio es proveer al profesorado universitario de programas de desarrollo profesional efectivos (Ramos-Rodríguez, Bustos, & Morales, 2021) que permitan desarrollar habilidades para enfrentar su docencia desde una mirada amplia en relación a la exigencia cognitiva que pone en juego en su aula y las limitaciones a de aprendizaje que pueden surgir en ella, con propósito de contar con futuros ingenieros con conocimientos más apropiados para enfrentar su futura profesión.

Por otro lado, a partir del estudio, nos parece relevante la inclusión de la modelación en los cursos de cálculo como se ha propuesto en las tareas matemáticas estudiadas, pues puede permitir que los estudiantes formulen hipótesis a partir de la utilización de las herramientas, como GeoGebra en este caso.

Por último, no cabe duda que una prolongación de este estudio es indagar en cómo los profesores universitarios implementan estas tareas matemáticas, de manera de comprenderlos en pos de apoyarlos para mantener la demanda cognitiva que la tarea matemática exige.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue elaborado como parte del desarrollo de dos proyectos de investigación: (i) en el marco del proyecto de investigación FONDECYT Iniciación Proyecto 11190553 "Principios de programas efectivos de desarrollo profesional para matemáticas docentes", financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile; (ii) en el marco del proyecto de investigación interna código 2845: "Tareas para el desarrollo del pensamiento matemático. Un estudio teórico desde el modelo del conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas en Educación Básica Primaria", desarrollada desde el Grupo de investigaciones educativas ATENEA de la Escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander, financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia).

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LAS AUTORAS

La recogida de datos fue realizada por JPAR en el año 2019. El artículo parte de un análisis preliminar, realizado por JPAR y ERR. Posteriormente, ambas autoras, JPAR y ERR, discutieron la planificación del artículo y participaron activamente en la discusión de los resultados y sus análisis, además revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos producidos y que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la autora de correspondencia, JPAR, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Acero, F. (2011). Demandas cognitivas del álgebra lineal en textos universitarios en la Argentina. *Anuario Digital de Investigación Educativa (22).*

Álvarez, Y. & Ruiz-Soler, M. (2010). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía, XXXI* (89), 225-249.

Artigue, M. (2002). Analysis. In Tall, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking.* (p. 167-198). Kluwer.

Autino, B., Digión, M., Llanos, L., Marcoleri, M., Montalvetti, P. y Soruco, O. (2011). Obstáculos didácticos, ontogenéticos y epistemológicos identificados desde la comunicación en el aula Matemática. In: Borba, R. (Ed.), *Proceedings of the XIII CIAEM-IACME*, (pp.1-12). Recife.

Bachelard, G. (2000). *La Formación del Espíritu Científico, contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Siglo Veintiuno.

Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Cárdenas, J. & Blanco, L. (2016). La evaluación de las matemáticas: análisis de las pruebas escritas que se realizan en la secundaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *48*, 59-78.

Castelló, M. & Monereo, C. (1999). El conocimiento estratégico en la toma de apuntes: un estudio en la educación superior. *Infancia y Aprendizaje, 22*(88), 25-42. http://doi.org/10.1174/021037099760246590.

Cortés, J. O. L., Arellano, M. A. & Vázquez, V. S. (2019). Problemática de la enseñanza-aprendizaje y evaluación del cálculo en la formación de ingenieros. *ANFEI digital, (11).*

De la Fuente-Arias, J., Pichardo, M. C., Justicia, F., & Berbén, A. (2008). Enfoques de aprendizaje, autorregulación y rendimiento en tres universidades europeas, *Psicothema, 20*(4), 705-711

Espinosa, D. (2008). La formación matemática en la educación superior. *El Hombre y la Máquina, 31*, 52-63.

Flick, U. (2004). Triangulation in qualitative research. In U. Flick, E. V. Kardorff & I. Steinke (Eds.), *A companion to qualitative research* (pp. 178-183). Sage.

Gallardo, M. & Galindo, M. (2015). Resultados de aprendizaje de un proceso de instrucción matemática para ingenieros. In: Vásquez, C., Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, Francisco, Solar, H., Chandía, E., Parraguez, M. (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*. (p.622-627). SOCHIEM

García, M. L., & Benítez, A. A. (2013). Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas. *Formación universitaria, 6*(1), 13-20.

García Retana, J. A. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Educación, 37*(1), 29-42.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4*(2), 129-160.

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. *Mathematics Teacher, 100*(9), 597-604.

Guzmán, S. M. & Vallejo, C. A. C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación matemática, 16(2)*, 93-104.

Hein, N & Biembengut, M. S. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clase de matemáticas. In: Murillo, M. (Ed.), *V Festival Internacional de Matemática* (p.1-25).

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la invesgación* (4ta ed.). McGraw-Hill.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones.* v. 3. (123p). Libros del Zorzal

Kessler, A. M., Stein, M. K., & Schunn, C. D. (2015). Cognitive Demand of Model Tracing Tutor Tasks: Conceptualizing and Predicting How Deeply Students Engage. Technology- *Knowledge and Learning, 20*(3), 317–337.

Larson, R., & Edwards, B. (2016). *Cálculo, Tomo II*. 10ª Edición. Cengage

López, A. (2013). Alineación entre las evaluaciones externas y los estándares académicos: El Caso de la Prueba Saber de Matemáticas en Colombia. *RELIEVE, 19* (2), 2. http://doi.org/10.7203/relieve.19.2.3024

Monroy, Z. T., & Riveros, D. A. (2020). *Actividades para re-descubrir el teorema fundamental del cálculo* (Tesis de Grado. Licenciatura en Matemáticas). Universidad Pedagógica Nacional.

Moreno, A., & Ramírez-Uclés, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. In L. Rico, & A. Moreno (Org.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (243-254). Pirámide.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2), 131- 170.

Muñoz-Villate, W. (2021). Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles mediaciones tecnológicas. *Ciencia y Educación, 5*(1), 189-204.

Penalva, M. C., Posadas, J. A., & Roig, A. I. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación matemática*, *22*(3), 23-54.

Peñalosa, W., Sonia, S., & Roa, S. A. (2013). El teorema fundamental del cálculo: Escenarios para su comprensión. *Revista Educación científica y tecnológica*, Edición especial, 660-664.

Planas, N. (2004). Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica. *Revista de Educación, 334*, 59-74.

Plaza-Galvez, L. F. (2016). Obstáculos presentes en modelación matemática. Caso ecuaciones diferenciales en la formación de ingenieros. *Revista científica, 25*(2), 176-187.

Ramos-Rodríguez, E., Valenzuela, M., & Flores, P. (2019). El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. In: Olfos, R., Ramos, E., & Zakaryan, D. (Eds.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (p. 51-100). Graó.

Ramos-Rodríguez, E., Bustos, B., & Morales, A. (2021). Identification of the Principles of Effective Professional Development Programs and Their Impact: An Investigation of the Guidelines of a Mathematics Didactic Graduate Program and a Case Study Focused on Teacher Training, *The International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning, 29*(1), 1-16. http://doi.org/10.18848/2327-7971/CGP/v29i01/1-16

Reyna Segura, A. M. (2019). *Del teorema fundamental del cálculo desde Arquímedes hasta Leibniz, como un proceso de aprendizaje para estudiantes de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad*

Nacional del Callao. Tesis Doctoral. Universidad Nacional del Callao.

Robles, M., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al Teorema Fundamental del Cálculo. *Revista Educación Matemática*, *6*(2), 69-109.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria*: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza (Tesis de Doctorado en didáctica de las matemáticas). Universidad Autónoma de Madrid.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344–50.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2016). *5 Prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas*. NCTM (p. 1-118).

Ursini, S. & M. Trigueros (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, *18*(3) pp. 5-38

Valer, N. (2017). *Estilos de enseñanza de los profesores del curso de Matemáticas Nivel Medio en el programa del Diploma del Bachillerato Internacional* (Tesis de Maestría en Educación con mención en Teorías y Gestión Educativa). Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación.

Ventura, A. (2013). La investigación sobre los Estilos de Enseñanza. Aportes para mejorar la didáctica de ciencias. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, *7*(1), 9-18.

Zavala, J. C. C., Vera, L. L., & Ruiz, C. H. (2017). Acumulaciones vs integral. *PädiUAQ*, *1*(1), 40-52.