ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7806

# Desenvolvimento do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da Pesquisa Baseada em Design

Charles Bruno da Silva Melo [a]
Eleni Bisognin [b]

[a] Secretaria Municipal de Educação de Cerro Branco, EMEB David Unfer e EMEB Augusto Schultz, Cerro Branco, RS, Brasil
[b] Universidade Franciscana (UFN), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT), Santa Maria, RS, Brasil

*Recebido para publicação 16 jun. 2023. Aceito após revisão 22 set. 2023*
*Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

## RESUMO

**Contexto**: Diante da inquietação oriunda da experiência profissional do pesquisador como professor na Educação Básica, motivada por dificuldades apresentadas pelos estudantes em desenvolver conceitos relacionados a Álgebra, além da análise de avaliações externas e produções acadêmicas relacionadas a temática. **Objetivo**: Analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes de turmas do 8º ano e 9º ano do Ensino Fundamental. **Design**: A partir pressupostos teóricos-metodológicos da Pesquisa Baseada em Design. Foram utilizadas as fases propostas por Reeves (2000). **Ambiente e participantes**: A intervenção pedagógica ocorreu em duas turmas de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública no município de Cerro Branco/RS tendo 22 estudantes participantes, nas quais o pesquisador tinha regência de classe. **Coleta e análise de dados**: Os dados foram obtidos por meio da observação participante, diário de campo e análise documental. **Resultados**: Foi possível constatar que os alunos tiveram dificuldades na interpretação das questões ao explicar o raciocínio utilizado nas resoluções bem como os conceitos matemáticos. Em todas as questões foram mobilizadas, mesmo que de forma parcial, pelo menos uma capacidade do pensar algebricamente, porém, a mobilização parcial da capacidade de estabelecer relações e comparações, fundamental para a estruturação do pensamento algébrico, pode comprometer a mobilização das demais capacidades. **Conclusões**: A partir dos resultados obtidos pode-se concluir que é necessário propiciar aos alunos um ensino que mobilize essas capacidades por meio de estímulos proporcionados pelos professores.

**Palavras-chave**: Pensamento Algébrico. Ensino e Aprendizagem de Álgebra. Ensino Fundamental. Pesquisa Baseada em Design.

Autor correspondente: Charles Bruno da Silva Melo. Email: xarlesdemelo@yahoo.com.br

**Development of algebraic thinking in elementary school: An analysis from design-based research**

## ABSTRACT

**Background:** Given the concern arising from the researcher's professional experience as a teacher in Basic Education, motivated by difficulties developed by students in developing concepts related to algebra, in addition to the analysis of external estimates and academic productions related to the theme. **Objective:** To analyze the development of algebraic thinking in students from the 8th and 9th grade of Elementary School. **Design:** From theoretical-methodological budgets of Research Based on Design. The phases proposed by Reeves (2000) were used. **Setting and Participants:** The pedagogical intervention took place in two classes of the 8th and 9th grade of elementary school in a public school in the municipality of Cerro Branco/RS, with 22 participating students, in which the researcher was responsible for teaching. **Data collection and analysis**:Data were obtained through participant observation, field diary and document analysis. **Results:** It was possible to verify that the students had difficulties in interpreting the questions when explaining the thinking used in the experiments as well as the mathematical concepts. In all questions, at least one ability to think algebraically was mobilized, even if partially, however, the partial support of the ability to establish relationships and comparisons, fundamental for structuring algebraic thinking, can compromise the capture of other abilities. **Conclusions**: From the results obtained, it can be concluded that it is necessary to provide students with a teaching that mobilizes these resources through stimuli provided by teachers.

**Keywords**: Algebraic Thinking; Teaching and Learning; Elementary School; Design-Based Research.

## INTRODUÇÃO

A escolha da temática é fruto de uma inquietação oriunda da experiência profissional do pesquisador como professor na Educação Básica, motivada por dificuldades apresentadas pelos estudantes em desenvolver conceitos relacionados a Álgebra, além da análise de avaliações externas e produções acadêmicas relacionadas à temática. Nota-se que os estudantes conseguem operar de modo razoável a aritmética, mas acabam não relacionando tais operações e suas propriedades com as operações algébricas, por isso, acabam utilizando regras ou algoritmos para resolução de problemas, sem significado na maioria das vezes.

Nesse processo, não há contribuição para a construção efetiva de capacidades cognitivas relacionadas à Álgebra, reduzindo o pensamento algébrico a uma linguagem simbólica formada por símbolos abstratos e sem sentido. Portanto, é necessário que sejam exploradas habilidades como interpretação de situações, resolução de problemas e generalização de relações matemáticas para desenvolver esse tipo de pensamento. Uma abordagem que propicia essa relação entre a teoria e a prática é a Pesquisa Baseada em Design.

Van den Akker (1999) enfatiza que a inter-relação entre a teoria e a prática presente na Pesquisa Baseada em Design, é complexa e dinâmica e que a aplicação direta da teoria, muitas vezes, não é suficiente para resolver alguns tipos de problemas relacionados à prática. Ele ainda afirma que "sem o envolvimento cooperativo de pesquisadores e profissionais não é possível obter uma clareza sobre os problemas advindos da implementação e gerar medidas efetivas para reduzi-los" (VAN DEN AKKER, 1999, p.9)

Nesse contexto, o presente trabalho descreve o recorte de uma pesquisa utilizando a Pesquisa Baseada em Design proposta por Reeves (2000), para analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes de turmas do 8º ano e 9º ano de uma escola pública do município de Cerro Branco/RS.

## PRESSUPOSTOS TEÓRICOS-METODOLÓGICOS

### 1. Pesquisa Baseada em Design proposta por Reeves (2000)

Neste trabalho, foi considerado o termo *Design-based Research,* o mesmo utilizado por Wang e Hannafin (2005), porém traduzido para o português, como Pesquisa Baseada em Design (PBD).

Os autores Wang e Hannafin (2005, p.6) asseguram que a teoria é ao mesmo tempo o embasamento e o resultado. Definem a PBD “como uma metodologia sistemática, mas flexível, que objetiva aperfeiçoar as práticas educacionais, por meio de análise iterativa, projeto, desenvolvimento e implementação, com base na colaboração entre pesquisadores e profissionais, no cenário do mundo real”. Portanto, pode ser indicada para contribuir na solução ou redução de problemas sistêmicos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem.

Os autores Mckenney e Reeves (2012) destacam cinco características da PBD: teoricamente orientada, intervencionista, colaborativa, fundamentalmente responsiva e interativa.

É teoricamente orientada, pois as teorias devem ser o ponto de partida e chegada, bem como da investigação. Elas são os princípios de design e modelagem para as soluções demandadas. A proposta teórica deve ser o fundamento para a construção do design educacional, portanto, o é a base para a construção da proposta prática, mas também deve ser estudada, melhorada e compreendida, na medida dos resultados obtidos.

Utilizando o fundamento teórico escolhido, sendo dialogado com o contexto de aplicação, a pesquisa intervém no campo da práxis pedagógica, produzindo produtos educacionais como materiais didáticos; processos pedagógicos como, por exemplo, recomendações docentes, novas propostas didáticas; programas educacionais como currículos, cursos, também desenvolvimento profissional para professores; ou políticas educacionais como protocolos de avaliação docente ou discente e opções para relação entre a escola e a comunidade. De fato, a PBD inicia com a identificação de uma problemática que necessita de intervenção e de um resultado de desenvolvimento prático, o qual só é possível de se obter por meio uma investigação científica aplicada.

A PDB é sempre desenvolvida por meio da colaboração. O desenvolvimento e a busca por uma aplicação, que seja solução para problemas identificados, obrigam à colaboração de todos os envolvidos no processo. Desse modo, é necessário considerar todos como parte da equipe de pesquisa. Uma recomendação é que o problema seja definido de forma compartilhada, com aqueles que vivenciam essa dificuldade, de modo que possam estar envolvidos e mergulhar no estudo e entendimento do contexto a ser pesquisado, ganhando a capacidade de dialogar e de estarem engajados na solução do problema e na comunidade parceira.

A metodologia é fundamentalmente responsiva, pois é moldada pelo diálogo entre os diversos saberes dos participantes, o conhecimento teórico e pelo conjunto dos testes e validações diversas realizadas durante o processo. Os avanços sejam teóricos ou práticos, bem como os potenciais ajustes na intervenção desenvolvida vão sendo desenvolvidas em diálogo e validação pela complexidade do contexto de aplicação. O conhecimento é desenvolvido em estreito diálogo com a prática, em iterações.

Na PBD cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, de um processo e, necessariamente, será o início do próximo momento de aperfeiçoamento e de melhorias. Uma abordagem baseada em ciclos de estudo, análise, projeção, aplicação, resultados, que depois são revisitados quando for necessário, ou possível. Há o propósito de ser uma abordagem iterativa e de refinamento da solução prática encontrada. A iteração talvez seja a característica mais marcante, dando-lhe o caráter formativo que com ela é identificado.

Neste sentido, Mckenney e Reeves (2012) afirmam que a PBD tem o compromisso de desenvolver percepções teóricas e soluções práticas simultaneamente, em contextos reais, envolvendo as partes interessadas. Reeves (2000), afirma que a metodologia não é definida pelos métodos escolhidos, mas por seus objetivos fundamentais que são: desenvolvimento de um produto, ou processo, acompanhado da construção de conhecimento, ou teoria, que sejam utilizáveis, e o desenvolvimento profissional.

A PBD também tem uma forte ligação com o trabalho cooperativo[1], em que diversos indivíduos estão ligados ao problema em questão, valorizando-se os contextos de pesquisa. Assim, pesquisadores aprendem com os praticantes, e vice-versa, pelas adequações de intervenções que atendam aos mesmos objetivos de maneiras diferentes daquelas concebidas inicialmente.

Reeves (2000), destaca que existem quatro fases para melhor compreender como funciona a Pesquisa Baseada em Design. Essas fases estão descritas na Figura 1.

A fase inicial da PBD – descrição do problema educativo – trata-se de um processo de decisões em que os indivíduos envolvidos buscam alinhar objetivos, necessidades ou oportunidades com desafios e limitações encontradas nos contextos pedagógicos (Edelson, 2002).

De acordo com Herrington et al. (2007), a identificação e exploração de um problema educacional significativo é o primeiro passo. Para os autores, será esse o alvo para a pesquisa, e é a criação e validação de uma solução potencial para este problema que dará o foco de todo o estudo.

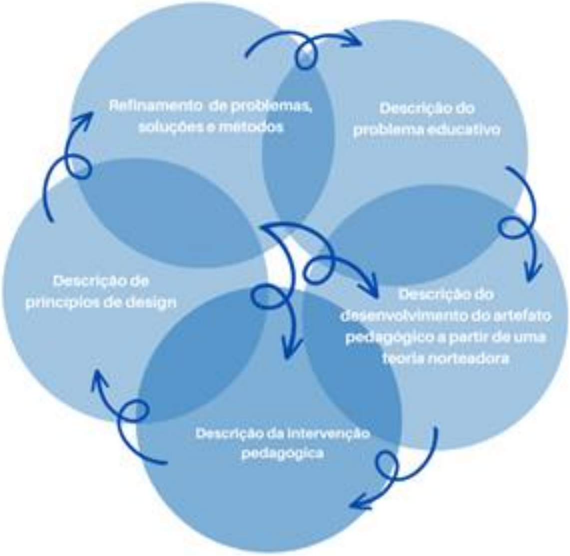
Mckenney e Reeves (2012) afirmam que, a primeira fase é constantemente revisada na PBD, sendo baseada por perspectivas de análises e criação. Os pesquisadores promovem uma revisão de literatura, definição de problemas, análise do contexto e de necessidades e, ao mesmo tempo, visitam o local e têm encontros profissionais. Isto, propicia um trabalho cooperativo. Tendo como principais resultados desta fase um melhor entendimento sobre o

[1] Entende-se o termo *trabalho cooperativo* como um trabalho que envolve ação e envolvimento por um grupo de indivíduos visando um mesmo propósito.

problema, exploração de mudanças possíveis, endereçamento do problema e um design parcial.

**Figura 1**

*Fases da Pesquisa Baseada em Design***.** (Adaptado de Reeves (2000))




Nesta fase, é necessário estabelecer e estreitar as parcerias entre pesquisador e colaboradores, sendo uma fase essencialmente dialógica, pois estarão em constante atividade comunicativa. Também são definidas as teorias de aprendizagem norteadoras com o intuito de fundamentar a compreensão dos problemas e orientar a concepção, a construção e a pesquisa de intervenções pedagógicas.

Na segunda fase – descrição do desenvolvimento do artefato pedagógico – busca-se explorar e analisar tendo como base o problema educativo e as orientações teóricas para o desenvolvimento de um artefato pedagógico. Esta fase de design envolve as interações sociais e uso das descobertas da revisão de literatura, portanto, é necessário um trabalho cooperativo que busca gerar, conectar e refinar o design e o trabalho.

Assim, ocorre o planejamento de soluções, que podem ser um plano, um texto, um guia para o professor, uma ferramenta tecnológica, um recurso didático, programas, estratégias de ensino-aprendizagem, materiais, sistemas, produtos (PLOMP et al., 2009), entre outros.

A terceira fase da PBD – descrição da intervenção pedagógica – envolve a aplicação, no ambiente educacional, com o intuito de compreender e avaliar como o artefato pedagógico, contribui para solução do problema educativo. Desse modo, deve-se implementar a intervenção, coletar e analisar as informações oriundas da aplicação promovendo o refinamento para um novo ciclo.

A quarta fase – descrição dos princípios de design – trata-se da produção de recomendações de aprimoramento da intervenção, ou seja, uma análise retrospectiva para reflexão e melhora na implementação da solução, bem como o refinamento do artefato pedagógico.

Todo esse processo é documentado e avaliado, os conhecimentos originados por meio dessa avaliação permitem que se reflita sobre o processo e, com base nessa reflexão, possa se projetar e planejar novas ações. Essas características sinalizam os problemas pedagógicos, as teorias norteadoras e as intervenções como elementos-chave do processo da PBD, configurando, portanto, o foco da nossa análise.

## 2. Nossa caracterização de Pensamento Algébrico

Percebe-se a partir das concepções apresentadas por Lins (1992); Radford (2009, 2011); Blanton e Kaput (2005); Kieran (1992,2004); Kieran, Pang e Schifter (2016); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006) que a caracterização do pensamento algébrico é algo complexo. Provavelmente, em decorrência do extenso campo e diferentes objetos matemáticos que essa forma de pensar está inserida, a Álgebra. Portanto, se fez necessário delimitar uma caracterização dessa forma de pensamento.

Diante do exposto, o grupo de cooperação[2] acredita que o pensar algebricamente está relacionado a construção de significados para os objetos

[2] O grupo foi formado por seis profissionais, além do pesquisador, para o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes dos Anos Finais a partir

matemáticos e a linguagem simbólica algébrica, a partir da capacidade de estabelecer relações/comparações, modelar, generalizar e representar/operar com o desconhecido.

A capacidade de estabelecer relações/comparações pode ser definida nas habilidades de ler, compreender, escrever e operar com símbolos usuais, bem como traduzir informações de outras formas de representação e vice-versa.

Na capacidade de modelar, o estudante amplia a capacidade inicial de relacionar, buscando a identificação de padrões a fim de deduzir uma expressão simbólica algébrica para a problemática. A construção desse modelo, pode se dar inicialmente em uma linguagem natural para posteriormente uma linguagem algébrica.

Concomitante com o processo de modelar, a capacidade de generalização revela a compreensão de uma situação apresentada, na qual é realizada uma síntese das relações existentes que é descrita em uma linguagem genuinamente algébrica. Nesse caso, surge a ideia do desconhecido, a incógnita ou variável.

Com o surgimento do desconhecido por meio da generalização, busca-se trabalhar como se fosse conhecido, uma vez que, ela é fruto de diferentes propriedades matemáticas, sejam elas aritméticas, geométricas ou probabilísticas. Portanto, é necessário representar e operar com o desconhecido.

Nesse processo de pensar algebricamente, a capacidade de se estabelecer relações/comparações é a primeira característica do pensamento algébrico a ser desenvolvida e manifestada pelo sujeito, seguidas das demais de modo simultâneo. Na Figura 2, é apresentado um esquema demostrando como essas capacidades se articulam e inter-relacionam entre si para o desenvolvimento do pensamento algébrico proposto pelo grupo cooperativo.

A combinação dessas capacidades leva a construção dos significados para os objetos e a linguagem simbólica efetivando o pensamento algébrico.

---

da PBD. A denominação atribui o significado de auxiliar e colaborar de forma mútua a partir de uma mesma perspectiva para se atingir um objetivo em comum.

**Figura 2**

*Esquema das capacidades do pensamento algébrico.*


Conforme Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2006), o pensamento algébrico pode ser desenvolvido de forma gradual, mesmo antes da existência de uma linguagem simbólica, evidenciando a primeira característica do pensamento algébrico apresentada, igualmente proposta pela BNCC:

> O trabalho com a Álgebra, no início da escolaridade, contribui para que os/as estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico. Essa ideia, atualmente considerada, diferencia-se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos. Nessa perspectiva, algumas dimensões do trabalho com a álgebra estão presentes nos processos de ensino e de aprendizagem, desde os anos iniciais, como as ideias de regularidade, de generalização e de equivalência. (Brasil 2018, p. 278)

Ainda, os autores determinam aspectos a serem desenvolvidos, no qual denominam como caracterizadores do pensamento algébrico: estabelecer relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; perceber e tentar expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produzir mais de um modelo aritmético para uma mesma situação problema; produzir vários significados para uma expressão numérica;

interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transformar uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolver processos de generalização, perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias e desenvolver/criar uma linguagem mais concisa ao expressar-se matematicamente.

Grande parte desses caracterizadores são evidenciados ao longo da Base Nacional Comum Curricular, nas habilidades estabelecidas em cada objeto de conhecimento afim de desenvolver o pensamento algébrico, no qual evidencia ser essencial para a utilização de modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Essa é a finalidade da Álgebra no Ensino Fundamental.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A primeira intervenção pedagógica foi realizada em uma escola com duas turmas, uma de 8º e outra de 9º ano, totalizando 22 estudantes participantes. O pesquisador e o professor colaborador realizaram a aplicação de uma sequência didática visando a promoção do pensamento algébrico.

Os dados coletados foram predominantemente descritivos, coletados pelos seguintes instrumentos: observação participante, diário de campo e análise de documentos.

O grupo cooperativo discutiu os registros dos estudantes buscando identificar o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da construção de significados para os objetos matemáticos e a linguagem simbólica algébrica, por meio das capacidades de: estabelecer relações/comparações, modelar, generalizar e representar/operar com o desconhecido, articuladas com as habilidades preconizadas pela BNCC para essa forma de pensar.

Nesse artigo, foram selecionadas sete questões da sequência didática para análise, pois elas propiciam que os estudantes mobilizem todas as capacidades do pensamento algébrico destacadas. Para análise das questões os alunos serão designados por E-1; E-2; E-3, e assim por diante.

A primeira questão envolve as propriedades de igualdade e a linguagem algébrica: variável, incógnita e equações polinomiais do 1º grau, promovendo as habilidades EF06MA14, EF07MA13 e EF07MA18, conforme Figura 3.

**Figura 3**

*Primeira questão.*

1. Em duas balanças, há certos objetos e alguns deles estão identificados e são expressos em quilogramas.

**Perguntas investigativas:**

a) Considerando que as balanças estão em equilíbrio. Qual o valor da massa marcado pelas balanças?

b) Qual o valor das peças com o ponto de interrogação (laranjas e azuis)?

c) Acrescentando dois blocos laranjas na primeira balança em um dos lados, a balança estará em equilíbrio?

d) Que quantidade deve ser acrescentada para que esteja em equilíbrio?

e) Na segunda balança, o que ocorre se retirarmos o bloco de 7kg de cada lado?

f) Construa uma sentença algébrica para expressar a relação entre os blocos em cada balança.

g) Quais características você identifica nessa sentença algébrica?

Os alunos conseguiram estabelecer a relação de equilíbrio nas balanças como uma igualdade. Conforme registro do diálogo entre os estudantes E-10 e E-12:

> *E-10: Se as balanças estão em equilíbrio, elas marcam o mesmo peso.*
>
> *E-12: Mas se elas marcam o mesmo peso, então é fácil achar o valor de cada peça.*
>
> *E-10: Sim, inicialmente as duas balanças marcam 30kg cada. As peças menores têm 5kg cada, pois do outro lado tem uma peça de 15kg. Na outra balança, cada peça pequena tem 4kg, pois já tem 7kg na balança, que deve totalizar 15kg também.*
>
> *E-12: Se acrescentarmos dois blocos de um lado, a balança sai do equilíbrio e não tem igualdade, certo?*
>
> *E-10: Aham, daí teria que colocar 8kg do outro lado para equilibrar.*

*E-12: O mesmo não acontece se retirarmos um bloco de 7kg de cada lado, pois ela continua em equilíbrio, porém com menos peso.*

Na construção da sentença algébrica para expressar a relação entre os blocos em cada balança, se deu de modo satisfatório.

*E-10: Na primeira balança, os três blocos com ponto de interrogação têm o mesmo peso, então podemos utilizar uma letra para representar esse valor desconhecido, vou usar a letra 'a'. Posso escrever então* $3.a = 15$.

*E-12: Na segunda balança, então posso escrever,* $7 + 2.a = 7 + 8$*?*

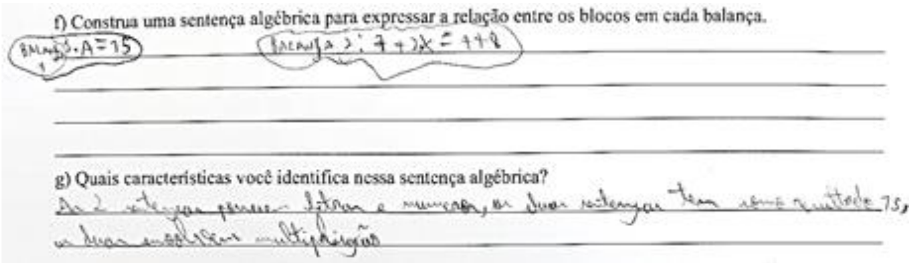
*E-10: Eu colocaria outra letra, porque o professor disse que letras iguais representam valores iguais, e a peça na primeira balança é de 5kg e na segunda balança é 4kg.*

*E-12: Elas são bem parecidas, as expressões.*

Nenhum estudante utilizou o termo 'equação' para identificar a característica das sentenças algébricas construídas para cada balança. Na Figura 4, o registro do estudante E-11 exemplifica o desenvolvimento da maioria dos estudantes para os itens 'f' e 'g' da questão.

**Figura 4**

*Registro do E-11 para a primeira questão.*


f) Construa uma sentença algébrica para expressar a relação entre os blocos em cada balança.

g) Quais características você identifica nessa sentença algébrica?

Os alunos demonstraram a capacidade de estabelecer relações/comparações, por meio das habilidades de compreender, escrever e operar com símbolos usuais, de modo a traduzir informações de outras formas de representação. Eles ampliaram a capacidade inicial, a fim de deduzir uma expressão simbólica algébrica para a problemática, sendo primeiramente em uma linguagem natural para uma linguagem algébrica surgindo a ideia da incógnita. Desse modo, mobilizaram a capacidade de modelar e operar com o desconhecido utilizando as propriedades da igualdade e a construção de equações polinomiais do 1º grau para representar a situação, mesmo não utilizando o termo correto para a situação.

A segunda e a terceira questão abordava os objetos de aprendizagem que trabalham problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, por meio das habilidades EF07MA16, EF07MA17, EF08MA12, EF08MA13 e EF09MA08. Na Figura 5 é apresentada é apresentada a segunda questão.

**Figura 5**

*Segunda questão.*

2. O professor decidiu comprar uma geladeira. Para isso, iniciou pesquisas em lojas e sites buscando pelo modelo preferido, valor acessível e formas de pagamento. O quadro a seguir apresenta algumas das opções de pagamento e parcelamento.

| Quantidade de Parcelas | Valor das parcelas (R$) |
|---|---|
| 2 | 1200,00 |
| 3 | 800,00 |
| 4 | 600,00 |

**Perguntas investigativas:**

a) Mantendo o padrão identificado na composição e número de parcelas, qual seria o valor de cada parcela se a compra fosse efetuada em 10 parcelas? E em 15 parcelas?

b) Qual relação existe entre as grandezas quantidade de parcelas e os valores respectivos?

c) Construa uma sentença algébrica para expressar a relação entre a quantidade de parcelas e os valores.

Os estudantes conseguiram desenvolver a questão de modo satisfatório. No item ‘b’, não utilizaram o termo ‘inversamente proporcional’ para denominar a relação entre as grandezas, mas explicaram em outras palavras a mesma relação.

> *E-15: Se é mantido o padrão da tabela, a compra é sem juros, né?*

*E-13: Acho que sim, o valor que vai ser pago pela geladeira é sempre de 2400.*

*E-15: Então ele vai pagar 240 cada parcela se fizer em 10 vezes e 160 cada parcela em 15 vezes. É só dividir.*

*E-13: Na letra ‘b’, a relação é que quanto mais parcelas for dividido o total, menor vai ser o valor a ser pago por mês.*

*E-15: E a sentença algébrica?*

*E-13: Para responder a letra ‘a’, a gente dividiu 2400 por 10 e depois por 15, o resultado foi o valor da parcela. A sentença deve ser 2400 dividido por um número, que é igual ao valor da parcela.*

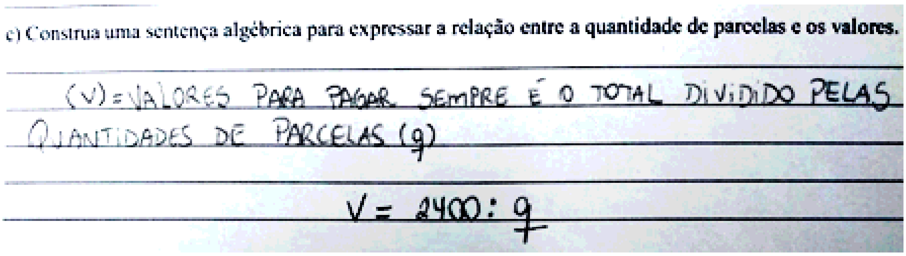
*E-15: Como não sabemos o número, podemos indicar por ‘x’ e o valor da parcela por ‘p’. A gente só vai saber o valor da parcela, se souber em quantas vezes vai ser dividido.*

*E-13: Então poderia ser* $v = 2400: q$.

Na Figura 6, o registro do estudante E-16 para o item ‘c’ da questão.

**Figura 6**

*Registro do E-16 para o item ‘c’ da segunda questão.*



c) Construa uma sentença algébrica para expressar a relação entre a quantidade de parcelas e os valores.

(V) = VALORES PARA PAGAR SEMPRE É O TOTAL DIVIDIDO PELAS QUANTIDADES DE PARCELAS (q)

V = 2400 : q

Diante do exposto, os estudantes manifestaram a capacidade de estabelecer relações/comparações por meio das habilidades de compreender, escrever, operar com símbolos usuais e traduzir informações de outras formas de representação. Por meio da busca da identificação do padrão, eles ampliaram a capacidade de relacionar, a fim de deduzir uma expressão simbólica algébrica para a questão, ou seja, um modelo iniciado por linguagem natural, sendo realizada a síntese das relações envolvendo as grandezas inversamente proporcionais para operar com o desconhecido, possibilitando o uso da linguagem simbólica na representação do modelo.

Na Figura 7 é apresentada a terceira questão. Nessa atividade, os alunos conseguiram solucionar de modo correto boa parte dos itens.

**Figura 7**

*Terceira questão*.

3. Em Santa Cruz do Sul irá ocorrer um campeonato de natação com provas de 100 m, 200 m, 400 m e 800 m. Daniel participará de todas as provas nesse campeonato. Os tempos de Daniel em treinamento são: 100 m em 60 segundos e 200 m em 120 segundos.

**Perguntas investigativas:**

a) Mantendo o mesmo ritmo de nado, em quanto tempo Daniel fará as provas de 400m e 800m? Monte um quadro mostrando suas conclusões.

b) Sendo a piscina de 50 m, quantas vezes Daniel percorre a raia em cada prova?

c) Qual relação existe entre a distância de cada prova e os tempos obtidos por Daniel?

d) Construa uma sentença algébrica para expressar a relação entre a distância de cada prova e os tempos obtidos por Daniel.

Na identificação da relação existente entre a distância de cada prova e os tempos, afirmaram que o tempo dobrava à medida que a distância também dobrava, sem mencionar a relação direta de proporção.

> *E-14: Se ele mantém o ritmo, ele nada 100m em um minuto. Então, em 400m vai levar 4min, em 800m vai levar 8min. Desse modo, ele vai dobrando a distância e o tempo também dobra.*
>
> *E-12: Para determinar quantas vezes ele percorre uma piscina de 50m, é só dividir a distância de cada prova por 50m.Muito fácil essa!*
>
> *E-14: Realmente, bem fácil. Na prova de 100m vai percorrer duas vezes, na de 200m... 4 vezes, na de 400m...8 vezes e na de 800m...16 vezes.*

No item ‘d’, foi necessário o auxílio do professor para construção da sentença algébrica, e para isso foi utilizado como recurso o quadro montado no item ‘a’. Conforme diálogo entre o pesquisador (Pq) e os estudantes.

> *Pq: Observem o quadro montado na letra ‘a’. O que ocorre com a distância quando o tempo aumenta?*

*E-14: Os dois vão dobrando.*

*Pq: Dobra com relação a que?*

*E-14: Sempre em relação ao termo anterior.*

*Pq: Por exemplo, se a prova for de 300m, quanto tempo ele vai levar?*

*E-14: Vai levar 3min.*

*Pq: Mas, o tempo dobra com relação ao termo anterior, como você disse?*

*E-14: Não...*

*Pq: Então precisamos analisar a relação de distância e tempo, ou seja, a velocidade. Qual a velocidade de Daniel?*

*E-14: 100m por minuto.*

*E-12: Se ele nada sempre nesse ritmo, é só multiplicar o 100 pelo tempo, certo?*

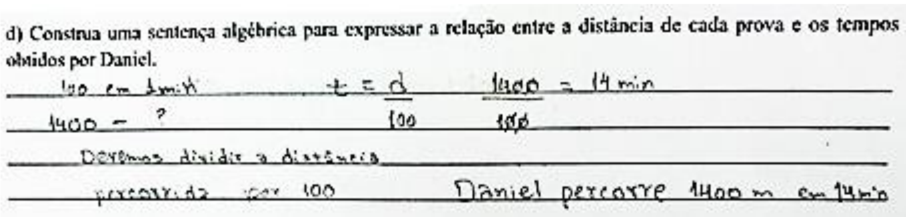
*Pq: Exatamente. Como ficaria a sentença algébrica?*

*E-12:* $y = 100.x$, *sendo x o tempo percorrido. Substituindo os valores fecha.*

Na Figura 8, é apresentado o registro do estudante E-3 que apresentou um modelo semelhante ao construído pelos demais colegas, porém a variável tempo está evidenciada, podendo ser determinada de forma direta.

**Figura 8**

*Registro do E-3 para a terceira questão.*


d) Construa uma sentença algébrica para expressar a relação entre a distância de cada prova e os tempos obtidos por Daniel.

100 em 1min $\quad t = \frac{d}{100} \quad \frac{1400}{100} = 14$ min

1400 — ?

Devemos dividir a distância percorrida por 100

Daniel percorre 1400 m em 14min

Os estudantes demonstraram a capacidade de estabelecer relações/comparações em função das habilidades de compreender, operar com símbolos usuais e outras formas de representação, como na construção do quadro. Ampliaram essa capacidade, por meio da identificação do padrão envolvido na situação atrelado a grandezas diretamente proporcionais, a fim de deduzir a sentença algébrica. Na construção do modelo e na capacidade de generalização revelada, os alunos demonstraram mobilizar de modo parcial, pois necessitaram do auxílio do professor.

Nas próximas questões, quarta e quinta, buscaram desenvolver os objetos de aprendizagem relacionados a associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano e o sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano, promovendo as habilidades EF08MA08 e EF08MA07.

**Figura 9**

*Quarta questão.*

4. Charles imprimiu uma receita de sabonete líquido da internet.

| | Sabonete liquido: ### ml |
|---|---|
| Água | 110 ml |
| Base perolada | 65 ml |
| Essência | ### ml |

**Perguntas investigativas:**

a) Como você escreveria uma equação que descrevesse as quantidades dos componentes desse sabonete liquido? Utilize a linguagem algébrica.

b) Alguns números apagaram durante a impressão. Quais são esses números? Como você pensou para descobrir?

c) Charles sabe que a quantidade total do sabonete liquido é entre 200 ml e 240 ml. Quais são as quantidades de essência nesses dois casos?

d) Poderíamos representar essa relação entre a quantidade de essência e quantidade total do sabonete liquido no plano cartesiano? Coloque no plano cartesiano os pares ordenados para (quantidade de essência, quantidade sabonete). Trace um segmento de reta que ligue os dois pontos no plano cartesiano e escolha um ponto qualquer no segmento de reta. Substitua os valores do par ordenado na equação. Repita este procedimento com mais pares ordenados. O que você pode concluir?

A Figura 9 apresenta a quarta questão, nela os estudantes apresentaram dificuldades em resolver boa parte dos itens.

No item ‘a’, os alunos conseguiram construir a equação que representava a situação.

> *E-18: O que foi apagado na receita podemos representar por uma letra.*
>
> *E-16: Então, ficaria* $110 + 65 + x = a$.
>
> *E-18: Como vamos descobrir os números que foram apagados na impressão?*
>
> *E-16: Eu acho que tem que ser maior que 175, pois somando 110+65 dá 175.*

Os estudantes não relacionaram que o volume do sabonete líquido estava em função do volume da essência, portanto, não associaram a equação a possibilidade de infinitas soluções.

> *E-16: Para saber a quantidade de essência em 200ml e 240ml de sabonete líquido?*
>
> *E-18: Acho que temos que fazer uma conta de menos, pois já tem 175ml das outras coisas.*
>
> *E-16: Então é só diminuir. Vai dar 25ml para o sabonete de 200ml e 65ml para o sabonete de 240ml.*

Nesse processo de determinar a quantidade de essência no volume do sabonete líquido, alguns estudantes erraram a subtração, apontando que seriam 75ml de essência para o volume de 240 ml de sabonete líquido. Nesse momento, o professor questionou o que ocorreria na realidade, se ocorresse o erro.

> *Pq: Pessoal, o que ocorreria com o sabonete se fosse fabricado com esse erro?*
>
> *E-19: Ela ficaria diferente do esperado.*
>
> *E-20: Poderia mudar a cor, consistência e ficar mais grosso ou líquido.*
>
> *E-19: Não daria ‘liga’.*

No item ‘d’, foi necessário auxílio do professor para o processo de resolução. Como se tratava da primeira questão envolvendo o uso do plano cartesiano foi realizado uma revisão.

> *Pq: Poderíamos representar essa relação entre a quantidade de essência e a quantidade total do sabonete no plano cartesiano?*
>
> *E-16: Acho que sim, um sendo o x e o outro o y. Mas eu nem não sei, quem é quem.*
>
> *Pq: Vamos associar o eixo do x com a quantidade de essência e o eixo do y com a quantidade de sabonete. E agora?*
>
> *E-16: Podemos marcar os valores da questão anterior, 65ml para 240 e 25ml para 200ml.*
>
> *Pq: Perfeito. Façam essa construção. Depois sigam fazendo a questão.*

O restante do item, solicitava que fosse escolhido um ponto qualquer do segmento de reta, para posteriormente determinar o par ordenado na equação a fim de constatar se ele pertencia ao conjunto solução e se a equação tinha infinitas soluções. Nesse contexto, os estudantes apenas construíram a representação gráfica, sem verificar o par ordenado na equação como pode ser evidenciado no registro do aluno E-14 na Figura 10.

Apesar da questão proporcionar a mobilização de todas as capacidades do pensar algebricamente, os estudantes acabaram apresentando somente a capacidade de estabelecer relações/comparações de modo parcial, pois as habilidades de compreender, operar com símbolos usuais e traduzir informações de outras formas de representação e vice-versa, comprometeram a possibilidade de se atingir as demais capacidades, ficando restrita a primeira característica do pensamento algébrico.

Na quinta questão, ilustrada pela Figura 11, nenhum aluno conseguiu desenvolvê-la em sua totalidade de modo correto.

**Figura 10**

*Registro do E-14 para a quarta questão.*

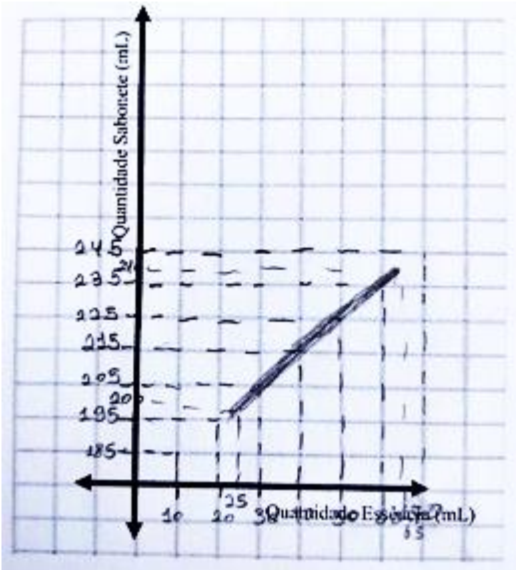



**Figura 11**

*Quinta questão*.

5. Marcia vai estender as roupas que utiliza aos fins de semana para jogar futebol. Dentre essas roupas existem pares de meias e calções. Ela utiliza um único pregador para cada par de meia e dois pregadores para cada calção. Ela utilizou 20 pregadores pendurando 25 peças no varal.

**Perguntas investigativas:**

a) Como poderíamos representar essa situação utilizando expressões algébricas?
b) Essas expressões possuem relações? Podem ser caracterizadas como equações?
c) Quantas incógnitas possuem as expressões algébricas?
d) Trace a representação geométrica para essas expressões algébricas no plano cartesiano.
e) Existe algum ponto em comum entre as representações geométricas? Qual ou quais?
f) Qual a diferença entre essa situação e a anterior?
g) Quantos pares de meia e calções Marcia estendeu no varal? Compare com a representação algébrica.

Um fato que necessitou ser esclarecido para a turma, foi que um par de meia, equivale a duas peças de roupa.

*E-19: Professor, eu usei ‘m’ para meias e ‘c’ para calção para organizar as expressões algébricas, ficando* $1m + 2c = 20$ *e 1m+1c=25. Mas quando vou resolver dá negativo e não pode!*

*Pq: Por que fez 1m+2c =20?*

*E-19: É que são 20 pregadores no total e é usado um para prender a meia e dois para prender o calção.*

*Pq: Perfeito. E por que fez* $1m + 1c = 25$*?*

*E-19: Eu fiz, porque somente o número de peças no varal da 25 e tem meias e calção.*

*Pq: Aí é que está o problema, um par de meia tem quantas peças?*

*E-19: Duas. Então ficaria* $2m + 1c = 25$*?*

*Pq: Isso aí.*

*E-19: Essa informação poderia estar mais clara na questão, né?*

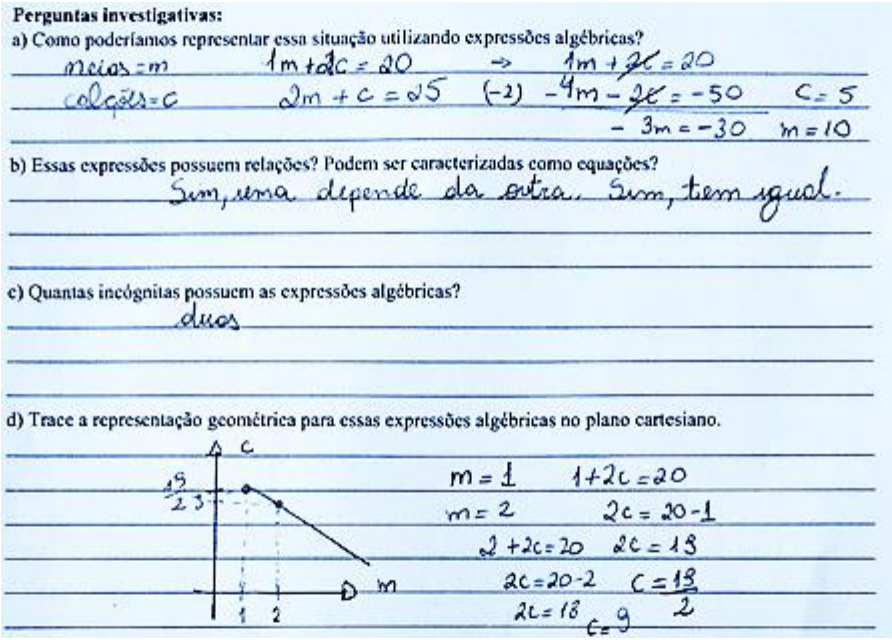
Boa parte conseguiu representar as expressões algébricas para a situação, identificá-las como equações com duas incógnitas e que tinham uma relação de dependência, porém não conseguiram representar as expressões algébricas no plano cartesiano, como exemplifica o registro do estudante E-16 na Figura 12.

Tendo a representação equivocada das expressões algébricas no plano cartesiano, isso oportunizou que os estudantes não conseguissem comparar as representações entre as retas buscando identificar um ponto em comum. Apenas dois estudantes conseguiram determinar o número de peças envolvidas na situação, sendo que o estudante E-16 foi o único a utilizar a resolução pelo método da adição, em sistema de equações, para determinar o número de pares de meias e de calções.

A questão previa a mobilização de todas as capacidades do pensar algebricamente, porém os estudantes apresentaram de forma parcial, apenas a capacidade de estabelecer relações/comparações. As habilidades de compreender, operar com símbolos usuais e traduzir informações de outras formas de representação, se mostraram de modo ineficaz, pois não conseguiram representar geometricamente a situação apresentada a partir das expressões algébricas. Dessa maneira, comprometeram a possibilidade de atingir as demais capacidades, ficando restrita a primeira característica do pensamento algébrico. Fato semelhante, ao que ocorreu na resolução da questão anterior.

**Figura 12**

*Registro do E-16 para a quinta questão.*



**Perguntas investigativas:**

a) Como poderíamos representar essa situação utilizando expressões algébricas?

meias = m    $1m + 2c = 20$ → $1m + \cancel{2c} = 20$

calções = c    $2m + c = 25$ $(-2)$ $-4m - \cancel{2c} = -50$    $c = 5$

$-3m = -30$    $m = 10$

b) Essas expressões possuem relações? Podem ser caracterizadas como equações?

Sim, uma depende da outra. Sim, tem igual.

c) Quantas incógnitas possuem as expressões algébricas?

duas

d) Trace a representação geométrica para essas expressões algébricas no plano cartesiano.

$m = 1$    $1 + 2c = 20$

$m = 2$    $2c = 20 - 1$

$2 + 2c = 20$    $2c = 19$

$2c = 20 - 2$    $c = \frac{19}{2}$

$2c = 18$

$c = 9$

Nas últimas questões, os objetos de aprendizagem relacionam funções: representações numérica, algébrica e gráfica e a razão entre grandezas diferentes, promovendo as habilidades EF09MA06 e EF09MA07.

A sexta questão, exibida na Figura 13, foi aplicada somente no 9º ano do Ensino Fundamental, uma vez que, as habilidades relacionadas a esse conteúdo estão previstas somente para esse ano escolar.

**Figura 13**

*Sexta questão* (construída pelo autor).

6. A variação da temperatura num dia de inverno é descrita na tabela abaixo.

| Medidas | Temperatura |
|---|---|
| **1ª** | **18ºC** |
| **2ª** | **15ºC** |
| **3ª** | **12ºC** |
| **4ª** | **9ºC** |
| **5ª** | **6ºC** |

**Perguntas investigativas**

a) Se a temperatura continuar a variar desse modo, qual será a 6ª medida? E a 9ª?
b) Construa a sequência dos 10 primeiros termos dessa sequência.
c) Que padrão de regularidade você observou nos valores tabulados?
d) Construa um gráfico relacionando as medidas com a temperatura.
e) O gráfico que você obteve representa uma função?
f) Qual é o domínio? E a imagem dessa função?
g) Qual é a variável dependente e a independente?
h) Escreva uma expressão algébrica que represente a situação.

Os estudantes identificaram o padrão envolvido na situação, representaram graficamente a situação, estabeleceram uma relação com o conceito de função, bem como a identificação de domínio, imagem, variável independente e dependente, além da generalização para a situação apresentada.

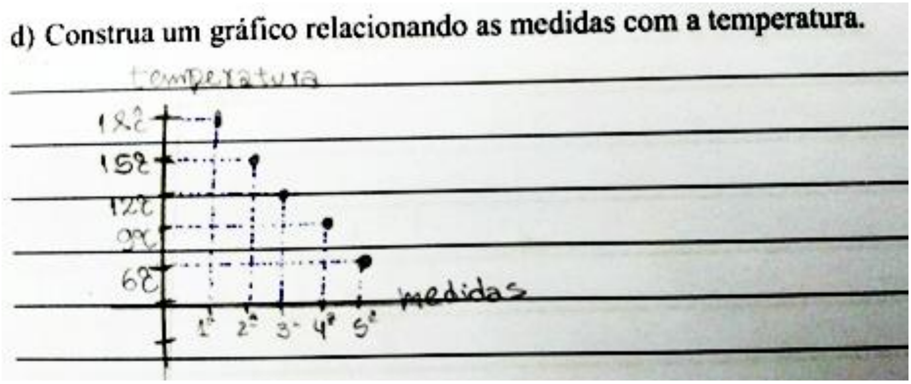
> *E-19: Para a 6ª medida a temperatura vai ser de 3ºC e para 9ª será -6ºC.*
>
> *Pq: Como você concluir isso?*
>
> *E-19: Fácil, professor...a cada medida a temperatura reduz 3.*
>
> *Pq: Como poderíamos representas em um gráfico a relação entre as medidas e a temperatura?*
>
> *E-19: Vai ser uma reta ‘caindo’.*
>
> *Pq: Por quê?*
>
> *E-19: A temperatura diminui à medida que é feito as medidas.*

*Pq: Vamos verificar construindo o gráfico.*

Na Figura 14, é apresentado o registro do estudante E-20 para o gráfico relacionando as medidas com a temperatura.

**Figura 14**

*Registro do E-20 para o item 'd' da sexta questão.*




Observa-se que no gráfico, o aluno não uniu os pontos, o mesmo ocorreu com boa parte dos estudantes. Esse fato possibilitou identificar que eles tinham compreensão do conceito de função, como pode ser evidenciado também no diálogo a seguir.

*Pq: Por que você não uniu os pontos no gráfico?*

*E-19: Porque não pode. Se eu unir vai parecer que existe 1,75 de medição e não pode. Cada medição é um número inteiro, não pode ser negativo também. Ou você, mede -9m?*

*Pq: E essa situação é uma função?*

*E-19: Sim, pois para cada medida tem uma temperatura única.*

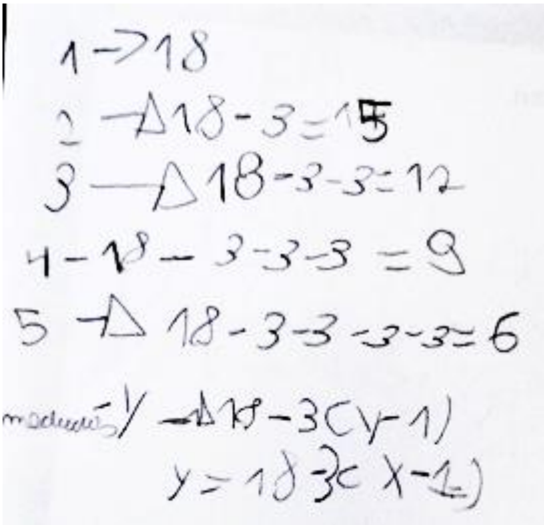
*Pq: Quem seria a variável independente e a dependente?*

*E-19: Eu acho que a temperatura é a dependente, pois se não se medir, não se conhece a temperatura.*

Para o processo de escrever uma expressão algébrica que representa a situação, os estudantes utilizaram como recurso a tabela e o padrão na redução da temperatura em cada medida. Essa etapa foi desenvolvida de modo conjunto pelos estudantes da turma. Na Figura 15, é exemplificado o processo de construção por meio do registro do estudante E-21.

**Figura 15**

*Registro do E-21 para o item 'h' da sexta questão.*




Os estudantes conseguiram mobilizar a capacidade de estabelecer relações/comparações por meio das habilidades de compreender, escrever e operar com símbolos usuais, bem como traduzir informações de outras formas de representação e vice-versa. Ampliaram a capacidade inicial de relacionar, identificando o padrão de regularidade, a fim de deduzir a expressão simbólica algébrica para a problemática.

Esse processo se deu inicialmente em uma linguagem natural, para posteriormente a linguagem algébrica. Os estudantes revelaram a capacidade de generalização, pois conseguiram construir o modelo em uma linguagem genuinamente algébrica, possibilitando representar e operar com o desconhecido. Diante disso, apresentaram todas as capacidades do pensar algebricamente. Na Figura 16 é apresentada a sétima questão.

**Figura 16**

*Sétima questão*.

7. Uma corda de um circo estava enfeitada com esferas e cilindros como mostra abaixo:

**Perguntas investigativas**

a) Qual é grupo que se repete?

b) Se forem utilizadas 60 esferas, quantos cilindros existirão? E quantos grupos?

c) Preencha a tabela abaixo. Explique o raciocínio usado.

| Nº de grupos | Nº de esferas | Nº de cilindros | Nº total de objetos |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 4 |
| | | 4 | |
| | 6 | | |
| 4 | | | |

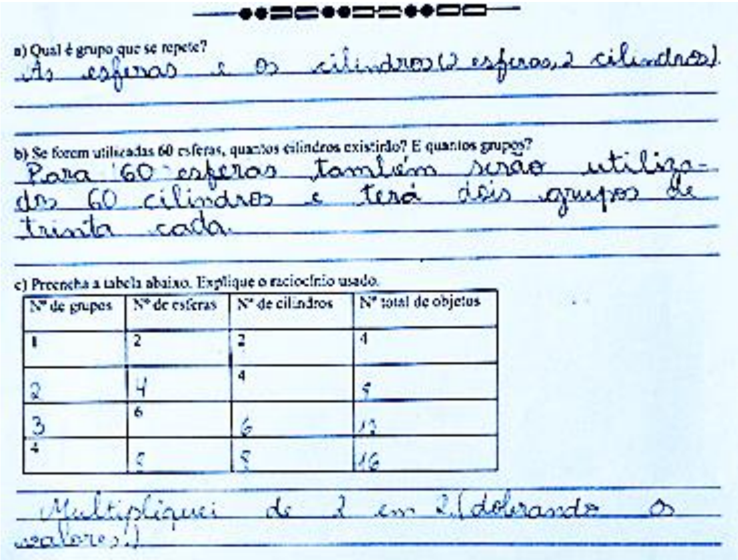
d) Estabeleça uma lei que possa ser encontrado o número de esferas e de cilindros.

e) Faça o mesmo com o número total de objetos.

Nessa questão, os estudantes tiveram facilidade nos primeiros itens da atividade, conforme Figura 17, que traz o registro do estudante E-18.

**Figura 17**

*Registro do E-18 para os primeiros itens da sétima questão.*



a) Qual é grupo que se repete?

As esferas e os cilindros(2 esferas, 2 cilindros).

b) Se forem utilizadas 60 esferas, quantos cilindros existirão? E quantos grupos?

Para 60 esferas também serão utilizados 60 cilindros e terá dois grupos de trinta cada.

c) Preencha a tabela abaixo. Explique o raciocínio usado.

| Nº de grupos | Nº de esferas | Nº de cilindros | Nº total de objetos |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 8 |
| 3 | 6 | 6 | 12 |
| 4 | 8 | 8 | 16 |

Multipliquei de 2 em 2(dobrando os valores!).

Ocorrem dificuldades no processo de estabelecer uma lei para determinar o número de esferas, cilindros e o total de objetos em relação ao grupo de repetição na corda. Apenas dois estudantes conseguiram solucionar o item ‘d’ e ‘e’.

> *E-9: eu não consigo relacionar, pois tem duas coisas diferentes juntas. Eu sei que sempre vai dobrar, mas não consigo representar.*
>
> *E-10: Deve relacionar o número de esferas e cilindros em relação ao grupo?*
>
> *Pq: Isso. E depois o número total de objetos.*
>
> *E-9: Mas então podemos representar por* $y = 2x$, *pois sempre dobra.*
>
> *E-10: Isso será tanto para as esferas quanto cilindros.*
>
> *E-9: E o do grupo vai ser* $y = 2x + 2x$*?*

*E-10: Acho que tem que ser diferente as letras, pois são esferas, cilindros e o total.*

*E-9: Bem pensado, então vai ser* $g = 2e + 2c$.

A questão tinha a potencialidade de desenvolver todas as capacidades de pensar algebricamente, porém os estudantes conseguiram mobilizar a capacidade de estabelecer relações/comparações por meio das habilidades de compreender, escrever e operar com símbolos usuais, bem como traduzir informações de outras formas de representação e vice-versa. Porém, não ampliaram a capacidade inicial de relacionar, mesmo buscando a identificação de um padrão, não conseguiram deduzir uma expressão algébrica para a situação na maioria dos casos.

## CONCLUSÕES

O pensamento algébrico pode ser compreendido como uma abordagem envolvendo situações que enfatizam aspectos gerais relacionados com ferramentas que não são necessariamente linguagem simbólica, mas que em última instância pode ser utilizado como apoio cognitivo.

Em relação a intervenção, os alunos tiveram dificuldades na interpretação das questões, em explicar o raciocínio utilizado e nos conceitos matemáticos envolvendo área, perímetro, fatoração, operações envolvendo números decimais, plano cartesiano e sistemas de equações, no qual o professor realizou revisão durante a aplicação.

Considerando que sete questões previam a mobilização de todas as capacidades do pensar algebricamente, os estudantes conseguiram apresentar essas capacidades na sua totalidade, em três dessas questões. Os maiores percalços identificados foram a conexão entre a representação algébrica e a geométrica, por meio do uso do plano cartesiano e a estruturação de uma sentença algébrica para identificar a situação envolvida, ou seja, a linguagem algébrica não é utilizada como apoio cognitivo para a resolução de problemas.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 88) destacam que "o pensamento algébrico é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes caminhos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento". Portanto, é necessário que seja possibilitado aos alunos uma gama de contextos e situações nas atividades propostas.

Mesmo proporcionando por meio da sequência didática diferentes contextos, em todas as questões foram mobilizadas, mesmo que de forma parcial, pelo menos uma capacidade do pensar algebricamente. Porém, nesse processo a capacidade de estabelecer relações/comparações é a primeira a ser manifestada para a estruturação do pensamento algébrico, em consequência, quando o estudante apresenta dificuldades de interpretação e entendimento de diversos conceitos matemáticos, ele acabará tendo percalços no processo para desenvolver essa forma de pensar.

Outro aspecto relevante do pensamento algébrico apresentado por Lins (1994) é que esse tipo de pensamento não se desenvolve de modo espontâneo, só se desenvolve por meio de um ato intencional, ou seja, são necessários estímulos no processo de ensino.

A partir dos registros analisados dos estudantes na intervenção e os dados do SAEB do município de Cerro Branco/RS, verificou-se que ambos convergem em relação ao resultado para o desenvolvimento de habilidades envolvendo o pensamento algébrico. Portanto, os estudantes necessitam mobilizar essas capacidades, por meio de estímulos proporcionados pelos professores.

Kieran, Pang e Schifter (2016) ressaltam que os currículos podem ter um impacto pequeno sobre o que acontece em sala de aula, uma vez que, o desenvolvimento do pensamento algébrico requer desenvolvimento profissional.

A partir das capacidades do pensar algebricamente identificadas durante a intervenção pedagógica, nota-se que a sequência didática propiciou que os estudantes manifestassem habilidades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico e que os professores pudessem desenvolver um planejamento visando sanar as dificuldades identificadas.

## AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 para a realização de doutoramento do autor Charles Bruno da Silva Melo.

## DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Este artigo foi preparado e organizado pelos dois autores. C.B.S.M desenvolveu os pressupostos teóricos-metodológicos, aplicou e coletou os dados. C.B.S.M e E.B. analisaram os dados e trabalharam na construção geral do artigo.

## DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os autores concordam que os dados que sustentam os resultados deste estudo estão disponíveis mediante solicitação razoável, a critério dos autores.

## REFERÊNCIAS


Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio

Edelson, D. C. (2002). Design research: what we learn when we engage in design *The Journal of the Learning Science*, *11*(1), 105–121.

Fiorentini, D., Miorin, M. A., & Miguel. A (1993). Contribuição para um repensar a Educação Algébrica: *Pro-Posições*, *4*(1), 78–91.

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E.M. (2006). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: *Anais do Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores*.

Herrington, J., Mckenney, S., Reeves, T., & Oliver, R. (2007). *Design-based research and doctoral students: Guidelines for preparing a dissertation proposal*. Edith Cowan University: ECU Publications.

Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. In: Grows, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390–419.

Kieran, C., Pang, J.S, Schifter, D., & Ng, S.F (2016). Early Algebra. In: *Research into its Nature, its Learning, its Teaching.*

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding: what algebraic thinking is.* Tese de doutorado. University of Nothingam.

Mckenney, S. & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research.*

Plomp, T., & Nieveen, N. (2009). *An introduction to educational design research*.

Radford, L.(2011) Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In: *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (p. 17-24).

Reeves, T. C. (2000). Enhancing the worth of instructional technology research trough “design experiments” and other developmental research strategies. In: *Proceedings of the Annual meeting of the American Educational research association* (AERA).

Van D. A. J. (1999). Principles and methods of development research. In: Van Den Akker, J., Nieveen, N., Branch, R. M., Gustafson, K. L., & Plomp, T. (Eds.). *Design Approaches and Tools in Education and Training.* (p. 1-14).

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005) Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, *53*(4), 5-23.